21世纪高等院校选用教材(非数学专业)

高等数学系列教材

# 应用概率统计

(第二版)

湖南大学数学与计量经济学院　组编

邓远北　周润兰　主编

科学出版社

2001

## 内　容　简　介

本书是《高等数学系列教材》的第四册，其内容包括随机变量与随机向量、统计估值、假设检验、回归分析与方差分析、正交试验等．各节后面配有适量习题，书末附有习题答案．

本书的特点是重基础、重应用，体现了当今工科数学教学的趋势．本书结构严谨、内容精练、条理清楚、重点突出、例题较多．

本书可作为各类高等院校工科数学课程的教材，也可作为工程技术及管理人员的自学用书或参考书．

**图书在版编目（CIP）数据**

应用概率统计/邓远北，周润兰主编．—2版．—北京：科学出版社，2001．

（高等院校选用教材（非数学专业））

ISBN 7-03-009667-3

Ⅰ．应…　Ⅱ．①邓…②周…　Ⅲ．①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ．021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 051088 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

1999 年 8 月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2001 年 9 月第　二　版　印张：16 3/4
2001 年 9 月第三次印刷　字数：295 000
印数：9 001—16 000

**定　价：23.00 元**

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

# 前　　言

我国国民经济和科学技术在21世纪的更大发展已成必然之势，培养各类高等专门人才的我国大学教育的改革也势在必行．作为大学教育中重要一环的大学数学教育的改革应如何革故鼎新，以适应新的形势，这是广大数学教育工作者面临的重大课题．近年来，我校十分注重这方面的工作，组织了一大批教学经验丰富、又具创新精神的教师进行教学和教材的改革研究．

高等数学是高等院校众多专业学生必修的重要基础理论课，它的设置是为培养各类高等专业人才服务的，因此我们编写的这套高等数学系列教材，在传授知识的同时，注意到通过各环节逐步培养学生具有抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，还特别注意培养学生具有比较熟练的运算能力和综合运用所学知识去分析问题和解决问题的能力．

这套系列教材由《一元分析基础》、《线性代数与解析几何》、《多元分析基础》、《应用概率统计》和《数学实验》五册组成，它们在结构体系和内容选取方面，不同于以往的众多同类教材，它是按照培养跨世纪人才数学素质的要求编写的，渗透了不少现代数学的观点和内容，以开阔学生的眼界，启迪他们的思维．这套教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见．

这套系列教材由刘楚中任总主编，周叔子任总主审．《应用概率统计》(第二版)是在科学出版社于1999年8月出版的由周润兰、喻胜华主编，王仙桃、戴斌祥、万中、邓爱珍、许和连和罗汉参编的《应用概率统计》的基础上，经过两年的教学实践，广泛征求意见后重新修改而成的，其中部分章节进行了重新编写．此次修改编写，由邓远北、周润兰任主编．参加编写的人员有彭国强、万中、邓爱珍和罗汉．本教材中带 * 号的内容，可根据授课学时和教学对象进行取舍．

这套系列教材在编写过程中得到了湖南大学教务处的大力支持，在此表示衷心感谢．

湖南大学数学与计量统计学院组编

2001年6月

# 目　　录

# 第一章 随机变量

## 第一节 随机事件和样本空间

### 一、必然现象与随机现象

在客观世界中人们所观察到的现象可分为两类:一类现象在一定条件下必然发生,如水往低处流,太阳每天从东方升起等,这类现象是可事前预言的,其结果是确定的,我们称它为确定性现象或必然现象;另一类现象是在一定条件下可能发生也可能不发生的,如抛掷一枚质地均匀的对称硬币,结果是正面朝上还是反面朝上,某工厂每天生产的废品数等,这类现象在观察之前是无法预知它的准确结果的,我们称它为随机现象. 在大量重复观察时,随机现象所出现的结果却呈现某种规律,即统计规律. 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学科学.

### 二、随机试验和样本空间

我们把观察某种现象和各种科学试验统称为试验. 一个试验如果满足下列条件:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果是明确可知道的,并且不止 1 个;

(3) 每次试验只出现可能结果中的 1 个,但试验前不能断定哪个结果会出现. 称这样的试验是一个随机试验.

随机试验的每一个可能结果称为基本事件,也称为样本点,常用 $w$ 表示,全体基本事件组成的集合称为样本空间,常用字母 $\Omega$ 表示.

**例 1** 1 个袋子中装有 8 个大小相同的球,其中白球 5 个,红球 3 个,搅匀后从中任意摸取 1 个球,设 $w_1=\{$取得白球$\}$,$w_2=\{$取得红球$\}$,则 $\Omega=\{w_1, w_2\}$.

**例 2** 掷一枚骰子,观察出现的点数,设 $w_1=\{1$ 点$\}$,$w_2=\{2$ 点$\}$,$w_3=\{3$ 点$\}$,$w_4=\{4$ 点$\}$,$w_5=\{5$ 点$\}$,$w_6=\{6$ 点$\}$,则 $\Omega=\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$.

### 三、随 机 事 件

在随机试验中可能出现也可能不出现的事件称为随机事件,通常用大写

的字母 $A,B,C,\cdots$表示. 对于一个随机试验,它的每一个基本事件都是一个随机事件,如例 2 中"出现 4 点"这个基本事件是随机事件,而 $A=$"出现奇数点"也是随机事件,它是由基本事件"出现 1 点","出现 3 点","出现 5 点",所组成. 我们也称由基本事件构成的事件为复杂事件. 无论是基本事件还是复杂事件,都称之为随机事件,简称事件.

我们把每次试验都一定出现的事件称为必然事件,用 $\Omega$ 表示,把每次试验都必不会出现的事件称为不可能事件,记为$\varnothing$.

## 四、事件的关系及运算

1. 事件的包含与相等

如果事件 $A$ 出现必然导致事件 $B$ 出现,即 $w\in A\Rightarrow w\in B$,则称事件 $B$ 包含事件 $A$,或称 $A$ 是 $B$ 的子事件,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

对任意事件 $A$,约定$\varnothing\subset A$.

如果事件 $A$ 包含事件 $B$,同时事件 $B$ 也包含事件 $A$,即 $A\subset B$,$B\subset A$ 同时成立,则称事件 $A$ 与 $B$ 相等,记为 $A=B$.

2. 事件的和(并)

事件 $A$ 与 $B$ 中至少有一个发生而构成的事件称为事件 $A$ 与 $B$ 的和(并),记为 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{w\mid w\in A$ 或 $w\in B\}$. 若有 $n$ 个事件:$A_1,A_2,\cdots,A_n$,则"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"这样的事件称作 $A_1,A_2,\cdots,A_n$的和(并),记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$中至少有一个出现"称为可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的和(并),记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$,或$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 事件的积(交)

由事件 $A$ 与 $B$ 同时发生而构成的事件称为$A$ 与 $B$ 的积(交),记为 $A\cap B$ 或 $AB$,即 $A\cap B=\{w\mid w\in A$ 且 $w\in B\}$.

"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这样的事件称作 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交,记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$ 或$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$. 事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$同时出现"称为可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$的积,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$,或 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$,或$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. 互不相容事件,对立事件

若事件 $A$ 与 $B$ 不能同时发生,或者说 $AB$ 是一个不可能事件,即 $AB=\varnothing$,则称事件 $A$ 与 $B$ 互不相容.

如果事件 $A,B$ 满足 $A\cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，则称 $B$ 为 $A$ 的对立事件，记为 $B=\overline{A}$.

5．事件的差

事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生的事件称为事件 $A$ 与 $B$ 的差，记为 $A-B$，即 $A-B=\{w\mid w\in A$ 且 $w\overline{\in}B\}$.

6．事件的运算规则

(i) 交换律. $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$.

(ii) 结合律. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$.

(iii) 分配律. $(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(iv) 对偶原则 (De Morgan 定理).

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

**例 3**　设 $A,B,C$ 为 3 个事件，用 $A,B,C$ 的运算关系表示下列各事件：

(i) $A$ 与 $B$ 都发生，而 $C$ 不发生；

(ii) 恰有一个事件发生；

(iii) 至少有一个事件发生；

(iv) 恰有两个事件发生；

(v) 至少有两个事件发生.

**解**　(i) $AB\overline{C}$;

(ii) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(iii) $A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$;

(iv) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$;

(v) $AB\cup AC\cup BC$ 或 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

## 五、事　件　域

如果把样本空间 $\Omega$ 的子事件 $A$ 的全体归在一起，则得到一个类，记为 $\mathscr{F}$，称作事件域，即 $\mathscr{F}=\{A\mid A\subset\Omega,A$ 是事件$\}$.

事件域满足

(i) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(ii) 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(iii) 若 $A_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots,n$ 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$.

### 习题 1-1

1．有甲、乙、丙 3 只盒子，红，白，黑 3 个球分别装入这 3 只盒子，使每只盒子装 1 个

球,观察装球情况,写出这个试验的样本空间 $\Omega$.

2. 同时掷两枚骰子,记录两枚骰子点数之和,

(1) 求样本空间 $\Omega$,

(2) 设事件 $A$ 表示"点数之和为偶数",事件 $B$ 表示"点数之和大于 7",事件 $C$ 表示"点数之和为小于 5 的偶数",试用样本空间 $\Omega$ 的子事件表示下列事件:

$\overline{B},\overline{C},A\cup B,A-B,A\overline{B},A\cup\overline{B}\cup\overline{C},ABC$.

3. 设 $A,B,C$ 是 3 个事件,试用 $A,B,C$ 的运算关系表示下列事件:

(1) $A$ 出现而 $B$ 与 $C$ 不出现;

(2) $A,B,C$ 中恰有一个不出现;

(3) $A$ 与 $B$ 都出现而 $C$ 不出现;

(4) $A,B,C$ 中至少有两个不出现.

## 第二节 随机事件的概率

随机事件在每次试验中可能出现也可能不出现,但在相同条件下的大量重复试验中,人们发现它具有一定的规律性. 我们把刻画事件发生可能性大小的数量指标叫做事件的概率,事件 $A$ 的概率以 $P(A)$ 表示,规定 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

### 一、古典概型

先讨论一类最简单的随机试验,它具有如下两个特征:

(i) 样本空间的元素(即基本事件)只有有限个,不妨设为 $n$ 个,记为 $w_1$, $w_2$, …, $w_n$,样本空间 $\Omega=\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$.

(ii) 每个基本事件出现的可能性是相等的,即 $P(w_1)=P(w_2)=\cdots=P(w_n)$.

具有这两个特征的试验称为古典型试验,这种等可能的数学模型称为古典概型.

如向上抛一枚硬币,观察出现正反面的试验中,试验结果只有两个,出现正面和出现反面,由于硬币质地均匀,形状对称,出现正面和出现反面的可能性相同,故这个试验属于古典概型.

对古典概型,事件 $A$ 的概率定义如下:

**定义 1** 设有古典概型 $E$,它的样本空间 $\Omega$ 包含 $n$ 个基本事件,对任意事件 $A$,若 $A$ 包含 $k$ 个基本事件,对事件 $A$ 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 中所含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}. \tag{1}$$

从定义可以得到下面的性质：

(i) 非负性. 对任一事件 $A$ 有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(ii) 规范性. 对必然事件 $\Omega$ 有 $P(\Omega)=1$；

(iii) 有限可加性. 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m (m\leqslant n)$ 两两互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i). \tag{2}$$

**证** (i) 因为任一事件 $A$ 所含的基本事件数 $k$ 总满足 $0\leqslant k\leqslant n$，则有 $0\leqslant \frac{k}{n}\leqslant 1$. 即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(ii) 由于必然事件由全部 $n$ 个基本事件所组成，即必然事件 $\Omega$ 所包含的基本事件数为 $n$，则 $P(\Omega)=\frac{n}{n}=1$.

(iii) 设 $A_i=\{w_1^{(i)}, \cdots, w_{k_i}^{(i)}\}$ 是由 $k_i(\leqslant n)$ 个不同的基本事件所组成，则 $P(A_i)=\frac{k_i}{n}$. 由于 $A_i$ 互不相容，则 $\bigcup_{i=1}^{m} A_i=\{w_1^{(1)}, \cdots, w_{k_1}^{(1)}, \cdots, w_1^{(m)}, \cdots, w_{k_m}^{(m)}\}$ 包含 $\sum_{i=1}^{m} k_i$ 个不同的基本事件，故

$$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} k_i=\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{n}=\sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

**例 4** 设有一批产品共 100 件，其中 5 件次品，现从中任取 50 件，问：无次品的概率是多少？

**解** 首先从 100 件产品中任取 50 件，则有 $C_{100}^{50}$ 个不同的结果，每一个结果就是一个事件，设 $A$ = "任取 50 件其中无次品"，必须是从那 95 件正品中取来的，可见这种无次品的取法共有 $C_{95}^{50}$ 种(即事件 $A$ 包含 $C_{95}^{50}$ 个基本事件)，则

$$P(A)=C_{95}^{50}\Big/C_{100}^{50}=\frac{95!\Big/(50!45!)}{100!\Big/(50!50!)}=\frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{100.99\cdot 98\cdot 97\cdot 96}$$

$$=\frac{1081}{38412}=2.8\%.$$

**例 5** 一袋中有 $n$ 个球，其中 $n_1$ 个带有号码"1"，$n_2$ 个带有号码"2"，…，$n_k$ 个带有号码"$k$"，$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，从此袋中任取 $m$ 个球，求恰有 $m_i$ 个带有号码"$i$"$(i=1, 2, \cdots, k)$的概率，其中 $m_1+m_2+\cdots+m_k=m$.

**解** $n$ 个球中任取 $m$ 个球，基本事件总数 $=C_n^m$，设 $A$ = "恰有 $m_i$ 个带有

号码‘$i$’($i=1, 2, \cdots, k$)”,则 $A$ 所含的基本事件数 $=C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\cdots C_{n_k}^{m_k}$,则得

$$P(A)=\frac{C_{n_1}^{m_1}C_{n_2}^{m_2}\cdots C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}. \tag{3}$$

我们把(3)式所确定的概率称为超几何概率.

## 二、几何概率

对于随机现象的可能结果并非都是有穷的,还必须计算有无穷个基本事件的情形,下面仅就具有某种“等可能性”的一类问题进行讨论.

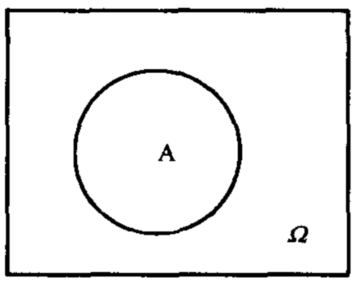


图 1-1

**定义 2** 如果在一个面积为 $S_\Omega$ 的区域 $\Omega$ 中,等可能地任意投点(见图 1-1),这里“等可能”的确切意义是:设在区域 $\Omega$ 中有任意一个小区域 $A$,如果它的面积为 $S_A$,则点落入 $A$ 中的可能性大小与 $S_A$ 成正比,而与 $A$ 的位置及形状无关. 如果“点落入小区域 $A$”这个随机事件仍然记作 $A$,则 $P(A)=S_A/S_\Omega$,这一类概率通常称作几何概率.

由定义易知,几何概率满足:

(i) 非负性. 对任一事件 $A$ 有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$,

(ii) 规范性. 对必然事件 $\Omega$ 有 $P(\Omega)=1$,

(iii) 有限可加性. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为互不相容事件,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}P(A_i)$,并且具有完全可加性. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为可列无穷多个互不相容事件,则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

**例 6** 甲、乙两人约定晚上 7 点到 8 点之间在某处会面,并约定先到者应等候另一个人 20 分钟,过时即可离去,求两人能会面的概率.

**解** 以 $x$ 和 $y$ 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间,则两人能够会面的充要条件是 $|x-y|\leqslant 20$(见图 1-2). 设 $A=$“两人能会面”,这是一个几何概型,则

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

## 三、概率的公理化定义

下面给出概率的公理化定义:

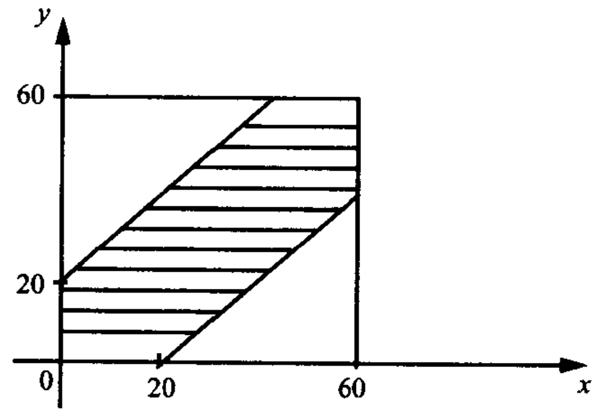


图 1-2

**定义 3**　事件的概率 $P$ 是定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上且满足下列 3 个条件的函数:

(i) 非负性. $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(ii) 规范性. $P(\Omega)=1$;

(iii) 完全可加性. 设 $A_i\,(i=1,2,\cdots)$ 为两两互不相容的事件(即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$),则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

由概率的非负性,规范性和完全可加性出发,可以证明它的一些重要性质:

(i) 不可能事件的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$,

**证**　因为 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,所以

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+\cdots,$$

从而 $P(\varnothing)=0$.

(ii) 概率具有有限可加性,即若 $A_iA_j=\varnothing\,(1\leqslant i\neq j\leqslant n)$, 则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

**证**　因为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$,由完全可加性及 $P(\varnothing)=0$ 知

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(iii) 对事件 $A,B$, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

**证**　由 $A\cup B=A\cup\overline{A}B$, $A\cap\overline{A}B=\varnothing$ 知

$$P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B). \tag{4}$$

又由 $B=AB\cup\overline{A}B, AB\cap\overline{A}B=\varnothing$知

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B). \tag{5}$$

由(4)和(5)式得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质(iii)可推广为:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个随机事件,则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i). \tag{6}$$

(6)式称为概率的一般加法公式,亦称多除少补原理.

作为(iii)的推论易知

(iv) $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

推广为:设 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$, 则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i),$$

也称为概率的次可加性.

(v) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

**证** 由 $A\cup\overline{A}=\Omega, A\cap\overline{A}=\varnothing$得

$$P(A)+P(\overline{A})=1,$$

则 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(vi) $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

**证** $B-A=B-AB=B(\overline{AB})$,故

$$P(B-A)=P[B(\overline{AB})]=P(B)+P(\overline{AB})-P[B\cup(\overline{AB})]$$
$$=P(B)+1-P(AB)-1$$
$$=P(B)-P(AB).$$

特别地,若 $B\supset A$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$并且易知若 $B\supset A$,则 $P(B)\geqslant P(A)$.

**例 7** 某考察团 100 人中有 40 人会讲英语,35 人会讲日语,30 人会讲日语和英语,10 人会讲俄语,英语和日语,且每人至少会讲英、日、俄 3 种语言中的一种,若从中任选 1 人,求(1)此人会讲英语和日语,但不会讲俄语的概率,(2)此人只会讲俄语的概率.

**解**　以 $A,B,C$ 分别表示事件"此人会讲英语","此人会讲日语","此人会讲俄语".

(i)　$P(AB\overline{C})=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)$

$$=\frac{30}{100}-\frac{10}{100}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5};$$

(ii)　$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(\overline{A}\,\overline{B}-\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})$

$$=P(\overline{A\cup B})-0$$

$$=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

$$=1-\frac{40}{100}-\frac{35}{100}+\frac{30}{100}$$

$$=\frac{55}{100}=\frac{11}{20}.$$

**例 8**　设某班共有 $n$ 个人($n\leqslant 365$),每个人的生日在一年(365 天)中的任一天是等可能的,求下列事件的概率.

(i) $n$ 个人中任何两个人生日都不在同一天;

(ii) $n$ 个人中至少有两个人的生日在同一天.

**解**　$n$ 个人中第一个人的生日可能在 365 天中的任一天,有 365 种情况,而第二个人的生日也可能在 365 天中的任一天,也有 365 种情况……第 $n$ 个人也可能有 365 种情况,由乘法原理,$n$ 个人的生日共有 $365^n$ 种情况,这是基本事件的总数.

(i) 用 $A$ 表示"$n$ 个人中任何两个人生日都不在同一天",则第一个人的生日可能有 365 种情况,而第 2 个人只有 364 种情况……第 $n$ 个人有 $365-(n-1)$种情况,故由乘法原理,$n$ 个人中任何两个人生日都不在同一天共有 $365\cdot 364\cdot\cdots\cdot[365-(n-1)]=\frac{365!}{(365-n)!}$种情况,即为 $A$ 包含的基本事件数,于是

$$P(A)=\frac{365!}{(365-n)!}\Big/365^n=\frac{365!}{365^n(365-n)!}.$$

(ii) 用 $B$ 表示"$n$ 个人的生日至少有 2 人在同一天",显然 $B$ 是$A$ 的对立事件,则 $P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{365!}{365^n(365-n)!}$.