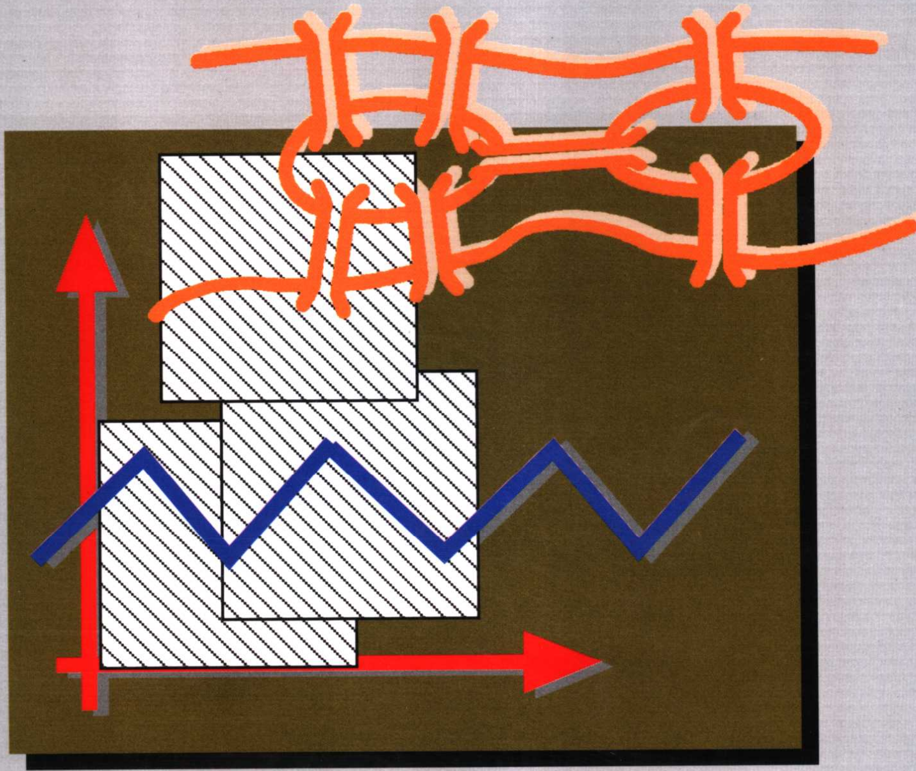
运筹学习题集

（第三版）



胡运权 主编

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

普通高等教育管理工程类规划教材

运筹学习题集

（第三版）

胡运权　主编

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是原国家教委管理工程类专业第二届教学指导委员会统一组织编写的普通高等教育管理工程类规划教材。同1995年本书修订版相比，这次修订时又增加了近百道新习题，主要选自近年来报考硕士和博士生的试题，以及根据国外教材有关内容进行的改编，从而使习题集的题型更广泛，内容更丰富、更具启发性。

本书含线性规划、目标规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、排队论、存贮论、对策论、决策论和多目标决策共14章，计700余题，分别给出答案、证明或题解。本书是学习掌握运筹学理论和方法的重要辅助教材，也是自学运筹学和考研的常备参考材料。

本书适用于大学本科生教学，特别是参加研究生考试的学生，使用本书可以获得很好的学习效果。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学习题集/胡运权主编. —3版. —北京：清华大学出版社，2002
ISBN 7-302-05434-7

Ⅰ. 运…　Ⅱ. 胡…　Ⅲ. 运筹学—习题　Ⅳ. O22-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 040548 号

出 版 者：清华大学出版社（北京清华大学学研大厦，邮编 100084）
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑：魏荣桥
印 刷 者：北京市清华园胶印厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：787×960 1/16　**印张**：19.25　**字数**：397 千字
版　　次：2002 年 9 月第 3 版　2002 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-05434-7/F・414
印　　数：0001～5000
定　　价：25.00 元

第三版 前言

习题是消化领会教材和巩固所学知识的重要环节，是学习掌握运筹学理论和方法的不可或缺的手段。本习题集从1985年第一版出版以来，就一直得到广大读者的厚爱，在原国家教委管理工程类专业教学指导委员会第二届任期内，决定将本习题集列为普通高等教育管理工程类规划教材，并于1995年出版了修订版。在不到6年的时间里，修订版已9次印刷，除被继续用作运筹学课程的辅助教材外，越来越多地被用作考研的必备参考材料，同时本习题集也成了很多讲授运筹学课程教师的案头书籍，书中的一些习题还被编入了多本正式出版的教材中。受此鼓舞，我们决定对本习题集再次修订。这次修订，除将原书中非线性规划、动态规划部分分别合并成一章外，体系结构上没有作多大变动。修订的主要方面是新增近百道习题，主要选自近年来报考硕士生、博士生的运筹学入学试题，有一部分内容是参考国外教材中的习题作了改编。为控制全书篇幅，从原书中删减了一些类型上重复的习题。习题集中的名词符号主要参考清华大学出版社出版的《运筹学》和《运筹学教程》，尽量做到一致。答案中习题的编号同习题部分的编号完全相同，做到一一对应。

本书1995年修订版中各章编写的分工（按这次第三版的章目）为：胡运权（哈尔滨工业大学）编第一、二、三、五、八、十、十一、十二章，钱国明（哈尔滨工业大学）编第四章，郭耀煌（西南交通大学）和胡运权编第六章，甘应爱（华中科技大学）编第七章，李英华（北京机械学院）编第九章，胡祥培（大连理工大学）和胡运权编第十三章，钱国明和胡运权编第十四章，全书由胡运权主编，天津大学李维铮主审。这次修订工作主要由胡运权完成，钱国明、胡祥培参与了少部分工作。

在本书的编写和多次修订中，得到了原国家教委管理工程类教学指导委员会和清华大学《运筹学》教材很多编者的关心指导，得到了清华大学出版社的关心和支持，西南交通大学的赵冬梅及大连理工大学的鲁艳霞曾寄送了部分资料，谨在此一并感谢！

由于编者水平有限，书中有不妥和错误之处，恳请广大读者批评指正。

作　者

2002年3月

第三版 目录

运筹学习题集

习题答案

第 一 章

线性规划及单纯形法

复习思考题

1. 试述线性规划数学模型的结构及各要素的特征。

2. 求解线性规划问题时可能出现哪几种结果，哪些结果反映建模时有错误。

3. 什么是线性规划问题的标准形式，如何将一个非标准型的线性规划问题转化为标准形式。

4. 试述线性规划问题的可行解、基解、基可行解、最优解的概念以及上述解之间的相互关系。

5. 试述单纯形法的计算步骤，如何在单纯形表上去判别问题是具有惟一最优解、无穷多最优解、无界解或无可行解。

6. 如果线性规划的标准型式变换为求目标函数的极小化 $\min z$，则用单纯形法计算时如何判别问题已得到最优解。

7. 在确定初始可行基时，什么情况下要在约束条件中增添人工变量，在目标函数中人工变量前的系数为($-M$)的经济意义是什么。

8. 什么是单纯形法计算的两阶段法，为什么要将计算分两个阶段进行，以及如何根据第一阶段的计算结果来判定第二阶段的计算是否需继续进行。

9. 简述退化的含义及处理退化的勃兰特规则。

10. 举例说明生产和生活中应用线性规划的方面，并对如何应用进行必要描述。

11. 判断下列说法是否正确：

(a) 图解法同单纯形法虽然求解的形式不同，但从几何上理解，两者是一致的；

(b) 线性规划模型中增加一个约束条件，可行域的范围一般将缩小，减少一个约束条件，可行域的范围一般将扩大；

(c) 线性规划问题的每一个基解对应可行域的一个顶点；

(d) 如线性规划问题存在最优解，则最优解一定对应可行域边界上的一个点；

(e) 对取值无约束的变量 x_j，通常令 $x_j=x_j'-x_j''$，其中 $x_j'\geqslant 0$，$x_j''\geqslant 0$，在用单纯形法求得的最优解中有可能同时出现 $x_j'>0$，$x_j''>0$；

(f) 用单纯形法求解标准型式的线性规划问题时，与 $\sigma_j>0$ 对应的变量都可以被选作换入变量；

(g) 单纯形法计算中，如不按最小比值原则选取换出变量，则在下一个解中至少有一个基变量的值为负；

(h) 单纯形法计算中，选取最大正检验数 σ_k 对应的变量 x_k 作为换入变量，将使目标函数值得到最快的增长；

(i) 一旦一个人工变量在迭代中变为非基变量后，该变量及相应列的数字可以从单纯形表中删除，而不影响计算结果；

(j) 线性规划问题的任一可行解都可以用全部基可行解的线性组合表示；

(k) 若 X^1、X^2 分别是某一线性规划问题的最优解，则 $X=\lambda_1X^1+\lambda_2X^2$ 也是该线性规划问题的最优解，其中 λ_1、λ_2 为正的实数；

(l) 线性规划用两阶段法求解时，第一阶段的目标函数通常写为 $\min z=\sum_i x_{ai}$（x_{ai} 为人工变量），但也可写为 $\min z=\sum_i k_i x_{ai}$，只要所有 k_i 均为大于零的常数；

(m) 对一个有 n 个变量、m 个约束的标准型的线性规划问题，其可行域的顶点恰好为 C_n^m 个；

(n) 单纯形法的迭代计算过程是从一个可行解转换到目标函数值更大的另一个可行解；

(o) 线性规划问题的可行解如为最优解，则该可行解一定是基可行解；

(p) 若线性规划问题具有可行解，且其可行域有界，则该线性规划问题最多具有有限个数的最优解；

(q) 线性规划可行域的某一顶点若其目标函数值优于相邻的所有顶点的目标函数值，则该顶点处的目标函数值达到最优。

练习题

1.1 用图解法求解下列线性规划问题，并指出各问题是具有惟一最优解、无穷多最优解、无界解或无可行解。

(a) $\min z=6x_1+4x_2$

$$\text{st.}\begin{cases}2x_1+x_2\geqslant 1\\3x_1+4x_2\geqslant 1.5\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(b) $\max z=4x_1+8x_2$

$$\text{st.}\begin{cases}2x_1+2x_2\leqslant 10\\-x_1+x_2\geqslant 8\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(c) $\max z=x_1+x_2$

$$\text{st.}\begin{cases}8x_1+6x_2\geqslant 24\\4x_1+6x_2\geqslant -12\\2x_2\geqslant 4\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(d) $\max z=3x_1-2x_2$

$$\text{st.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 1\\2x_1+2x_2\geqslant 4\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(e) $\max z=3x_1+9x_2$

$$\text{st.}\begin{cases}x_1+3x_2\leqslant 22\\-x_1+x_2\leqslant 4\\x_2\leqslant 6\\2x_1-5x_2\leqslant 0\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(f) $\max z=3x_1+4x_2$

$$\text{st.}\begin{cases}-x_1+2x_2\leqslant 8\\x_1+2x_2\leqslant 12\\2x_1+x_2\leqslant 16\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

1.2 某炼油厂根据计划每季度需供应合同单位汽油 15 万 t(吨)、煤油 12 万 t、重油 12 万 t。该厂从 A,B 两处运回原油提炼,已知两处原油成分如表 1-1 所示。又如从 A 处采购原油每 t 价格(包括运费、下同)为 200 元,B 处原油每 t 为 310 元。试求:(a) 选择该炼油厂采购原油的最优决策;(b) 如 A 处价格不变,B 处降为 290 元/t,则最优决策有何改变?

表 1-1

	A/%	B/%
含汽油	15	50
含煤油	20	30
含重油	50	15
其他	15	5

1.3 线性规划问题:

$\max z=c_1x_1+x_2$

$$\text{st.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 6\\x_1+2x_2\leqslant 10\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

试用图解法分析,问题最优解随 $c_1(-\infty<c_1<\infty)$ 取值不同时的变化情况。

1.4 将下列线性规划问题变换成标准型,并列出初始单纯形表:

(a) $\min z=2x_1-x_2+2x_3$

$$\text{st.}\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=4\\-x_1+x_2-x_3\leqslant 6\\x_1\leqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\text{ 无约束}\end{cases}$$

(b) $\max z=2x_1+x_2+3x_3+x_4$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1+\ x_2+\ x_3+\ x_4\leqslant 7 \\ 2x_1-3x_2+5x_3 \qquad\quad =-8 \\ x_1 \qquad -2x_3+2x_4\geqslant 1 \\ x_1,\ x_3\geqslant 0,\ x_2\leqslant 0,\ x_4\ \text{无约束} \end{cases}$$

1.5 列出下述线性规划问题的初始单纯形表：

(a) $\max z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_{ik}/p_k$

$$\text{st.}\begin{cases} \sum_{k=1}^{m} x_{ik} \leqslant b_i \quad (i=1,\cdots,n) \\ \sum_{i=1}^{n} c_{ik}x_{ik} = d_k \quad (k=1,\cdots,m) \\ x_{ik}\geqslant 0 \quad (i=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,m) \end{cases}$$

(b) $\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$$\text{st.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad (i=1,\cdots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=1,\cdots,n) \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n) \end{cases}$$

(c) $\max z= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n_j} (C_jX_{jk})\rho_{jk}$

$$\text{st.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{n_j} (A_jX_{jk})\rho_{jk} + X_s = b_0 \\ \sum_{k=1}^{n_j} \rho_{jk} = 1 \quad (j=1,\cdots,N) \\ \rho_{jk}\geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,N;\ k=1,\cdots,n_j) \end{cases}$$

1.6 判断下列集合是否为凸集：

(a) $X=\{[x_1,x_2]\,|\,x_1x_2\geqslant 30, x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\}$

(b) $X=\{[x_1,x_2]\,|\,x_2-3\leqslant x_1^2, x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0\}$

(c) $X=\{[x_1,x_2]\,|\,x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$

1.7 在下列线性规划问题中，找出所有基解。指出哪些是基可行解并分别代入目标函数，比较找出最优解。

(a) $\max z=3x_1+5x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

(b) min $z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 5 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, 5) \end{cases}$$

1.8 已知线性规划问题：

max $z = x_1 + 3x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + x_3 = 5 & ① \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 & ② \\ x_2 + x_5 = 4 & ③ \\ x_1, \cdots, x_5 \geqslant 0 & ④ \end{cases}$$

表 1-2 中所列的解(a)～(f)均满足约束条件①②③，试指出表中哪些解是可行解，哪些是基解，哪些是基可行解。

表 1-2

序号	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
(a)	2	4	3	0	0
(b)	10	0	−5	0	4
(c)	3	0	2	7	4
(d)	1	4.5	4	0	−0.5
(e)	0	2	5	6	2
(f)	0	4	5	2	0

1.9 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并对照指出单纯形法迭代的每一步相当于图解法可行域中的哪一个顶点。

(a) max $z = 10x_1 + 5x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) max $z = 100x_1 + 200x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \leqslant 500 \\ x_1 \qquad\ \ \leqslant 200 \\ 2x_1 + 6x_2 \leqslant 1\ 200 \\ \ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.10 已知某线性规划问题的约束条件为

$$\text{st.}\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 - x_3 = 25 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 30 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 85 \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,\cdots,5) \end{cases}$$

判断下列各点是否为该线性规划问题可行域的凸集的顶点：

(a) $X=(5,15,0,20,0)$

(b) $X=(9,7,0,0,8)$

(c) $X=(15,5,10,0,0)$

1.11 已知下述线性规划问题具有无穷多最优解，试写出其最优解的一般表达式。

$\max\ z=10x_1+5x_2+5x_3$

$$\text{st.}\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 \leqslant 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + \ x_3 \leqslant 8 \\ \ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.12 线性规划问题：

$\min\ z=CX$

$$\begin{cases} AX = b \\ \ X \geqslant 0 \end{cases}$$

其可行域为 R，目标函数最优值为 z^*，若分别发生下列情形之一时，其新的可行域为 R'，新的目标函数最优值为 $(z^*)'$，试分别回答(a)(b)(c)三种情况下 R 与 R' 及 z^* 与 $(z^*)'$ 之间的关系：

(a) 增添一个新的约束条件；

(b) 减少一个原有的约束条件；

(c) 目标函数变为 $\min\ z=\dfrac{CX}{\lambda}$，同时约束条件变为 $AX=\lambda b,\ X\geqslant 0\ (\lambda>1)$。

1.13 在单纯形法迭代中，任何从基变量中替换出来的变量在紧接着的下一次迭代中会不会立即再进入基变量，为什么？

1.14 会不会发生在一次迭代中刚进入基变量的变量在紧接着的下一次迭代中立即被替换出来？什么情况下有这种可能，试举例说明。

1.15 已知线性规划问题：

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\text{st.}\begin{cases} 5x_2 \leqslant 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用图解法求解时，得其可行域顶点分别为 0，Q_1，Q_2，Q_3，Q_4（见图 1-1）。试问 c_1，c_2 如何变化时，目标函数值分别在上述各顶点实现最优。

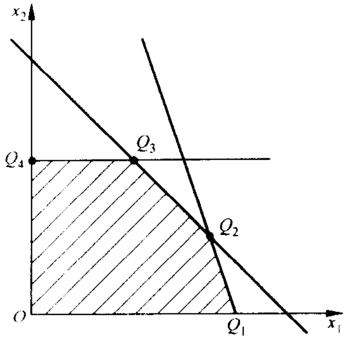


图 1-1

1.16 求解线性规划问题当某一变量 x_j 的取值无约束时，通常用 $x_j = x_j' - x_j''$ 来替换，其中 $x_j' \geqslant 0$，$x_j'' \geqslant 0$。试说明 x_j'、x_j'' 能否在基变量中同时出现，为什么？

1.17 下述线性规划问题中，分别求目标函数值 z 的上界 $\overline{z^*}$ 和下界 $\underline{z^*}$：

(a) $\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

式中：$1 \leqslant c_1 \leqslant 3$，$4 \leqslant c_2 \leqslant 6$；$8 \leqslant b_1 \leqslant 12$，$10 \leqslant b_2 \leqslant 14$；

$-1 \leqslant a_{11} \leqslant 3$，$2 \leqslant a_{12} \leqslant 5$；$2 \leqslant a_{21} \leqslant 4$，$4 \leqslant a_{22} \leqslant 6$

(b) $\max z = c_1 x_1 - c_2 x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} -a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \leqslant b_2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

式中：$2 \leqslant c_1 \leqslant 3$，$4 \leqslant c_2 \leqslant 6$；$8 \leqslant b_1 \leqslant 12$，$10 \leqslant b_2 \leqslant 15$；

$-1 \leqslant a_{11} \leqslant 1$，$2 \leqslant a_{12} \leqslant 4$；$2 \leqslant a_{21} \leqslant 5$，$4 \leqslant a_{22} \leqslant 6$

1.18 用单纯形法求解下列线性规划问题，并指出问题的解属于哪一类：

(a) $\max z = 3x_1 + 5x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1 \leqslant 4 \\ 2x_2 \leqslant 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(b) $\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$

$$\text{st.}\begin{cases}3x_1+x_2+x_3\leqslant 60\\ x_1-x_2+2x_3\leqslant 10\\ x_1+x_2-x_3\leqslant 20\\ x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(c) $\max z=6x_1+2x_2+10x_3+8x_4$

$$\text{st.}\begin{cases}5x_1+6x_2-4x_3-4x_4\leqslant 20\\ 3x_1-3x_2+2x_3+8x_4\leqslant 25\\ 4x_1-2x_2+x_3+3x_4\leqslant 10\\ x_{1\sim 4}\geqslant 0\end{cases}$$

(d) $\max z=x_1+6x_2+4x_3$

$$\text{st.}\begin{cases}-x_1+2x_2+2x_3\leqslant 13\\ 4x_1-4x_2+x_3\leqslant 20\\ x_1+2x_2+x_3\leqslant 17\\ x_1\geqslant 1,\ x_2\geqslant 2,\ x_3\geqslant 3\end{cases}$$

1.19 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划问题,并指出问题的解属于哪一类:

(a) $\max z=4x_1+5x_2+x_3$

$$\text{st.}\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3\geqslant 18\\ 2x_1+x_2\leqslant 4\\ x_1+x_2-x_3=5\\ x_j\geqslant 0\quad (j=1,2,3)\end{cases}$$

(b) $\max z=2x_1+x_2+x_3$

$$\text{st.}\begin{cases}4x_1+2x_2+2x_3\geqslant 4\\ 2x_1+4x_2\leqslant 20\\ 4x_1+8x_2+2x_3\leqslant 16\\ x_j\geqslant 0\quad (j=1,2,3)\end{cases}$$

(c) $\max z=x_1+x_2$

$$\text{st.}\begin{cases}8x_1+6x_2\geqslant 24\\ 4x_1+6x_2\geqslant -12\\ 2x_2\geqslant 4\\ x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(d) $\max z=x_1+2x_2+3x_3-x_4$

$$\text{st.}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=15\\ 2x_1+x_2+5x_3=20\\ x_1+2x_2+x_3+x_4=10\\ x_j\geqslant 0\quad (j=1,\cdots,4)\end{cases}$$

1.20 下表(表 1-3)为用单纯形法计算时某一步的表格。已知该线性规划的目标函数为 $\max z=5x_1+3x_2$,约束形式为$\leqslant$,x_3、x_4 为松弛变量,表中解代入目标函数后得 $z=10$。

表 1-3

		x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	2	c	0	1	1/5
x_1	a	d	e	0	1
c_j-z_j		b	-1	f	g

(a) 求 $a \sim g$ 的值；

(b) 表中给出的解是否为最优解。

1.21 表 1-4 中给出某线性规划问题计算过程中的一个单纯形表，目标函数为 $\max z = 28x_4 + x_5 + 2x_6$，约束条件为 $\leqslant$，表中 x_1，x_2，x_3 为松弛变量，表中解的目标函数值为 $z = 14$。

表 1-4

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_6	a	3	0	$-14/3$	0	1	1
x_2	5	6	d	2	0	5/2	0
x_4	0	0	e	f	1	0	0
$c_j - z_j$		b	c	0	0	-1	g

(a) 求 $a \sim g$ 的值；

(b) 表中给出的解是否为最优解。

1.22 表 1-5 为某求极大值线性规划问题的初始单纯形表及迭代后的表，x_4、x_5 为松弛变量，试求表中 $a \sim l$ 的值及各变量下标 $m \sim t$ 的值。

表 1-5

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_m	6	b	c	d	1	0
x_n	1	-1	3	e	0	1
$c_j - z_j$		a	1	-2	0	0
x_s	f	g	2	-1	1/2	0
x_t	4	h	i	1	1/2	1
$c_j - z_j$		0	7	j	k	l

1.23 求下述线性规划问题的解：

$$\max z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

$$\text{st.} \begin{cases} a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leqslant b \\ 0 \leqslant x_j \leqslant u_j \quad (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

假定模型中所有参数 c_j，a_j，$u_j (j = 1, \cdots, n)$ 均为正，且有

$$\frac{c_1}{a_1} \geqslant \frac{c_2}{a_2} \geqslant \cdots \geqslant \frac{c_n}{a_n}$$

1.24 线性规划问题 $\max z = CX$，$AX = b$，$X \geqslant 0$，如 X^* 是该问题的最优解，又 $\lambda > 0$ 为某一常数，分别讨论下列情况时最优解的变化。

(a) 目标函数变为 $\max z = \lambda CX$；

(b) 目标函数变为 $\max z=(C+\lambda)X$；

(c) 目标函数变为 $\max z=\frac{C}{\lambda}X$，约束条件变为 $AX=\lambda b$。

1.25 试将下述问题改写成线性规划问题：

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i1}x_i,\ \sum_{i=1}^{m}a_{i2}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^{m}a_{in}x_i\right)\right\}$$

$$\text{st.}\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_m=1\\ x_i\geqslant 0,\quad i=1,\cdots,m\end{cases}$$

1.26 讨论如何用单纯形法求解下述线性规划问题：

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j\ |x_j|$$

$$\text{st.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad(i=1,\cdots,m)\\ x_j\ \text{取值无约束}\end{cases}$$

1.27 线性回归是一种常用的数理统计方法，这个方法要求对图上的一系列点 $(x_1,y_1)(x_2,y_2)\cdots(x_n,y_n)$ 选配一条合适的直线拟合。方法通常是先定直线方程为 $y=a+bx$，然后按某种准则求定 a，b。通常这个准则为最小二乘法，但也可用其他准则。试根据以下准则建立这个问题的线性规划模型：

$$\min\sum_{i=1}^{n}|y_i-(a+bx_i)|$$

1.28 表 1-6 中给出某求极大化问题的单纯形表，问表中 a_1，a_2，c_1，c_2，d 为何值时以及表中变量属哪一种类型时有：

(a) 表中解为惟一最优解；

(b) 表中解为无穷多最优解之一；

(c) 表中解为退化的可行解；

(d) 下一步迭代将以 x_1 替换基变量 x_5；

(e) 该线性规划问题具有无界解；

(f) 该线性规划问题无可行解。

表 1-6

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	d	4	a_1	1	0	0
x_4	2	-1	-5	0	1	0
x_5	3	a_2	-3	0	0	1
c_j-z_j		c_1	c_2	0	0	0

1.29 试利用两阶段法第一阶段的求解，找出下述方程组的一个可行解，并利用计算得到的最终单纯形表说明该方程组有多余方程。

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.30 考虑线性规划问题：

$$\max z = \alpha x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$$

$$\text{st.} \begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_4 = 4 + 2\beta & (1) \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 5 + 7\beta & (2) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

模型中 α,β 为参数，要求：

(a) 组成两个新的约束 $(1)'=(1)+(2)$，$(2)'=(2)-2(1)$，根据 $(1)'$，$(2)'$ 以 x_1，x_2 为基变量列出初始单纯形表；

(b) 假定 $\beta=0$，则 α 为何值时，x_1，x_2 为问题的最优基；

(c) 假定 $\alpha=3$，则 β 为何值时，x_1，x_2 为问题的最优基。

1.31 线性规划问题 $\max z=CX$，$AX=b$，$X\geqslant 0$，设 X^0 为问题的最优解，若目标函数中用 C^* 代替 C 后，问题的最优解变为 X^*，求证：

$$(C^* - C)(X^* - X^0) \geqslant 0$$

1.32 某医院昼夜 24 h 各时段内需要的护士数量如下：2:00～6:00　10 人，6:00～10:00　15 人，10:00～14:00　25 人，14:00～18:00　20 人，18:00～22:00　18 人，22:00～2:00　12 人。护士分别于 2:00，6:00，10:00，14:00，18:00，22:00 分 6 批上班，并连续工作 8 h。试确定：

(a) 该医院至少应设多少名护士，才能满足值班需要；

(b) 若医院可聘用合同工护士，上班时间同正式工护士。若正式工护士报酬为 10 元/h，合同工护士为 15 元/h，问医院是否应聘合同工护士及聘多少名？

1.33 某人有一笔 30 万元的资金，在今后三年内有以下投资项目：

(1) 三年内的每年年初均可投资，每年获利为投资额的 20%，其本利可一起用于下一年投资；

(2) 只允许第一年年初投入，第二年末可收回，本利合计为投资额的 150%，但此类投资限额不超过 15 万元；

(3) 于三年内第二年初允许投资，可于第三年末收回，本利合计为投资额的 160%，这类投资限额 20 万元；

(4) 于三年内的第三年初允许投资，一年回收，可获利 40%，投资限额为 10 万元。

试为该人确定一个使第三年末本利和为最大的投资计划。