线性代数
概率论与数理统计

——一题多解100例

孙福伟 许晓革 王琳静 编著

航空工业出版社

线性代数、概率论与数理统计

——一题多解 100 例

孙福伟　许晓革　王琳静　编著

航空工业出版社

内 容 提 要

"发散性思维"是一种开放式的立体思维,即围绕某一问题,沿着不同方向去思考、探索,获得解决问题的多种方案,所用方法丰富多彩。它是一种重要的创造性思维。在数学中"一题多解"就是一种典型的"发散思维",它能具体地、有效地开发学生的创造灵感,培养学生的创新能力,提高学生的综合素质。

本书例题一部分是作者从十几年的教学积累中精心总结的例题;一部分是从近十年来研究生入学数学考试试题和其他书籍、文献中精心挑选出来的,每一题目给出两种或两种以上不同的解法。这些解法所用到的概念、理论、方法覆盖了《线性代数》与《概率论与数理统计》中的主要内容,其中《线性代数》75 例、《概率论与数理统计》45 例。它既可以作为《线性代数》与《概率论与数理统计》的教学参考书,也可以作为报考硕士研究生的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数、概率论与数理统计:一题多解 100 例/孙福伟等编著.—北京:航空工业出版社,2002.9
ISBN 7-80134-990-3

Ⅰ.线… Ⅱ.孙… Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-解题②概率论-研究生-入学考试-解题③数理统计-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 028830 号

航空工业出版社出版发行
(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

北京地质印刷厂印刷 全国各地新华书店经售
2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月第 1 次印刷
开本:850×1168 1/32 印张:8.75 字数:225 千字
印数:1—3500 定价:12.00 元

序

为了在数学教育中更积极、有效地培养、训练学生的创新能力，应该努力培养、训练学生的“发散思维”。所谓具有发散特性的思维，是指信息处理的途径灵活多变，所求结果丰富多样，它是一种开放性的立体思维，即围绕某一问题从不同的方向、不同的侧面、不同的层次去思考、探索，重组眼前的信息和记忆中的信息，获得解决问题的多种方案，是一种重要的创造性思维。

在数学中“一题多解”就是一种典型的“发散思维”，它能激发学生的潜能，开发学生的脑力。发散思维是许多数学家非常重视的一种思维形式。例如著名数学家高斯(Gauss)，他在数论、复变函数、椭圆函数、非欧几何、统计数学、天文学、物理学……等领域都做出了卓越贡献，被誉为“能从九霄云外的高度按某种观点掌握星空与深奥数学的天才”和“数学王子”。从数学史上可以发现，高斯非常青睐“发散思维”，并善于运用“发散思维”，他非常重视数学中的“一题多解”。例如：他对“代数基本定理”先后给出了四种不同的证明；对数论中的“二次互反律”先后给出了八种不同的证明。有人曾问高斯：“你为什么能对数学做出那么多的发现?”高斯说：“假如别人和我一样深刻和持久地思考数学真理，他也会做出同样的发现。”高斯还说：“绝对不能以为获得一个证明之后，研究便结束，或把另外的证明当做多余的奢侈品。”“有时候一开始你没有得到最简和最美妙的证明，但恰恰在寻求这样的证明中才能深入到真理的奇妙联想中去。这正是吸引我去研究的主动力，并且最能使我有所发现。”高斯这些言行，很值得我们学习。

为了在《线性代数》和《概率论与数理统计》这两门数学课程的教学中更有效、具体地培养、训练学生的“发散思维”，作者编写了这本《线性代数、概率论与数理统计一题多解100例》。本书对《线性代数》及《概率论与数理统计》中的一些基本概念、理论、方法进行了简要归纳、总结；在此基础上选编了120个题目，每个题目至少给出了两种不同的解法，有不少题目给出了三种或三种以上的不同解法。通过这些解法，不但可以启发学生综合运用所学知识去分析问题、解决问题；更重要的是可以培养、训练学生的“发散思维”，增强学生思维的灵活性、开拓性。

李心灿

2002年夏于北京航空航天大学

编者的话

“发散性思维”是一种开放性的立体思维，即围绕某一问题，沿着不同方向去思考、探索，获得解决问题的多种方案，所用方法丰富多彩。它是一种重要的创造性思维。在数学中“一题多解”就是一种典型的“发散思维”，它能具体地、有效地开发学生的创造灵感，培养学生的创新能力，提高学生的综合素质。

我们写这本书的目的是为了在“线性代数”和“概率论与数理统计”这两门数学课程的教学中，通过“一题多解”，更有意识地培养和训练学生的发散思维能力和创新能力。

本书共120例。其中一部分是作者从近十几年的教学积累中精心总结的，它蕴涵着作者长期的教学研究和创新探讨的成果；一部分是作者从近十年研究生入学数学考试试题和其他书籍、文献中精心挑选出来的，并在此基础上进一步研究得到的多种解答。每一题目给出两种或两种以上不同的解法。这些解法所用到的概念、理论、方法覆盖了《线性代数》和《概率论与数理统计》中的主要内容，其中“线形代数”一题多解75例，主要由孙福伟和许晓革编写，“概率论与数理统计”一题多解45例，主要由王琳静编写。本书既可以作为《线性代数》与《概率论与数理统计》的教学参考书，也可以作为报考硕士研究生的参考资料。

本书承蒙北京航空航天大学李心灿教授给予热情的指导，并由他为本书作序，特此感谢。

另外，感谢本书参考文献的作者为本书提供的帮助，感谢航空工业出版社的大力支持。

由于我们水平有限,书中难免存在缺点和不妥之处,敬请读者批评指正。

编者

2002年8月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　概率论与数理统计

第一篇　线性代数

第一章　线性代数内容摘要

一、行列式

1. 定义

n 阶行列式是一个数，表示 n！项的代数和，其定义是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 的一个全排列，t 是此排列的逆序数，和号是对所有排列求和，故它是 n！项的代数和.

2. 性质及有关公式

(1)行列式的行与列互换，行列式的值不变.

(2)对换行列式的任意两行(列)，行列式变号.

(3)行列式中某行(列)的公因子可提到行列式的外面，或若以一个数乘行列式等于用该数乘此行列式的任意一行(列).

(4)若行列式中有一行(列)的元素全为 0，或有两行(列)对应元素成比例，则此行列式等于 0.

(5)若行列式的第 i 行(列)的元素都是两个数之和，则此行列

式等于两个行列式之和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a'_{i_1} & \cdots & \cdots & a_{i_2}+a'_{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i_2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6)把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变.

定义 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，划去 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后余下来的 $n-1$ 阶矩阵的行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为 a_{ij} 的代数余子式.

定理 行列式等于它的任一行(列)的各元素与它们对应的代数余子式乘积之和，即

$$|A| = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$|A| = a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

定理 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \qquad (i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \qquad (i\neq j)$$

3. 克莱姆(Cramer)法则

定理(1) 设 $n\times n$ 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当系数矩阵行列式 $|A| \neq 0$ 时有惟一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} \\ x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \dfrac{|A_n|}{|A|} \end{cases}$$

这里 $|A_j|$ 是把行列式 $|A|$ 的第 j 列元素换以线性方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 而得到的 n 阶行列式.

(2) $n \times n$ 的齐次线性方程组有非零解的充要条件

对于 $n \times n$ 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

由克莱姆法则可知:若它的系数行列式 $|A| \neq 0$,则它只有惟一的零解,即 $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$.

$n \times n$ 齐次线性方程组有非零解的充要条件:

定理 $n \times n$ 齐次线性方程组有非零解的充要条件是方程组的系数行列式等于零.

这是针对含 n 个未知量、n 个方程的线性方程组的法则.

二、矩阵及其运算

1. 矩阵的概念

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵.

2. 矩阵的运算

(1)加法

$m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 之和 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ 仍是 $m\times n$ 矩阵,矩阵的加法满足交换律、结合律等.

(2)数与矩阵的乘法

λ 为数域 K 的任一数,$A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵,则 $\lambda A=(\lambda a_{ij})$ 仍是 $m\times n$ 矩阵,数与矩阵的乘法满足结合律及对加法的分配律等.

以上两种运算合称为矩阵的线性运算.

(3)矩阵与矩阵的乘法

设 $m\times s$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{is} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}$$

与 $s\times n$ 矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{sj} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

则 $AB=(c_{ij})_{m\times n}$,其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$

矩阵与矩阵乘法满足结合律,但交换律不成立,即一般 $AB\neq BA$.

(4)将矩阵的行换成同序数的列得到一个新矩阵,称为转置矩阵,记为 A' 或 A^T.矩阵的转置满足以下的关系:

$$(A+B)'=A'+B'$$
$$(AB)'=B'A'$$

定义 设 A 为 n 阶矩阵,若 $A'=A$,则称 A 为对称矩阵.若 $A'=-A$,则称 A 为反对称矩阵.

(5)方阵的行列式

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵,则 A 的行列式为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n 阶方阵 A 的行列式运算规律为:

① $|A'|=|A|$;

② $|kA|=k^n|A|$;

③ 设 A、B 都是 n 阶方阵,则 $|AB|=|A||B|$.

3. 逆矩阵

n 阶矩阵 A 称为可逆的,是指:如果存在 n 阶矩阵 B,使得

$$AB=BA=E$$

其中 E 是 n 阶单位矩阵.可逆矩阵 A 的逆矩阵是惟一的,记作 A^{-1}

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

(1)矩阵可逆的充要条件

定理　n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$，而且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵，A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

推论　若 $AB = E$(或 $BA = E$)，则 A、B 互逆.

(2)可逆矩阵的运算规律

①$(A^{-1})^{-1} = A$;

②$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$，其中数 $k \neq 0$;

③$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

④$(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

⑤$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

4. 矩阵的初等变换

初等行变换:

(1)对换矩阵的两行;

(2)以非零常数 k 乘矩阵的一行的所有元素;

(3)把矩阵某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去.

在以上三种变换中把行变成列，就得到初等列变换，初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换，利用矩阵的初等变换可

求矩阵的逆和秩;

$$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots A^{-1})$$

或
$$\begin{pmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

利用初等变换将矩阵 $A_{m\times n}$ 化为阶梯形:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{21} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & c_{rr} & \cdots & c_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & \cdots\cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,r$,则 $R(A) = r$.

如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B,则称矩阵 A 与 B 是等价的,等价矩阵的秩相等.

5. 矩阵的分块

定义 用若干条横线和纵线把一个矩阵分成许多小块,每个小块都是一个小矩阵,我们称为子块,于是一个矩阵可看成由一些小矩阵组成,这种以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

分块矩阵的运算规则

(1)分块矩阵的加法

设 $A = (a_{ij})_{m\times n}, B = (b_{ij})_{m\times n}$,采用同样的分块方法得

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中,A_{ij} 与 B_{ij} 的行数与列数都相同,则

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2r}+B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1}+B_{s1} & A_{s2}+B_{s2} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$

(2)数与分块矩阵的乘法

设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{sr} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, k \text{ 为数}$$

则

$$kA=\begin{pmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1r} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kA_{s1} & kA_{s2} & \cdots & kA_{sr} \end{pmatrix}$$

(3)分块矩阵的乘法

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times p}$ 和 $B=(b_{ij})_{p\times n}$ 分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}(i=1,2,\cdots,s)$ 的列数分别与 $B_{1j},\cdots,B_{tj}(j=1,2,\cdots,r)$ 的行数相同,则

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{it}B_{tj}$

$$=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,s,j=1,2,\cdots,r)$$

(4)分块矩阵的转置

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr}\end{pmatrix}$$

则

$$A'=\begin{pmatrix}A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{s1}\\ A'_{12} & A_{22} & \cdots & A'_{s2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A'_{1r} & A'_{2r} & \cdots & A'_{sr}\end{pmatrix}$$

(5)分块矩阵求逆

设矩阵 D 分块如下

$$D=\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$$

其中 A 与 B 分别为 r 阶与 k 阶可逆矩阵,则

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}$$

(6) 分块对角阵

在 n 阶方阵 A 的分块矩阵中,若除主对角上有非零的小方阵外,其余为零矩阵,即

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & O & \cdots & O\\ O & A_2 & \cdots & O\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ O & O & \cdots & A_s\end{pmatrix}$$