热力学与统计物理习题解答

刘在祥
高尚惠 编

北京师范大学出版社

热力学与统计物理
习题解答

刘在祥
高尚惠 编

北京师范大学出版社
1981年11月

热力学与统计物理习题解答

刘在祥　高尚惠　编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

解放军七二二六工厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 4.25　字数 87 千字

1981 年11月第一版　　1981 年12月第一次印刷

印数 1—20,000

统一书号：13243·3　　定价：0.38 元

说　　明

本书的习题全部取自马本堃、高尚惠、孙煜所编全国高等师范院校试用教材《热力学与统计物理》一书，编者对这些习题做了详细解答，以便为使用该教材的教师和学生提供参考。题目的编排按教材的分章顺序。

本题解是在两次试用该教材的过程中完成的，在此期间部分院校的老师以及本系七七、七八级学生给我们提出了宝贵意见，在此表示感谢。

诚恳希望参考使用本书的教师和读者对书中的不妥之处提出批评指正。

编　者

一九八一年四月

目　　录*)

*）　本目录的分章系按《热力学与统计物理》一书的章次。

第一章　热力学的基本定律

1. 图 1-1 中的每一个图表示按某种指定的路径所做的一个循环，试指出每一个循环完成的功是正的、负的、还是零？

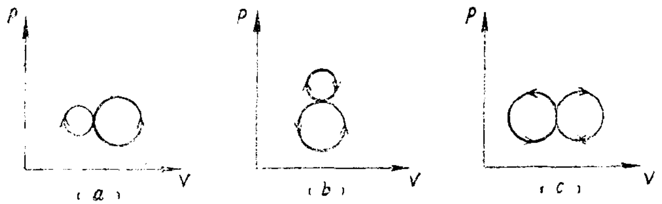

图　1-1

答：(a)　“－”；(b)　“－”；(c)　“0”

2. 一理想气体，经(i)等压过程　(ii)等温过程　(iii)绝热过程，使体积增加一倍，试扼要说明：

(1) 哪一过程引起的温度变化最大，最小？

(2) 哪一过程气体完成的功最大，最小？

(3) 哪一过程吸热最多，最少？

答：在 P-V 图上画出三种过程，如图 1-2 所示。

(1) 等温过程温度变化最小；等压过程设初态温度为 T_0，由

$$PV = nRT$$

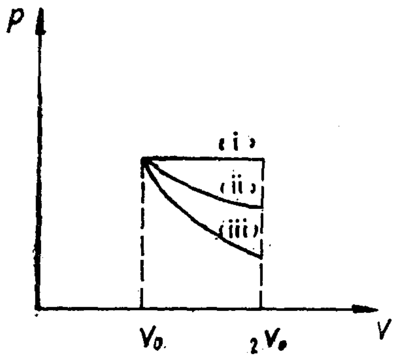

图 1-2

得

$$T' = 2T_0 \qquad \therefore T' - T_0 = T_0$$

绝热过程，由

$$TV^{\gamma-1} = C$$

得

$$\frac{T''}{T_0} = \frac{(2V_0)^{1-\gamma}}{V_0^{1-\gamma}} = 2^{1-\gamma}$$

$$\therefore T'' = 2^{1-\gamma} T_0$$

即

$$T'' - T_0 = T_0(2^{1-\gamma} - 1)$$

$$\because \quad \gamma > 1 \qquad \therefore |T'' - T_0| < T_0$$

因此等压过程中，温度变化最大。

(2) 等压过程完成的功最大。绝热过程完成的功最小。

(3) 绝热过程不吸热，所以吸收的热量最少。等压过程吸热最多。因为与等温过程比，做功多，且温度又升高，所

以吸热最多。

3. 试证对理想气体有 $C_P - C_V = nR$，并说明 $C_P > C_V$ 的原因。

证： 由公式

$$C_P = C_V + \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

再由理想气体的性质得

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \\ \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P} \end{cases}$$

代入上式得

$$C_P = C_V + nR$$

因为在等压加热的过程中，系统吸收的热量一部分用以提高系统的温度，一部分用以作功，

$$\therefore C_P > C_V$$

4. 图 1-3 中 OA、OB 为通过 0 点的等温线与绝热线，试说明这两条曲线在 0 点陡度不同的原因。

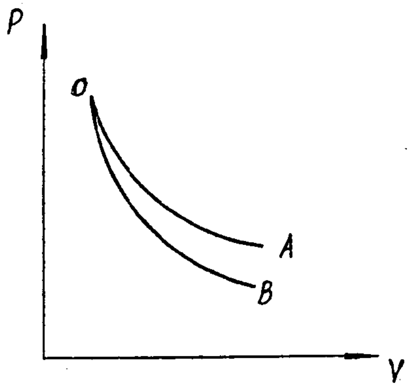

图 1-3

答： 由

$$PV = nRT$$

得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{P}{V}$$

又由 $PV^{\gamma}=C$ 得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = -\gamma\frac{P}{V}$$

$$\because \quad \gamma>1$$

$$\therefore \quad \left|\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S\right|>\left|\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\right|$$

在等温过程中，由于 T 不变，P 的变化仅由 V 的变化引起，而在绝热过程中，P 的变化由 V、T 两个因素的改变引起，所以通过 0 点的绝热线的陡度大于等温线的陡度。

5. 利用公式$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x=-1$，证明 $\alpha=\kappa\beta P$。

证：$\because \alpha=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad \beta=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$

$$\kappa=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

在公式

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T=-1$$

中代入 α,β,κ，则

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=-\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

$$\alpha V=-(\beta P)(-\kappa V)$$

$$\alpha=\kappa\beta P$$

6． 假设在压强不太高时，一摩尔的真实气体其物态方程可表示为：$PV=RT(1+BP)$。其中B为温度的函数。求α、κ，并给出在$P\to 0$时的极限值。

解：已知

$$PV=RT(1+BP),\quad B=B(T)$$

$$\alpha=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P=\frac{R}{PV}\left[(1+BP)+TP\frac{dB}{dT}\right]$$

$$=\frac{1}{T}+\frac{P}{1+BP}\frac{dB}{dT}$$

当$P\to 0$时，右方第二项的分母$\to 1$，分子$\to 0$，所以$\alpha\to\frac{1}{T}$正与由理想气体态式求得的结果一致。

$$\kappa=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

由态式

$$V=RT\left[\frac{1}{P}+B\right]$$

$$\therefore\quad\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=-\frac{RT}{P^2}$$

$$\therefore\quad\kappa=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T=\frac{RT}{P\cdot PV}$$

$$=\frac{1}{P}\cdot\frac{1}{1+BP}$$

当$P\to 0$时，BP与1比较可以略去，所以$\kappa\to\frac{1}{P}$，也与理想气体结果一致。

7. 某气体的 α 及 κ 分别为：$\alpha=\frac{nR}{PV}$，$\kappa=\frac{1}{P}+\frac{a}{V}$，其中 n、R、a 都是常数，求此气体的物态方程。

解法Ⅰ：

由 $\alpha=\kappa\beta P$

得

$$\beta=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=\frac{\alpha}{\kappa P}=\frac{nR/PV}{\left(\frac{1}{P}+\frac{a}{V}\right)P}$$

$$=\frac{nR}{PV\left(1+\frac{aP}{V}\right)}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=\frac{nR}{V\left(1+\frac{aP}{V}\right)}$$

$$(V+aP)dP=nR\ dT$$

积分

$$PV+\frac{1}{2}aP^2=nRT+f(V)$$

当 $P\to 0$ 时，一切气体均趋于理想气体，即 $PV=nRT$，

$\therefore f(V)=0$

$\therefore$ 态式为：$PV=nRT-\frac{1}{2}aP^2$

解法Ⅱ：

由 $V=V(T,P)$

$$dV=\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT+\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP$$

$$=\alpha V dT-\kappa V dP$$

$$= \frac{nR}{P}dT - \left(\frac{1}{P} + \frac{a}{V}\right)VdP$$

$$PdV = nRdT - VdP - aPdP$$

$$d(PV) = nRdT - aPdP$$

$$= d\left(nRT - \frac{1}{2}aP^2\right)$$

$$PV = nRT - \frac{1}{2}aP^2$$

8． 试证：任意均匀的系统，各方面受到同样压力，它的绝热压缩系数及等温压缩系数间的关系是

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{绝热} = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{C_V}{C_P}$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{1}{\gamma}$$

证：由于对绝热过程有

$$dT + \frac{\gamma - 1}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P} dV = 0 \qquad (1)$$

其次

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP \qquad (2)$$

由（1）和（2）得到

$$\gamma\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP = 0$$

借助恒等式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -1$$

直接得到欲求的压缩系数的关系为

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{\text{绝热}}=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

9. 由热力学第一定律出发，证明理想气体绝热过程的方程为 $PV^\gamma=$ 常数，$TV^{\gamma-1}=$ 常数，$TP^{\frac{1}{\gamma}-1}=$ 常数，其中 $\gamma=C_P/C_V$ 为常数。

证： 由第一定律

$$\delta Q=dU+PdV$$

因为

$$\delta Q=0\text{，}dU=C_VdT$$

$$\therefore C_VdT=-PdV \qquad (1)$$

由

$$PV=nRT\text{，}nR=C_P-C_V$$

有

$$dT=\frac{PdV+VdP}{C_P-C_V} \qquad (2)$$

把（2）代入（1）式，有

$$C_VVdP=-C_PPdV$$

$$\therefore\quad PV^{C_P/C_V}=PV^\gamma=\text{常数。}$$

由（1）式有

$$\frac{C_VdT}{T}=-\frac{C_P-C_V}{V}dV$$

$$\therefore\quad \frac{dT}{T}=-\left(\frac{C_P}{C_V}-1\right)\frac{dV}{V}$$

$$\therefore\quad TV^{\gamma-1}=\text{常数。}$$

因为：

$$dV=\frac{nRdT-VdP}{P} \qquad (3)$$

把（3）代入（1）式，有

$$\frac{C_PdT}{T}=\frac{C_P-C_V}{P}dP$$

$$\therefore \qquad \frac{dT}{T}=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{dP}{P}$$

$$\therefore \qquad TP^{\frac{1}{\gamma}-1}=\text{常数。}$$

10．某种磁性材料，总磁矩M与磁场强度$\mathscr{H}$的关系为：$\frac{M}{V}=x\mathscr{H}$，其中V为材料的体积，x为磁化率，在弱磁场中某一温度区域内$x=\frac{C}{T}$，C为常数。欲通过如下两个过程使M增加为$2M$。

(*i*) 等温准静地使$\mathscr{H}$增加为$2\mathscr{H}$。

(*ii*) 保持$\mathscr{H}$恒定，使温度由T变为$\frac{1}{2}T$。

在上述两过程中均保持体积V固定，在$\mathscr{H}$-M图上，画出过程曲线，并确定环境所做的功。

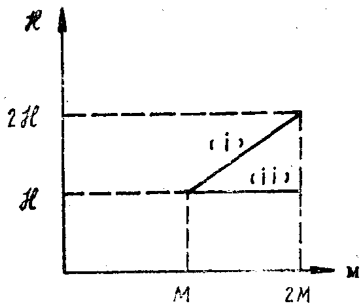

图 1-4

解：因为

$$\delta A=-\mu_0\mathscr{H}d\mathscr{H}$$

环境作功

$$\delta A' = \mu_0 \mathscr{H} dM$$

(i) $$\delta A' = \mu_0 \int_{\mathscr{H}}^{2\mathscr{H}} \mathscr{H} dM = \mu_0 \frac{C}{T} \int_{\mathscr{H}}^{2\mathscr{H}} \mathscr{H} d\mathscr{H}$$

$$= \mu_0 \frac{C}{T} \frac{1}{2} \left[(2\mathscr{H})^2 - \mathscr{H}^2 \right]$$

$$= \frac{3}{2} \mu_0 \mathscr{H} M$$

(ii) $$\delta A' = \mu_0 \mathscr{H} \int_{M}^{2M} dM$$

$$= \mu_0 \mathscr{H} M$$

11. 试证明：理想气体在某一过程中，任意温度 T 的热容量 C 与同温度 T 的定容热容量 C_V 之差为一常数，则此过程一定是多方过程。

证： 理想气体在某过程中有

$$CdT = C_V dT + PdV \tag{1}$$

再将理想气体的态式 $PV = nRT$ 微分，有

$$PdV + VdP = nRdT \tag{2}$$

把（2）代入（1）式中，消去 dT 并利用 $C_P - C_V = nR$，则有

$$VdP = \frac{C_P - C}{C - C_V} PdV \text{、}$$

令

$$z = \frac{C - C_P}{C - C_V} = 1 - \frac{nR}{C - C_V},$$

则有

$$\frac{dP}{P} + z\frac{dV}{V} = 0.$$

所以不论 C 与C_v随 T 如何改变，只要在任何温度 T 下，其差值为常数。则积分时可视 z 为常数，所以有 PV^z = 常数。

12. 声音在空气中的传播可看做为绝热过程，声速 C 由下式给出：$C=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$ ，其中 ρ 为气体密度，角标 S 表示绝热过程。若空气被近似看做理想气体，试证声速随温度变化的关系为：

$$C=\sqrt{\gamma RT/\mu}\ ,$$

其中 $\gamma=C_p/C_v$，μ 为空气的摩尔质量。

证：将绝热方程 $PV^{\gamma}=C$ 用 P 及 ρ 表示

$$P=c'\rho^{\gamma}\quad c' \text{ 为另一常数}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=\gamma c'\rho^{\gamma-1}=\gamma\frac{c'\rho^{\gamma}}{\rho}=\gamma\ \frac{p}{\rho} \tag{1}$$

又∵
$$PV=\frac{M}{\mu}RT$$

∴
$$P=\rho\frac{RT}{\mu}$$

代入（1）式，得

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s=\gamma\ \frac{RT}{\mu}$$

∴
$$C=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

13. 将汽油机的理想循环看做是由图 1-5 中所示的几个过程组成：

1-2：绝热压缩

2-3：等容加热（对应于混合气体的燃烧）

3-4：绝热膨胀（作功冲程）

4-1：等容放热（对 应于排除废气，吸进新鲜混合物）

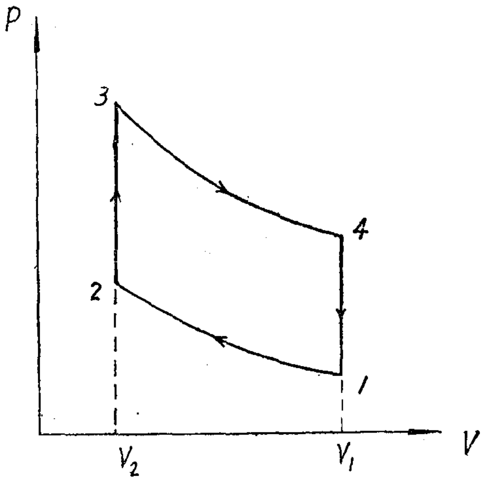

图 1-5

试证明循环的热效率为：$\eta=1-\varepsilon^{1-\gamma}$，其中 $\varepsilon=\frac{V_1}{V_2}$称为压缩比，$\gamma=C_p/C_v$ 为绝热指数。

证：由热效率定义 $\eta=\frac{A}{Q}$

$$A=-(U_4-U_3)-(U_2-U_1)$$
$$=C_v(T_3-T_4)-C_v(T_2-T_1)$$
$$Q=C_v(T_3-T_2)$$