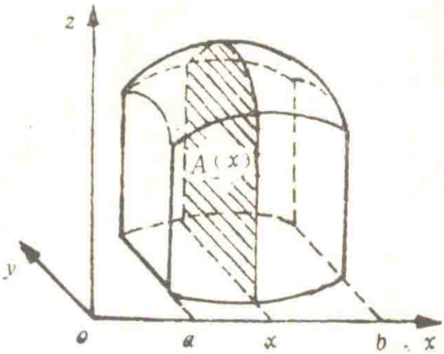
成人高等教育教材

高等数学

教学参考书

下册

重庆大学成人教育学院 编



$$V=\int_a^b A(x)dx$$

重庆大学出版社

教学参考书

参编：谢树艺　王代先　邓竞秀

佘金诺　万象明　曾繁蓉

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是与“成人高等教育教材《高等数学》下册”（重庆大学成人教育学院编）配套的《教学参考书》。是供教师在教学和学生在学习过程中参考的。全书分上、下册，下册共六章：向量代数与空间解析几何；多元函数微分学及其应用；重积分；曲线积分与曲面积分；无穷级数；傅里叶级数等。每章内容：一、习题、思考题（教材中的习题及思考题）及解答；二、参考题及解答；三、参考内容。

成人高等教育教材

高等数学

教学参考书

下 册

王 杰 主编

责任编辑 王季康

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆师范学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张： 8.875 字数 188 千

1992年11月第 1 版 1992年11月第 1 次印刷

印数：1—6000

标准书号：ISBN 7-5624-0545-0 / O·77 定 价：3.15元

（川）新登字020号

前　言

本书是与“成人高等教育教材《高等数学》下册”（重庆大学成人教育学院编）配套的教学参考书，是供教师在教学和学生在学习过程中参考的。全书分上、下册，下册内容有：向量代数与空间解析几何；多元函数微分学及其应用；重积分；曲线积分与曲面积分；无穷级数；傅里叶级数。每章内容：一、习题、思考题（教材中的习题及思考题）及解答；二、参考题及解答；三、参考内容。

本书经过1988—1991三个学年试用，所有编者及全体使用本书的教师，都十分关心本书的完善，不断提出修改意见，反复进行讨论和改进。实践说明，本书很适合成人教育特点，深受成人教育的教师和学生欢迎，使用本书有利于教师更好地掌握教材，可以使学生学到更多的知识，取得更好的成绩，有利于提高教学质量和完成教学任务。

本书由王　杰副教授主编。谢树艺教授参加了编写工作，并对全书发表了宝贵意见。其他编者有：王代先副教授、邓竞秀副教授、万象明副教授、曾繁蓉副教授及退休老教师余金诺同志。

重庆大学系统工程及应用数学系杨万年教授、刘　松教授、何良材副教授、谈骏渝副教授和已退休的罗国光老教授审阅了全书，并提出了宝贵的意见，我们表示衷心的感谢。

重庆大学成人教育学院副院长邹维勤副研究员对本书的编写和出版，给予了强有力的组织领导、支持和严格要求，我们表示最衷心的感谢。

对关心本教材完善、提出改进意见的所有老师和同学，我们表示衷心感谢。

编者1991年7月于重庆大学系统工程及应用数学系

目　　录

第八章　向量代数与空间解析几何

一、习题、思考题及解答

思考题 8-1

1. 若$\vec{a}=\vec{b}$，必有$|\vec{a}|=|\vec{b}|$吗？反之，若$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，必有$\vec{a}=\vec{b}$吗？

解　若$\vec{a}=\vec{b}$，则必有$|\vec{a}|=|\vec{b}|$；反之，若$|\vec{a}|=|\vec{b}|$却未必有$\vec{a}=\vec{b}$。

2. 满足$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$的非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$能否构成一个四边形？

解　按向量加法的多边形法则，非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$除其中有共线的情况外，能构成一个四边形。

3. 非零向量$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$分别满足什么条件时，能使

(1) $\vec{a}+\vec{b}$平分角$\angle AOB$；(2) $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$。

解　(1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|$；

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$共线且有相同的指向。

习　题 8-1

1. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$为二非零向量，试用图形表明：

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|\geqslant||\vec{a}|-|\vec{b}||$.

证 (1)如图8-1，由于三角形两边之和不小于第三边，故有 $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$。

(2) 如图8-2，由于三角形两边之差不大于第三边，故有 $|\vec{a}-\vec{b}|\geqslant||\vec{a}|-|\vec{b}||$。

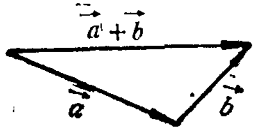


图8-1

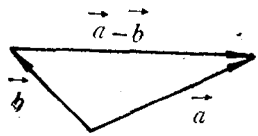


图8-2

2. 若一四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形。

证 如图8-3有

$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$

则 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$。

于是有$AD=BC$且$AD\parallel BC$。故$ABCD$为平行四边形。

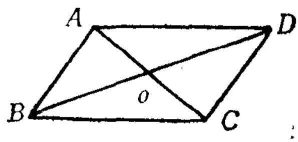


图8-3

3. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$为不平行的非零二向量，试证：若

$$m\vec{a}+n\vec{b}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$$

则有 $m=\lambda$，$n=\mu$。

证 由$m\vec{a}+n\vec{b}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$得

$$(m-\lambda)\vec{a}=(\mu-n)\vec{b}。$$

若$m-\lambda$与$\mu-n$中有一个不为零，比如$\mu-n\neq0$，则有

$$\vec{b}=\frac{m-\lambda}{\mu-n}\vec{a},$$

于是$\vec{a}\parallel\vec{b}$，这与假设矛盾。故必有 $\mu-n=0$；同理，必有$m-\lambda=0$。所以有$m=\lambda$，$n=\mu$。

思 考 题 8-2

1. 向量在轴上的投影是数量还是向量？可否取负数或零？向量在轴上的分量是向量还是数量？

答：向量在轴上的投影是数量。可能取负值或零。向量在轴上的分量是向量。

习 题 8-2

1. 已知向量$\vec{a}$与轴u之间的夹角为$\frac{3\pi}{4}$，$\vec{s}$与轴u平行且同指向，又$|\vec{a}|=\sqrt{18}$，$|\vec{s}|=2$，求$\vec{a}$在轴u上的投影和分量。

解 $\mathrm{prj}_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\frac{3\pi}{4}=\sqrt{18}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-3$。

$\vec{a}$在轴u上的分量为$(\mathrm{prj}_u\vec{a})\vec{s}^0=-3\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}=-\frac{3}{2}\vec{s}$。

2. 已知$|\vec{a}|=\sqrt{12}$，$|\vec{b}|=5$，且$\vec{a}$，$\vec{b}$与轴u之间的夹角依次为$\frac{\pi}{6}$和$\frac{\pi}{3}$，求$\mathrm{prj}_u(\vec{a}+\vec{b})$。

解 $\mathrm{prj}_u(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{prj}_u\vec{a}+\mathrm{prj}_u\vec{b}$

$$=|\vec{a}|\cos\frac{\pi}{6}+|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\sqrt{12}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+5\times\frac{1}{2}=\frac{11}{2}。$$

3. 证明 $\mathrm{prj}_u(\vec{a}-\vec{b})=\mathrm{prj}_u\vec{a}-\mathrm{prj}_u\vec{b}$。

证 $\mathrm{prj}_u\vec{a}=\mathrm{prj}_u(\vec{a}-\vec{b}+\vec{b})=\mathrm{prj}_u(\vec{a}-\vec{b})+\mathrm{prj}_u\vec{b}$ 所以有 $\mathrm{prj}_u(\vec{a}-\vec{b})=\mathrm{prj}_u\vec{a}-\mathrm{prj}_u\vec{b}$。

思 考 题 8-3

1. 分别指出二非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足什么条件时，有

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$；

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$。

解 (1) 由 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ 有 $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$，于是有 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\vec{a}\cdot\vec{b}$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，故有 $\vec{a}\perp\vec{b}$。

(2) 由 $(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$ 有 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，即 $|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=0$，从而有 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$。

2. 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ 且 $\vec{a}\neq\vec{o}$，则 $\vec{b}=\vec{c}$，对吗？为什么？

解 不对。因为当 $\vec{b}\neq\vec{c}$ 时，只要 $(\vec{b}-\vec{c})\perp\vec{a}$，就有 $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0$，即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$。

3. $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$。对吗？

答　不对。$\vec{a}\times\vec{b}$是向量，而$|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$是$\vec{a}\times\vec{b}$的模，是数量。

习　　题 8-3

1. 已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{2}{3}\pi$，求

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$；　(2) $\vec{a}^2$；　(3) $|\vec{a}\times\vec{b}|$；

(4) $|\vec{a}+\vec{b}|$；　(5) $(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$。

解　(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=3\times4\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=-6$；

(2) $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=9$；

(3) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=3\times4\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$=6\sqrt{3}$；

(4) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}$

$=\sqrt{9+16+2(-6)}=\sqrt{13}$；

(5) $(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=3a^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2$

$=3\times3^2+5\times(-6)-2\times4^2=-35$。

2. 证明恒等式$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$。

证　$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2$

$=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2+\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$

$=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$。

3．已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，问λ为何值时，$\vec{a}+\lambda\vec{b}$与$\vec{a}-\lambda\vec{b}$互相垂直？

解 由$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}-\lambda\vec{b})=0$有$\vec{a}^2-\lambda^2\vec{b}^2=0$

则 $\lambda^2=\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}=\dfrac{9}{25}$，所以$\lambda=\pm\dfrac{3}{5}$。

4 已知$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，且有$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$之值。

解 由$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ 有$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=0$，即

$$\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)=-\dfrac{3}{2}$。

5．已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=26$，$|\vec{a}\times\vec{b}|=72$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$。

解 $\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{72}{3\times26}=\dfrac{12}{13}$。

于是 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pm\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=\pm\dfrac{5}{13}$，故

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pm3\times26\times\frac{5}{13}=\pm30。$$

6. 已知$\vec{a}\perp\vec{b}$，且$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，求：

(1) $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$；

(2) $|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|$。

解 (1) $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|=|\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}|$

$=2|\vec{a}\times\vec{b}|=2|\vec{a}||\vec{b}|\sin\dfrac{\pi}{2}=2\times3\times4=24$；

(2) $|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|=|-6\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}|=$
$5|\vec{a}\times\vec{b}|=5|\vec{a}||\vec{b}|\sin\dfrac{\pi}{2}=5\times3\times4=60$。

7. 设$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$，$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$，证明$\vec{a}-\vec{d}$和$\vec{b}-\vec{c}$平行。

证 $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{d}-\vec{a}\times\vec{b}=0$，

所以有 $(\vec{a}-\vec{d})\parallel(\vec{b}-\vec{c})$。

8. 证明恒等式 $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$。

证 $|\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$
$+|\vec{a}|^2|\vec{a}|^2\cos^2(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$。

思 考 题 8-4

1. 向量$\vec{a}$的坐标a_x，a_y，a_z是数量还是向量？表示式$\{a_x, a_y, a_z\}$是数量还是向量？

答 a_x，a_y，a_z都是数量，$\{a_x, a_y, a_z\}$是向量。

习　　题 8-4

1. 在空间直角坐标系中，描出下列各点：

$A(1, 3, 2)$；$B(2, -3, 4)$；$C(-3, 2, -1)$；

$D(3, 2, 0)$；$E(0, 4, -3)$；$F(0, 0, 2)$。

解　如图8-4

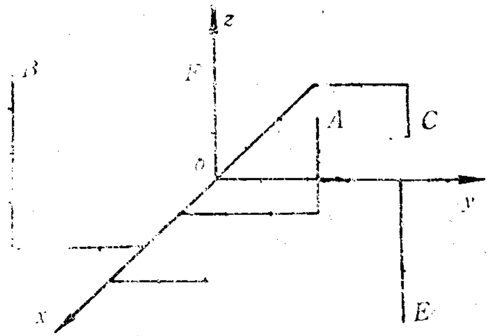


图8-4

2. 已知长方体的一个顶点在原点，有三条棱分别在正半x轴，正半y轴，正半z轴上，且此三棱的棱长依次为a，b，c，求此长方体其它七个顶点的坐标。

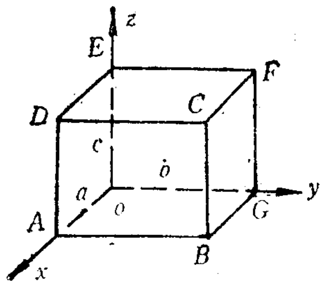


图8-5

解　如图8-5其它七个顶点的坐标依次为

$A(a, 0, 0)$，$B(a, b, 0)$，$C(a, b, c)$，

$D(a, 0, c)$，$E(0, 0, c)$，$F(0, b, c)$，$G(0, b, 0)$。

3. 求点(a, b, c)关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标。

解 (1)关于xoy面，yoz面，zox面的对称点的坐标依次为$(a, b, -c)$，$(-a, b, c)$，$(a, -b, c)$；

(2) 关于x轴，y轴，z轴的对称点的坐标依次为$(a, -b, -c)$，$(-a, b, -c)$，$(-a, -b, c)$；

(3) 关于坐标原点的对称点的坐标为$(-a, -b, -c)$。

4. 设点A，B，C，D，E，F的坐标如题1求

(1) 向径$\vec{r_1}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{r_2}=\overrightarrow{OE}$，$\vec{r_3}=\overrightarrow{OF}$的坐标表示式；

(2) 向量$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BE}$，$\overrightarrow{CF}$的坐标表示式。

解 (1) $\vec{r_1}=\overrightarrow{OA}=\{1, 3, 2\}$，$\vec{r_2}=\overrightarrow{OE}=\{0, 4, -3\}$，$\vec{r_3}=\overrightarrow{OF}=\{0, 0, 2\}$；

(2) $\overrightarrow{AD}=\{3-1, 2-3, 0-2\}=\{2, -1, -2\}$，

$\overrightarrow{BE}=\{0-2, 4+3, -3-4\}=\{-2, 7, -7\}$，

$\overrightarrow{CF}=\{0+3, 0-2, 2+1\}=\{3, -2, 3\}$。

思 考 题 8-5

1. 方向角为$\alpha=\frac{\pi}{6}$，$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$的向量是否存在？

解 不存在。因为任一向量的方向余弦的平方和为1，

而 $$\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\neq 1。$$

2. 基本单位向量$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$的坐标是什么？

解 $\vec{i}=\{1, 0, 0\}$，$\vec{j}=\{0, 1, 0\}$，$\vec{k}=\{0, 0, 1\}$。

3． $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$是单位向量吗？

解 不是。因为$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\neq 1$。

习 题 8-5

1． 求以$A(2, 1, 4)$，$B(3, -1, 2)$，$C(5, 0, 6)$为顶点的三角形的各边长。

解 $|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(3-2)^2+(-1-1)^2+(2-4)^2}$
$=3$，

$|BC|=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(5-3)^2+(0+1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{21}$

$|CA|=|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(2-5)^2+(1-0)^2+(4-6)^2}$
$=\sqrt{14}$。

2． 已知两点$M_1(4, \sqrt{2}, 1)$和$M_2(3, 0, 2)$，求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角。

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1\}=\{-1, -\sqrt{2}, 1\}$，

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$

于是方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\gamma=\frac{1}{2},$$

因此有 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$，$\beta=\frac{3}{4}\pi$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$。

3． 设$\vec{a}=\{3, 2, -1\}$，$\vec{b}=\{1, -1, 2\}$，$\vec{c}=\{x, y, z\}$，问x，y，z分别取什么值时，等式$3\vec{a}-5\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$才能成立？

解 $3\vec{a}-5\vec{b}+2\vec{c}=3\{3,\ 2,\ -1\}-5\{1,\ -1,\ 2\}+2\{x,\ y,\ z\}=\{4+2x,\ 11+2y,\ -13+2z\}$,

故欲$2\vec{a}-5\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$，必须

$$4+2x=0,\ 11+2y=0,\ -13+2z=0$$

由此解得 $x=-2$，$y=-\dfrac{11}{2}$，$z=\dfrac{13}{2}$。

4. 设$\vec{\alpha}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$，$\vec{\beta}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$，$\vec{\gamma}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，求向量$\vec{s}=4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-\vec{\gamma}$在$x$轴上的投影和在$y$轴上的分量。

解 $\vec{s}=4\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-\vec{\gamma}$

$$=4\{3,\ 5,\ 8\}+3\{2,\ -4,\ -7\}-\{5,\ 1,\ -4\}$$

$$=\{13,7,15\},$$

所以$\vec{s}$在x轴上的投影为13，在y轴上的分量为$7\vec{j}$。

5. 设力$\vec{F}=4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}$使质点产生位移$\vec{s}=3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$，求力$\vec{F}$所做的功。

解 力$\vec{F}$所作的功

$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}=(4\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k})\cdot(3\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k})$$

$$=4\times3+7\times(-5)+3\times1=-20。$$

6. 向求量$\vec{a}=\{4,\ -3,\ 4\}$在向量$\vec{b}=\{2,\ 3,\ 1\}$上的投影。

解 $\mathrm{prj}_b\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}^0=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$$=\frac{4\times2+(-3)\times3+4\times1}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}}。$$

7. 证明向量$\vec{a}=\{2, -1, 1\}$，$\vec{b}=\{4, 9, 1\}$互相垂直。

证 因为$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times4+(-1)\times9+1\times1=0$，

所以 $\vec{a}\perp\vec{b}$。

8. 设$\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，计算$(-2\vec{a})\cdot3\vec{b}$及$\vec{a}\times2\vec{b}$。

解 $(-2\vec{a})\cdot3\vec{b}=-2(3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k})\cdot3(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})$

$$=(-6)\times3+2\times6+4\times(-3)=-18;$$

$\vec{a}\times2\vec{b}=\{3, -1, -2\}\times2\{1, 2, -1\}=\{10, 2, 14\}$。

9. 设$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$，计算$\vec{a}\cdot\vec{b}$及$\vec{a}\times\vec{b}$，并求$\vec{a}$，$\vec{b}$夹角的余弦和正弦。

解 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\{1, 2, -1\}\cdot\{1, 1, 0\}=1\times1+2\times1+(-1)\times0=3$，

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\{1, -1, -1\}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}。$$

10. 三点$P_1(1, -1, 3)$，$P_2(-2, 0, 5)$，$P_3(4, -2, 1)$是否在一条直线上？