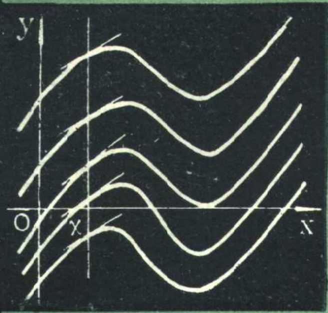

中学数学辅导丛书

不定积分

杨梅林　编

黑龙江科学技术出版社

不 定 积 分

Buding Jifen

杨 梅 林 编

黑龙江科学技术出版社

一九八四年·哈尔滨

责任编辑：张宪臣
封面设计：仁 之

不 定 积 分
杨 梅 林 编

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区分部街28号）
黑龙江新华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本 787×1092 毫米 1/32·印张 3.75·字数 75 千
1984年2月第一版·1984年2月第一次印刷
印数：1—45,000

书号：13217·104　　定价：0.48元

前　　言

根据《全日制重点中学数学教学大纲(草案)》规定，中学数学教材增加了行列式、矩阵、向量、集合、逻辑代数、概率和微积分等内容，为了帮助广大中学师生正确理解和掌握这些新内容，我们组织编写了这套《中学数学辅导丛书》。它包括行列式、矩阵和线性方程组、向量、集合、逻辑代数、极限与连续、复合函数的导数、导数的应用、不定积分、定积分的应用、随机变量等。

这套丛书密切结合现行全日制六年制重点中学数学课本，全面地介绍了课本中增加的新内容，并适当地做了拓宽和加深，以利于教学使用。

由于我们编写丛书的经验不足和水平有限，不妥之处在所难免。敬请读者提出宝贵意见。以便今后改进，使本丛书成为广大中学师生有益的参考书。

葛　棠　戴再平　韩殿发

一九八二年十月

目　　录

一、原函数与不定积分的概念

在微分学中，函数的导数是一个重要的基本概念。许多实际问题，都可以归结为求函数的导数。如已知物体运动的路程 $S=S(t)$，求物体运动的速度 $v=v(t)$，就是求 $S(t)$ 的导数，$v(t)=S'(t)$；已知导体通过的电量 $Q=Q(t)$，求导体的电流强度 $i=i(t)$，就是求 $Q(t)$ 的导数，$i(t)=Q'(t)$；已知曲线的方程 $y=y(x)$，求曲线上各点的切线的斜率 $k=k(x)$，就是求 $y(x)$ 的导数，$f(x)=y'(x)$，等等。实践中，还往往需要解决这类问题的相反问题，如已知物体运动的速度 $v=v(t)$，求物体运动的路程 $S=S(t)$；已知导体的电流强度 $i=i(t)$，求导体通过的电量 $Q=Q(t)$；已知曲线上各点的切线斜率 $k=k(x)$，求曲线的方程 $y=y(x)$，等等。这些"相反问题"，就是已知某函数的导数，求这个函数问题。下面介绍解决此类问题的一个重要的基本概念——原函数。

定义 如果函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 定义在同一区间 I 上，并且对区间 I 上的任何 x，都有

$$F'(x)=f(x),$$

那么，$F(x)$ 称为函数 $f(x)$ 的一个**原函数**。

定义表明，原函数和导数是相对的两个概念，即如果 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数，那么 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的原函数。反之，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，那么 $f(x)$ 就是 $F(x)$ 的导数。

求 $f(x)$的原函数，就是求导数等于 $f(x)$的函数。

例 1 求下列各函数的一个原函数：

(1) $2x$； (2) $\cos x$；

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$； (4) $\dfrac{1}{x}(x>0)$。

解 (1) $\because \quad (x^2)'=2x$

$\therefore \quad x^2$ 是 $2x$ 的一个原函数。

(2) $\because \quad (\sin x)'=\cos x$

$\therefore \quad \sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数。

(3) $\because \quad (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\therefore \quad \arcsin x$ 是$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的一个原函数。

(4) $\because \quad (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，$x>0$。

$\therefore \quad \ln x$ 是$\dfrac{1}{x}$的一个原函数。

验证一个函数 $G(x)$ 是否 $f(x)$ 的原函数，要看它的导数 $G'(x)$是否等于 $f(x)$。

例 2 下列断言是否正确？

(1) x^2+3 是 $2x$ 的一个原函数；

(2) $-\arccos x$ 是$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的一个原函数；

(3) $\ln 2x$ 是$\dfrac{1}{x}(x>0)$的一个原函数；

(4) $\sin 2x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数。

解 (1) 正确。$\because \quad (x^2+3)'=(x^2)'+3'=2x$

$\therefore\quad x^2+3$ 是 $2x$ 的一个原函数。

(2) 正确。$\because\quad (-\arccos x)'=-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\therefore\quad -\arccos x$ 是$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的一个原函数。

(3) 正确。$\because\quad (\ln 2x)'=\dfrac{1}{2x}\cdot 2=\dfrac{1}{x}(x>0)$

$\therefore\quad \ln 2x$ 是$\dfrac{1}{x}$的一个原函数。

(4) 不正确。$\because\quad (\sin 2x)'=2\cos 2x\neq\cos x$,

$\therefore\quad \sin 2x$ 不是 $\cos x$ 的原函数。

从上面二个例子看到，有些函数的原函数并不只是一个。如，x^2 和 x^2+3 都是 $2x$ 的原函数；$\arcsin x$ 和 $-\arccos x$ 都是$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的原函数；$\ln x$ 和 $\ln 2x$ 都是$\dfrac{1}{x}(x>0)$ 的原函数。那么，一个函数如果有原函数，是否原函数都不只一个呢？一个函数的不同原函数，除具有相同导数外，还有什么关系呢？下面两个定理给出了这个问题的回答。

定理1　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有一个原函数 $F(x)$，那么对于任意常数 C，函数

$$F(x)+C$$

也是 $f(x)$在区间 I 上的原函数。

证明　因为$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$

所以 $F(x)+C$ 也是函数 $f(x)$的原函数。

根据定理，由$\sin x$是$\cos x$的一个原函数，可知$\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}$、$\sin x+\frac{\pi}{2}$、$\sin x-5$等，都是$\cos x$的原函数。

定理 2 如果函数$f(x)$在区间I上有一个原函数$F(x)$，那么函数在区间I上的任何一个原函数都可以表示成

$$F(x)+C$$

的形式。其中C为任意常数。

证明 设$\Phi(x)$是$f(x)$在区间I上的任何一个原函数，则$\Phi'(x)=f(x)$

又$\because$ $F'(x)=f(x)$

$\therefore$ $[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$，

根据微分学中的定理"导数恒等于零的函数必为常数"。

故 $\Phi(x)-F(x)=C$ (C为常数)，

即 $\Phi(x)=F(x)+C$，

这就是说，函数$f(x)$的任何一个原函数都可以表示成$F(x)+C$的形式。

如，$\ln 2x$和$\ln x$都是$\frac{1}{x}(x>0)$的原函数，所以$\ln 2x$可以表示成$\ln x+C$的形式。事实上，根据对数运算法则

$$\ln 2x=\ln x+\ln 2$$

这里$C=\ln 2$。

又如，$\arcsin x$和$-\arcsin x$都是$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$的原函数，所以$-\arccos x$可以表示成$\arcsin x+C$的形式。事实上，由三角学可知

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

于是

$$-\arccos x = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$$

这里 $C = -\frac{\pi}{2}$

上述两个定理告诉我们：函数族 $F(x)+C$中的每一个函数，都是 $f(x)$ 的原函数（定理 1）；$f(x)$ 的任何一个原函数，都包含在函数族 $F(x)+C$ 中(定理 2)。因此，$F(x)+C$（C 是任意常数）表示 $f(x)$所有的原函数。

定义 设$F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则函数 $f(x)$的所有的原函数 $F(x)+C$(C 是任意常数）称为函数 $f(x)$ 的**不定积分**。记作$\int f(x)dx$，即

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 $\int$ 叫**积分号**，$f(x)$叫**被积函数**，x 叫**积分变量**，$f(x)dx$ 叫**被积式**，C **叫积分常数**。

等式$\int f(x)dx = F(x)+C$与 $F'(x)=f(x)$是等价的，是 $F(x)$与 $f(x)$ 之间同一关系的两种表达形式。事实上，等式 $\int f(x)dx = F(x)+C$表明 $F(x)$是$f(x)$的一个原函数，根据原函数定义，所以 $F'(x)=f(x)$；反之，$F'(x)=f(x)$ 表明 $F(x)$是$f(x)$的一个原函数，根据不定积分定义，所以

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

可以利用上述事实，求不定积分

$$\int f(x)dx.$$

例3 求下列不定积分：

(1) $\int \sin x dx$;　　(2) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$;

(3) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

解 (1) ∵ $(-\cos x)' = -(-\sin x) = \sin x$

于是

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

(2) ∵ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

于是

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

(3) ∵ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

于是

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

由不定积分定义，可以推出下面两个性质：

1° $\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x)$

根据不定积分定义，$\int f(x) dx$ 是被积函数 $f(x)$的原函数，所以 $f(x)$ 是$\int f(x) dx$ 的导数，即

$$\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x)$$

2° $\int F'(x) dx = F(x) + C$

因为 $F'(x)$是 $F(x)$的导数，则 $F(x)$是 $F'(x)$ 的一个原函数，所以 $F'(x)$的不定积分等于 $F(x)+C$。即

$$\int F'(x)dx = F(x)+C$$

由性质1°、2°看出，求导数与求不定积分互为逆运算。

例 4 验证下面等式：

(1) $\left(\int \frac{1}{\cos^2 x}dx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$；

(2) $\int (\operatorname{tg}x)'dx = \operatorname{tg}x + C$。

解 (1) $\because \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg}x + C$

$\therefore \left(\int \frac{1}{\cos^2 x}dx\right)' = (\operatorname{tg}x + C)' = (\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

即

$$\left(\int \frac{1}{\cos^2 x}dx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(2) $\because (\operatorname{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\therefore \int (\operatorname{tg}x)'dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg}x + C$

即

$$\int (\operatorname{tg}x)'dx = \operatorname{tg}x + C$$

不定积分 $\int f(x)dx = F(x)+C$ 是一个函数族，含有无穷多个函数。因此，不定积分的图象是一个曲线族，含有无穷多条曲线。这个曲线族有如下两个特点：

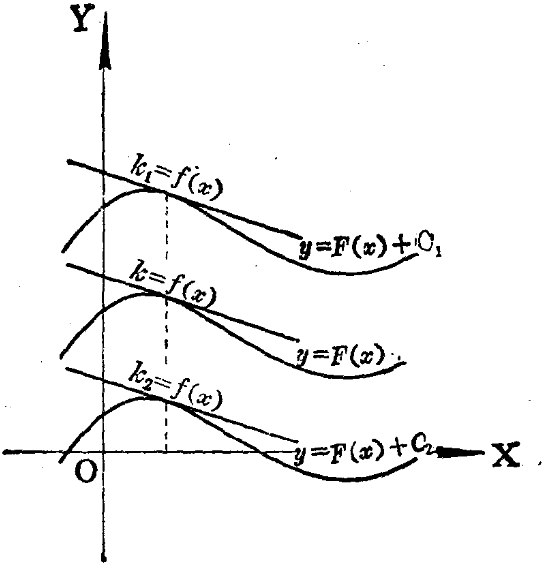

图 1-1

1）曲线 $y=F(x)$ 沿 y 轴平行移动时，可以和曲线族中的任何一条曲线相重合；能和曲线 $y=F(x)$ 相重合的曲线都在曲线族中。

2）曲线族中各曲线上横坐标 x 相同的点的切线互相平行，斜率等于 $f(x)$ 在 x 点的函数值。

函数 $f(x)$ 的每一个原函数的图象，都叫 $f(x)$ 的一条**积分曲线**，而 $f(x)$ 的不定积分的图象叫 $f(x)$ 的**积分曲线族**。积分曲线族的方程是 $y=F(x)+C$，其中 C 是任意常数；每给 C 一个值，就得到一条积分曲线的方程。

具体问题中，有时需要求出具有某种特性的原函数，怎样用不定积分来解决呢？从下例可以初步看到解决的方法

例 5　一条曲线过点($\sqrt{3}$，2)，且在每一点 $P(x、y)$ 的切线的斜率为 $2x$，求这曲线的方程。

解　设适合条件的曲线方程为

$$y = y(x)$$

据题意，有

$$y'(x) = 2x$$

于是 $2x$ 的不定积分

$$y = \int 2x dx = x^2 + C \tag{1}$$

因曲线过点($\sqrt{3}$，2)．则 $x = \sqrt{3}$ 时，$y = 2$，代入(1)式有

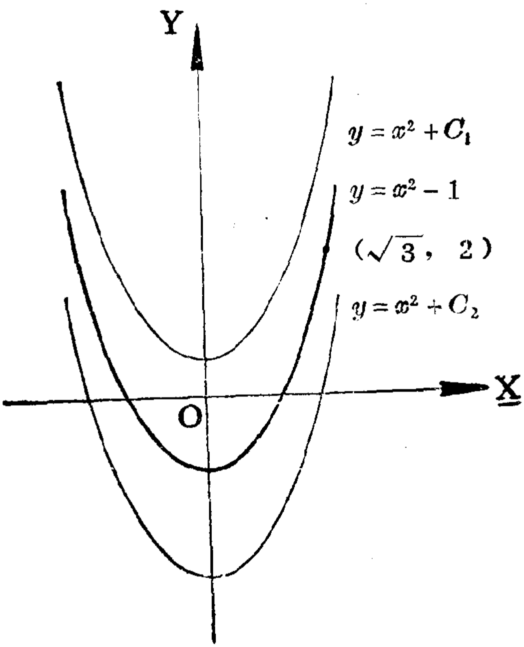

图 1-2

$$2=(\sqrt{3})^2+C,\quad C=-1$$

因此所求方程是 $y=x^2-1$。

可见，求具有某种特性的原函数，先利用题中一部分条件求出不定积分（所有的原函数），再利用另一部分条件（限制条件）决定积分常数 C 的值，便得出所要求的原函数。

前面对函数的不定积分或原函数的讨论，都是在函数有原函数这一条件下进行的。那么，什么样的函数有原函数呢？这个问题的完满解答已超出本书所讨论的范围，这里就不做讨论了，我们仅指出如下的事实：连续函数一定有原函数。根据这一结论可知，初等函数在它有定义的区间上一定有原函数。

练 习 一

1. 填括号：

(1) $(\quad)'=a$;　　(2) $(\quad)'=\frac{1}{x^2}$;

(3) $(\quad)'=\sin x$;　　(4) $(\quad)'=e^x$;

(5) $(\quad)'=\frac{1}{\cos^2 x}$　　(6) $(\quad)'=\frac{1}{1+x^2}$

2. 求下列各不定积分：

(1) $\int 4x^3dx$;　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(3) $\int \cos x dx$;　　(4) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$。

3. 已知一条曲线上点 $P(x,y)$ 的切线的斜率为 $\cos x$，且过点$\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$，求这条曲线的方程，并画出图象。

4. 某物体从距离原点 2 米处开始作直线运动，已知速度 $v=2t$，求时间为 t 时，物体和原点间的距离 s。

二、基本积分表和简单运算法则

在掌握原函数与不定积分概念之后，现在来讨论求不定积分的一般方法.

我们知道，每一个微分式 $F'(x)=f(x)$，都对应一个等价的积分式 $\int f(x)dx=F(x)+C$. 我们曾经用这一关系求过不定积分，比如求不定积分

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$$

就是根据 $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$，得出

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\mathrm{tg}x+C$$

对于这样简单情形，这样做是可行的，也是合适的；$(\mathrm{tg}x')=\frac{1}{\cos^2 x}$ 这一微分式可能在我们记忆之中，既或没有记忆，也可由微分基本公式表中查得. 但若将这种求不定积分方法作为一种普遍方法，就会有很大困难. 比如，某个函数 $f(x)$，它的原函数是 $F(x)$，那么它就可以看作是由函数 $F(x)$ 求导得来的，但想出或查到相应的微分式

$$F'(x)=f(x)$$

并不是总能办到的. 其实，要想对大量这样的 $f(x)$，都能想