高等学校教学用书

数学规划及其应用

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU

冶金工业出版社

高等学校教学用书

数学规划及其应用

北京科技大学　周汉良　范玉妹　编著

冶金工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学规划及其应用/周汉良,范玉妹编著.-北京:冶金工业出版社,1995

高等学校教学用书

ISBN T-5024-1669-2

Ⅰ.数… Ⅱ.①周…②范… Ⅲ.数学规划-高等学校-教学参考资料Ⅳ.0221

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 06332 号

出版人 卿启云(北京沙滩嵩祝院北巷 39 号,邮编 100009)

三河市永和印刷厂印刷;冶金工业出版社出版;各地新华书店发行

1995 年 12 月第 1 版,1995 年 12 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32;12.125 印张;322 千字;381 页;1-1900 册

11.40 元

序　　言

数学规划是运筹学的一个重要组成部分，它是近几十年里发展起来的一门新兴学科。随着电子计算机的普及与发展，它在自然科学、社会科学、工程技术和现代管理中得到了广泛的应用，日益受到人们的重视。

本书分六章论述了数学规划的主要内容：线性规划、整数规划、非线性规划、多目标规划、动态规划和网络规划，最后一章则介绍了数学规划一些成功的应用实例。本书是编者在为大学本科生和研究生讲授《运筹学》课程多年的基础上经过修改和补充完成的。本书第一、二、六章由周汉良编写，第三、四、五章由范玉妹编写，第七章由刘胜富编写。

我们在编写本书时力求深入浅出，通俗易懂，并列举了大量的实例。只要具有高等数学、线性代数知识的读者都可以读懂。在取材上，着重介绍了数学规划的基本理论和基本方法，并注意了这些理论和方法的应用。对于一些较复杂的数学推导及证明，作了适量的删减。在计算方法方面，着重介绍了适用面较广、使用方便、具有实效的方法，并力求反映先进成果。鉴于目前计算机已成为运筹学应用中不可缺少的工具，本书特别注意对各种算法都给出了计算框图和算法步骤，使其更具实用的价值。本书每章后面都附有习题，便于自学。

本书可作为大专院校工科各专业教材，也可以作为研究生的教学参考书。

在本书出版之际，谨向曾经给予我们帮助指导的邓乃扬、诸梅芳教授表示衷心谢意。

由于编者水平所限，书中错误或不妥之处在所难免，敬请广大读者给予批评指正。

编者

1994 年 12 月

目　录

第一章　线性规划

线性规划是运筹学的一个重要分支，早在30年代末期就有人开始研究，到第二次世界大战后，线性规划在军事和工业部门得到较广泛的应用。特别是1947年G. B. Dantzig提出了单纯形法之后，线性规划在理论上趋向成熟，应用上越来越广泛。60年代以来，由于计算机的发展，使规模很大的线性规划问题也能很快求解。

第一节　线性规划问题的数学模型

一、例子

[**例1—1**]　（生产组织与计划问题）有一个电视机厂生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种型号的电视机。这三种电视机的市场需要量，每天最少分别为200、250、100台，而该厂每天可利用的工时为1000个时间单位，可利用的原材料每天有2000个单位。生产一台各种型号的电视机所需的工时和原材料单位数量如表1—1所示。问各种型号电视机每天应生产多少台，才能使该厂获得最大利润。

表1—1　　工时和原材料的需要量

型　　号	原材料	工　　时	最低需要量(台)	利　　润
Ⅰ	1.0	2.0	200	10
Ⅱ	1.5	1.2	250	14
Ⅲ	4.0	1.0	100	12
可利用量	2000	1000		

令x_i为第i型（$i=$Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ）电视机每天的生产量。

求利润最大，即求

$$\max S=10x_1+14x_2+12x_3$$

根据表1—1的已知条件，x_i应满足如下的约束条件：

$$
\begin{aligned}
\text{s. t.}^{[1]}\quad & x_1+1.5x_2+4x_3\leqslant 2000 \ (\text{原材料约束}) \\
& 2x_1+1.2x_2+x_3\leqslant 1000 \ (\text{工时约束}) \\
& x_1\geqslant 200 \\
& x_2\geqslant 250 \\
& x_3\geqslant 100
\end{aligned}
$$

［**例 1—2**］ （运输问题）某类物资有 m 个产地，n 个销地。第 i 个产地的产量为 a_i（$i=1$，$2\cdots\cdots$，m）；第 j 个销地的需要量为 b_j（$j=1$，2，……，n），其中 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j$。设由第 i 个产地到第 j 个销地运送单位物资的运价为 c_{ij}。问如何制定调运方案，方可既满足供需关系，又使总运费最少。

用双下标变量 x_{ij} 表示由第 i 个产地供给第 j 个销地的物资数量。由上述问题可归结为如下的数学问题：求一组非负变量 x_{ij}，$i=1$，$2\cdots\cdots$，m，$j=1$，$2\cdots\cdots$，n，使总运费最小，即

$$\min\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

且满足约束条件

$$
\begin{aligned}
\text{s. t.}\quad & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m. \\
& \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n.
\end{aligned}
$$

［**例 1—3**］ （饮食问题）在保证健康的起码营养条件下，我们怎么样确定最经济的饮食？我们假定在市场上可以买到几种不同的食品，并且第 i 种食品的单位售价是 c_i。有 m 种基本营养成分，为达到饮食平衡，每个人每天必须至少保证 b_j 个单位的第 j 种营养成分。假定第 i 种食品的每个单位含有 a_{ji} 个单位的第 j 种营养。

我们用 x_i 表示在饮食中使用第 i 种食品的单位数。于是，这个问题就是选择 x_i，$i=1$，2，……，n，使总成本最小，即

$$\min S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$$

---

[1] s. t. 是 subjeot to 的缩写，意为约束条件。

且满足营养要求：

$$\text{s. t.}\quad \begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m \end{aligned}$$

食品数量显然应满足非负条件：

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots\cdots,\ x_n\geqslant 0$$

二、线性规划问题的数学形式

容易看出上述三个例子的共同点：它们都是求一组非负变量，这些变量在满足一定的线性约束条件下，使一个线性函数取得极值（极大或极小值），这样的问题称为**线性规划问题**，用（LP）表示。我们可以把线性规划问题抽象为下列一般的数学模型：求一组变量 x_1，x_2，……，x_n，在约束条件

$$\text{s. t.}\quad \begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\ (\geqslant=\leqslant)\ b_1\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\ (\geqslant=\leqslant)\ b_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\ (\geqslant=\leqslant)\ b_m\\ &x_j\geqslant 0,\ j\in J\subseteq\{1,\ 2\cdots\cdots,\ n\} \end{aligned}$$

下，使目标函数 $S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 达到极大或极小，其中 b_i、c_j 和 a_{ij}均为实常数，符号（$\geqslant=\leqslant$）表示在三种符号中取一种。

上述线性规划的一般模型，都可以等价地转化成如下形式，称为**标准形式**：

$$\begin{aligned} &\min S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n\\ \text{s. t.}\quad &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ &x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots\cdots,\ x_n\geqslant 0 \end{aligned}\qquad(1-1)$$

式中　b_i，c_j 和 a_{ij}——实常数，且 $b_i\geqslant 0$；

x_j——要求的一组变量。

使用向量和矩阵符号，式（1—1）可以写成如下紧凑的形式：

$$\begin{aligned} &\min S = \boldsymbol{CX} \\ &\text{s. t.}\ \ \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \qquad\qquad (1—2) \\ &\boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{aligned}$$

式中　$\boldsymbol{C} = (c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n)$；

$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)^T$；

$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$；

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots\cdots, b_m)^T$。

实际的线性规划问题的数学模型，往往不是（1—1）的标准形式。但我们用来求解线性规划的单纯形方法，仅仅能解标准形式的线性规划。因此，下面先讨论将各种不同形式的线性规划模型化为标准形式的方法。

（1）将求极大化为求极小

若求 $\max S = \boldsymbol{CX}$，我们知道，$\boldsymbol{CX}$ 的极大等价于 $-\boldsymbol{CX}$ 的极小，故化为：

$$\min(-S) = -\boldsymbol{CX}$$

（2）将不等式约束化为等式约束

1°　对于小于等于型不等式

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots\cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i$$

引进新变量 $y_i \geqslant 0$，将不等式化为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots\cdots + a_{in}x_n + y_i = b_i$$

其中 y_i 称为**“松弛变量”**。

2°　对于大于等于型不等式

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots\cdots + a_{ln}x_n \geqslant b_l$$

引进新变量 $y_l \geqslant 0$，将不等式化为

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots\cdots + a_{ln}x_n - y_l = b_l$$

其中 y_l 称为**“剩余变量”**。

（3）将自由变量化为非负变量

若在线性规划的数学模型中，有某个变量 x_k 没有非负的要

求，则 x_k 称为“**自由变量**”．通过变换：

$$x_k = x'_k - x''_k,\quad x'_k \geqslant 0,\quad x''_k \geqslant 0$$

可将一个自由变量化为两个非负变量；或者设法在约束条件和目标函数中消去自由变量。

［**例 1—4**］　将 $\max S = x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$\begin{aligned} \text{s. t.}\quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 6 \\ & x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

化为标准形。

在这个问题中 x_1 是自由变量，设

$$x_1 = x'_1 - x''_1,\quad x'_1 \geqslant 0,\quad x''_1 \geqslant 0$$

同时把极大化为极小，第一个约束中引进松弛变量 y_1，第二个约束中引进剩余变量 y_2，则问题化为如下的标准形：

$$\begin{aligned} \min\ (-S) &= -x'_1 + x''_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ \text{s. t.}\quad & x'_1 - x''_1 + 2x_2 + x_3 + y_1 = 5 \\ & 2x'_1 - 2x''_1 + 3x_2 + x_3 - y_2 = 6 \\ & x'_1 \geqslant 0,\ x''_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

也可以通过消去 x_1，将问题化成如下的标准形：

$$\begin{aligned} \min\ (-S) &= -x_2 - 3x_3 + y_1 - 5 \\ \text{s. t.}\quad & x_2 + x_3 + 2y_1 + y_2 = 4 \\ & x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

第二节　基本概念和基本定理

一、基本概念

考虑线性规划问题：

$$\min S = \boldsymbol{CX} \qquad (1—3)$$

$$(LP)\qquad \text{s. t.}\quad \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \qquad (1—4)$$

$$\boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad (1—5)$$

定义 1—1　若 $\boldsymbol{X}$ 满足式（1—4）和（1—5），则 $\boldsymbol{X}$ 称为（LP）的**可行解**，满足式（1—3）的可行解称为（LP）的**最优解**。

(LP) 的可行解的全体

$$D=\{X \mid AX=b,\ X\geqslant 0\}$$

称为 (LP) 的**可行域**。

在以后的讨论中，我们都假定 A 的秩为 m（自然 $m\leqslant n$）。我们从 A 的 n 列中选出 m 个线性无关的列组成一个 m 阶矩阵。为了表达方便起见，假定选择的是 A 的前 m 列，并且用 B 表示这个矩阵。于是 B 是非奇异的，称为 (LP) 的一个**基**。我们之所以把 B 叫做基，是因为 B 由 m 个线性无关列组成。这 m 个线性无关的列向量可以作为 m 维空间的一组基。设 P_1，P_2，……，P_n 是 A 的列向量，令

$$B=(P_1,\ P_2,\ \cdots\cdots,\ P_m)$$

$$N=(P_{m+1},\ P_{m+2},\ \cdots\cdots,\ P_n)$$

即将 A 分解为

$$A=(B,\ N)$$

相应地把 X 分解为

$$X=\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$$

其中

$$X_B=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_m)^T$$

$$X_N=(x_{m+1},\ x_{m+2},\ \cdots\cdots,\ x_n)^T$$

B 的列称为**基列**，X_B 的分量称为**基变量**；N 的列称为**非基列**，X_N 的分量称为**非基变量**。

将式（1—4）改写为

$$AX=(B,\ N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=BX_B+NX_N=b$$

由于 B 非奇异，故有

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N \qquad (1\text{—}6)$$

即基变量用非基变量线性表示。若令 $X_N=0$，得

$$X=\begin{pmatrix} X_B \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

定义 1—2 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是（1—4）的一个解，称为（LP）的关于基 B 的**基本解**。若 $B^{-1}b\geqslant 0$，称 B 为**可行基**，这时，称 $X=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 为（LP）的关于可行基 B 的**基本可行解**。

相应地将 C 分解为

$$C=(C_B,\ C_N)$$

其中

$$C_B=(c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_m)$$

$$C_N=(c_{m+1},\ c_{m+2},\ \cdots\cdots,\ c_n)$$

注意到式（1—6），目标函数 $S=CX$ 也可以用非基变量线性表示：

$$CX=(C_B,\ C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}=C_BX_B+C_NX_N=C_B(B^{-1}b-B^{-1}NX_N)$$
$$+C_NX_N$$

整理得：

$$CX=C_BB^{-1}b+(C_N-C_BB^{-1}N)X_N \tag{1—7}$$

定理 1—1 （最优性判别定理） 对于(LP)的基 B,若有 $B^{-1}b\geqslant 0$,且 $C-C_BB^{-1}A\geqslant 0$,则对应于 B 的基本可行解 $X^*=\begin{pmatrix} X_B^* \\ 0 \end{pmatrix}$ 是(LP)的最优解,称为**最优基本可行解**,基 B 称为**最优基**。

证 因 $C-C_BB^{-1}A=(C_B,\ C_N)-C_BB^{-1}(B,\ N)=(C_B,$

$$C_N)-(C_B,\ C_BB^{-1}N)=(0,\ C_N-C_BB^{-1}N)$$

故 $$C-C_BB^{-1}A\geqslant 0\Longleftrightarrow C_N-C_BB^{-1}N\geqslant 0$$

则对一切可行解 X，根据式（1—7），有

$$CX\geqslant C_BB^{-1}b=CX^*$$

因此，X^* 是最优解。

定义 1—3 若在基本解中至少有一个基变量为零，则这个解称为**退化解**。

我们注意到，在非退化的基本解中，基变量可以直接从这个解的非零分量辨认出来；而在退化的基本解中，零值基变量不容易辨认。

二、基本定理

考虑标准形式的线性规划问题

$$
(LP)\qquad \begin{aligned} &\min S = \boldsymbol{CX} \\ &\text{s. t.}\ \ \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad (1\text{—}8)
$$

式中　$\boldsymbol{A}$——$m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 m；

$\boldsymbol{C}$——n 维行向量；

$\boldsymbol{b}$——m 维列向量；

$\boldsymbol{X}$——n 维列向量。

引理 1—1　设 $\boldsymbol{X}$ 是（LP）的一个可行解，若 $\boldsymbol{X}$ 中非零分量所对应的列向量线性无关，则 $\boldsymbol{X}$ 是（LP）的一个基本可行解。

证　用 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，……，$\boldsymbol{P}_n$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的各列，即

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{P}_n)$$

假定 $\boldsymbol{X}$ 中有 r 个分量大于零，不失一般性，设前 r 个分量大于零，已知它们所对应的列向量线性无关，显然，$r \leqslant m$。若 $r = m$，则 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{P}_m)$ 是（LP）的可行基，故 $\boldsymbol{X}$ 是关于基 $\boldsymbol{B}$ 的基本可行解；若 $r < m$，因为 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 m，故可以从 $\boldsymbol{A}$ 中剩下的后 $n-r$ 个列向量中找出 $m-r$ 个列向量，与 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，……，$\boldsymbol{P}_r$ 一起组成 m 个线性无关的列向量，它们构成（LP）的一个基，对应的变量有 r 个大于零，$m-r$ 个等于零，这就是一个退化的基本可行解。

定理 1—2（基本定理）对于形如式（1—8）的标准形式线性规划问题：

（1）若存在一个可行解，则必存在一个基本可行解。

（2）若存在一个最优解，则必存在一个最优基本可行解。

证（1）若存在一个可行解 $\boldsymbol{X} = (x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)^T$，于是有

$$x_1\boldsymbol{P}_1 + x_2\boldsymbol{P}_2 + \cdots\cdots + x_n\boldsymbol{P}_n = \boldsymbol{b}$$

假定 $\boldsymbol{X}$ 中有 r 个分量大于零，不失一般性，设前 r 个分量大于零，则上式变为：

$$x_1\boldsymbol{P}_1+x_2\boldsymbol{P}_2+\cdots\cdots+x_r\boldsymbol{P}_r=\boldsymbol{b} \tag{1—9}$$

可能有两种情形：$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，……，$\boldsymbol{P}_r$ 可能线性无关，也可能线性相关。

情形 1　若 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$……，$\boldsymbol{P}_r$ 线性无关，由引理 1—1 知，$\boldsymbol{X}$ 本身就是一个基本可行解。

情形 2　若 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，……，$\boldsymbol{P}_r$ 线性相关，则存在一组不全为零的常数 δ_1，δ_2，……，δ_r（可以假定它们至少有一个为正），使得

$$\delta_1\boldsymbol{P}_1+\delta_2\boldsymbol{P}_2+\cdots\cdots+\delta_r\boldsymbol{P}_r=\boldsymbol{0} \tag{1—10}$$

从式（1—9）减去式（1—10）的 ε 倍，得

$$(x_1-\varepsilon\delta_1)\boldsymbol{P}_1+(x_2-\varepsilon\delta_2)\boldsymbol{P}_2+\cdots\cdots+(x_r-\varepsilon\delta_r)\boldsymbol{P}_r=\boldsymbol{b} \tag{1—11}$$

设 $\boldsymbol{\delta}=(\delta_1, \delta_2, \cdots\cdots, \delta_r, 0, \cdots\cdots, 0)^T$ 是一个 n 维列向量，则对任意的 ε，

$$\boldsymbol{X}-\varepsilon\boldsymbol{\delta} \tag{1—12}$$

是（LP）（1—8）的约束方程的解，当 $\varepsilon=0$ 时即为原可行解 $\boldsymbol{X}$。当 ε 从零开始增加时，式（1—12）的各分量或者增加（对应于 $\delta_i<0$），或保持常数（对应于 $\delta_i=0$），或减少（对应于 $\delta_i>0$）。由于我们假定至少有一个 δ_i 是正的，所以至少有一个分量随着 ε 的增加而减小。现在让 ε 增加到一个（可能是多个）分量由正减小到零，令

$$\varepsilon=\min\left\{\frac{x_i}{\delta_i}\,\middle|\,\delta_i>0\right\}$$

对于 ε 的这个值，式（1—12）是（LP）（1—8）的可行解，且至多有 $r-1$ 个正分量。事实上，若 $\varepsilon=x_s/\delta_s>0$，则

当 $\delta_i\leqslant 0$ 时，$x_i-\varepsilon\delta_i\geqslant x_i\geqslant 0$；

当 $\delta_i>0$ 时，$x_i-\varepsilon\delta_i=x_i-\dfrac{x_s}{\delta_s}\delta_i\geqslant x_i-\dfrac{x_i}{\delta_i}\delta_i=0$

所以式（1—12）是式（1—8）的可行解。又

$$x_s-\varepsilon\delta_s=x_s-\frac{x_s}{\delta_s}\delta_s=0$$

即式（1—12）至多有 $r-1$ 个正分量。如果式（1—12）的正分量所对应的列向量线性无关，由引理 1—1，式（1—12）就是基本可行解。如果它们线性相关，则可对可行解（1—12）重复上述过程，消去它的一些正分量，直到新的可行解的正分量所对应的列向量线性无关为止，从而得到基本可行解。

（2）若 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)^T$ 是一个最优解，同上面（1）的证明一样，假设 $\boldsymbol{X}$ 有 r 个正分量 x_1，x_2，……，x_r，仍可分为两种情形。

情形 1　当 r 个正分量所对应的列向量线性无关时，由引理 1—1，$\boldsymbol{X}$ 就是最优基本可行解。

情形 2　当 r 个正分量所对应的列向量线性相关时，证法同（1）一样，但还必须证明，对于任意的 ε，具有更少正分量的新可行解（1—12）仍然是最优解，从而最后得到的基本可行解是最优的。

事实上，对应于解 $\boldsymbol{X}-\varepsilon\boldsymbol{\delta}$，其目标函数值为

$$\boldsymbol{CX}-\varepsilon\boldsymbol{C\delta} \tag{1—13}$$

如果能证明 $\boldsymbol{C\delta}=0$，则 $\boldsymbol{X}-\varepsilon\boldsymbol{\delta}$ 仍然是最优解。

假设 $\boldsymbol{C\delta}\neq 0$，对于绝对值足够小的 ε，$\boldsymbol{X}-\varepsilon\boldsymbol{\delta}$ 仍然是可行解，不论 ε 是正的还是负的都是这样。那么，当 $\boldsymbol{C\delta}<0$ 时取 $\varepsilon<0$；当 $\boldsymbol{C\delta}>0$ 时，取 $\varepsilon>0$，这就有 $\boldsymbol{CX}-\varepsilon\boldsymbol{C\delta}<\boldsymbol{CX}$，这与 $\boldsymbol{X}$ 是最优解的假设矛盾，从而证明了 $\boldsymbol{C\delta}=0$。

其余部分的证明完全类似（1）中的情形 2。

这个定理肯定了线性规划问题（LP）如果有最优解，则一定存在一个最优基本可行解。也就是说，目标函数的最优值一定可以在某个基本可行解上达到，因而解线性规划问题时，只要在基本可行解上去寻求目标函数的最优值就行了。因为具有 n 个变量和 m 个约束方程的线性规划问题最多有

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

个基本解（相应于从 n 列中选 m 列的组合数），而基本可行解的个

数不会更多，因而最优解的选择只需在有限个数的基本可行解上进行。

第三节　图解法及几何理论

一、图解法

几何图解法只适用于两个变量的线性规划问题。使用这种解法，对确定满足约束条件的可行域和找出使目标函数极小（大）的最优解，都比较直观。该法也有助于几何直观地理解后面将要介绍的单纯形方法。

［**例 1—5**］　用图解法求解

$$\min S = -x_1 - 2x_2$$

$$\text{s. t.}\quad -x_1 + 2x_2 \leqslant 4$$

$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 12$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

解　首先画出可行域。我们把 x_1 和 x_2 看成坐标平面上点的坐标，因为 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$，所以可行域在第一象限内。约束 $-x_1 + 2x_2 \leqslant 4$ 表示以直线 $-x_1 + 2x_2 = 4$ 为分界线的半平面，它包含原点。约束 $3x_1 + 2x_2 \leqslant 12$ 表示以直线 $3x_1 + 2x_2 = 12$ 为分界线的半平面，它也包含原点。图 1—1 中阴影部分满足所有约束条件，因而是可行域，我们要从中找出最优解。

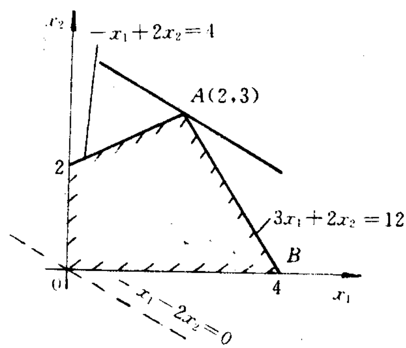

图 1—1

目标函数 $S = -x_1 - 2x_2$ 是 x_1，x_2 的线性函数，要在可行域中找一个最优解，就是要找一个使目标函数最小的可行解。为此，给定 S 一个值，比如 $S=0$，那么 $-x_1 - 2x_2 = 0$ 是坐标平面上一条直线，在这直线上的任何一点都使目标函数取值为 0，这样的直线称