数学题组教学法的理论与实践

（修订版）

王文清　编著

石油大学出版社

数学题组教学法的理论与实践

（修订版）

王文清　编著

石 油 大 学 出 版 社

数学题组教学法的理论与实践
（修订版）
王文清　编著
*
石油大学出版社出版发行
（山东省　东营市）
新华书店经销
石油大学印刷厂印刷
*
开本 787×1092　1/16　16.5 印张　540 千字
1996 年 6 月第 1 版　1997 年 3 月第 2 版　1997 年 3 月第 2 次印刷
印数 10000—20000 册
ISBN 7-5636-0979-2/O·49
定价：18.00 元

前　言

多年来我们对高三数学总复习的目的、要求和方法进行了深入的思考和研讨，结合近年来高考命题方向的新发展，对以往的复习工作进行了深刻反思，从而萌发了关于用题组法进行数学总复习教学的新构想(《关于用题组法进行数学总复习教学的构想》一文，曾于1993年11月荣获山东省中学数学教学研究会优秀论文一等奖；撰写的论文《谈谈用题组法进行数学总复习教学》发表在安徽《中学数学教学》1995年第1期上)。据此构想，经过充分准备和反复实践，我们精心编写成《数学题组教学法的理论与实践》这本书，奉献给社会，以飨广大读者。

本书分为三部分：题组教学法的构想、题组设置和解题指导。

在第一部分——题组教学法的构想中，分五个专题向读者介绍题组教学法的总体构想及本书的编写意图、指导思想和使用方法，同时还向读者介绍了对高三数学总复习第二阶段复习的设想。

在第二部分——题组设置中，共设置了十五章，其中第一章为：预备知识(在整个中学数学内容中，有些知识对全局有重大影响，具有观点性和工具性，这些知识若仍按课本顺序复习，势必会丧失大量运用这些知识、观点、工具的机会，影响复习的水准和效果，为此，本书将集合、充要条件、常用的数学思想方法，作为预备知识安排在第一章)；第十五章为：探索性问题和应用性问题(这是针对近年高考命题的新特点——加强对探索性问题和应用性问题的考查，而增设的)；第二章～第十四章是按高中数学教材的章节顺序划分的。每章下设若干节，每节都由三部分构成：考纲要求——复习指导——题组设置((Ⅰ)再现型题组；(Ⅱ)巩固型题组；(Ⅲ)提高型题组；(Ⅳ)反馈型题组)。运用题组法进行数学总复习教学改变了以往的教师总结出一种方法后，学生随着套用的陈旧的教学模式，那种旧的教学模式，往往使学生省略"方法"的思考和被揭示过程，即检索、选择、判断的过程，同时也限制了学生的思维。而题组教学法是围绕某一课时的教学目的与要求，去精选一批问题，并按教学顺序分成若干组(本书中将每节课的题目分为四组，即再现型题组、巩固型题组、提高型题组和反馈型题组)，将基础知识、基本技能、基本方法、基本思想溶于其中，然后引导学生讨论问题、分析问题、求解问题，教师借题生话、借题发挥，画龙点睛，使学生在积极主动地探索研究中，在解答题目的过程中巩固所学的知识，发现规律性的东西，并使学生智力与能力得到训练与提高。题组教学法的核心有两点：一是变"讲—练—讲"为"练—讲—练"，变"一法——题"为"见题—想法"；二是每节课均按低、中、高三个层次设计、组织课堂教学。这部分共计109节。供高三数学复习第一阶段使用。

在第三部分——解题指导中，分为四个专题：一、数学选择题的解法；二、解填空题的要求与方法；三、探索性问题与应用问题选讲；四、考前寄语。以向学生传授高考应试时应具备的解题技巧、策略和心理素质。

本书不仅是高三数学教师的得力助手，而且也是高三学生全面、系统地掌握高中数学知识、复习迎考的良师益友。本书的第二部分(题组设置)同时适用于高中一、二年级。文、理科均能用。

全书由王文清设计、撰写。

由于水平有限，书中疏漏之处在所难免，希望在实践的基础上不断修改，不断完善。欢迎广大读者提出宝贵的意见和建议。

王文清

一九九七年三月

目　录

第一部分　题组教学法的构想

第二部分　题组设置

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第三部分　解题指导

第一部分　题组教学法的构想

一、问题的提出

师生为高考数学复习辛勤劳累，往往得不到应有的收效，原因在哪里？通过听课调查发现：

1. 在涉及“基础知识”的复习课中，教师往往都是通过归纳成条文、画图表概括之类的手段来罗列知识、梳理知识。这种做法，往往表现为教师津津乐道，学生感到枯燥乏味，漫不经心，没精打采，无法激发学生的兴趣，但一当教师提出问题，则精神振奋，精力集中地思考问题，这就明显反映了学生需要通过问题来复习“基础知识”的迫切要求，问题是数学的心脏，青浦县把问题作为教学的出发点，道理就在这里。我们教师也就理所当然应当顺应学生的心理需要去发挥主导作用。

2. 在涉及“数学技能、数学思想方法”的复习课中，教师往往阐述一种“方法”后，立即出示一（或几）个相应的例题或练习，学生只管按教师传授的“方法”套用即可。这样，学生就省略了“方法”的思考和被揭示过程，即选择判断的过程，同时也限制了学生的思维，长此以往，也就形成了“学生上课听得懂，课下（或考试）不会思考、不会做题”的现象。著名数学家庞加莱说：“创造就意味着选择”，忽视了选择，就必然影响学生的创造，表现在解答问题上，就是束手无策，无从下手，这就是当前数学复习课效果不理想的重要原因。

那么，怎样才能提高数学复习课的质量，使师生的辛勤劳作，换得丰富的硕果？我们认为，作为数学教师，你要想让学生听懂学会，你就必须为学生创造和安排练习的机会，使他们逐渐积累“内化的动作”。譬如，在复习两条直线平行的证明方法时，可以改变以往那种阐明一种“方法”，出示一（或几）个相应题目的做法，而根据证明两条直线平行的五种方法的需要，设计一组可将有关“方法”溶于其中的小题目让学生先做。

（1）已知：直线 $a/\!/$ 平面 α，直线 $a\subset$ 平面 β，平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=$ 直线 b. 求证：直线 $a/\!/$ 直线 b.

（2）在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：平面 AA_1C_1C 与平面 BB_1D_1D 的交线与棱 AA_1 平行。

（3）如图 1，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P、Q 分别是棱 AA_1 和 CC_1 的中点，求证：四边形 $PDQB_1$ 是平行四边形。

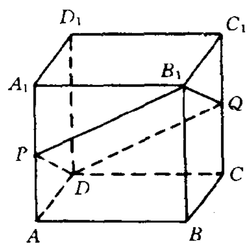


图 1

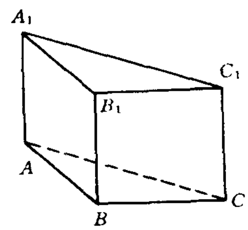


图 2

（4）在空间的四边形 $ABCD$ 中，点 E、F、G、H 分别在 AB、BC、CD、DA 边上，且四边形 $EFGH$ 是平行四边形，求证：$AC/\!/EF$.

（5）如图 2，$A_1B_1C_1-ABC$ 是直三棱柱，过点 A_1、B、C_1 的平面和平面 ABC 的交线记作 l，试判定直线 A_1C_1 和 l 的位置关系，并加以证明。

这样，就把主动权交给了学生，学生应用自己的知识和思维方法掌握数学、运用数学、解决数学问题，使学生在分析问题、解决问题的探索过程中，回顾所学的“知识、方法”，并作出相应的选择判断，从而轻松愉快地实现知识复习与能力提高，最后，教师列表归纳证明两直线平行的（五种）方法：

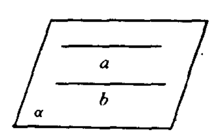
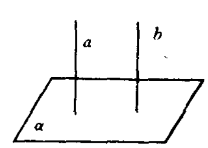
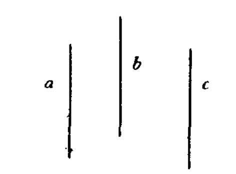
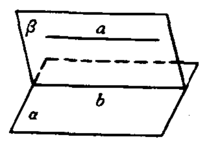
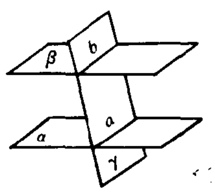
图　　形	方　　法
	$\left.\begin{array}{l}a\subset\alpha\\ b\subset\alpha\\ a、b\text{ 没有公共点}\end{array}\right\}$ $\Rightarrow a/\!/b$
	$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\ b\perp\alpha\end{array}\right\}a/\!/b$

图　　形	方　　法
	$\left.\begin{array}{l}a\parallel c\\ b\parallel c\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$
	$\left.\begin{array}{l}a\parallel \alpha\\ a\subset\beta\\ \alpha\cap\beta=b\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$
	$\left.\begin{array}{l}\alpha\parallel \beta\\ \alpha\cap\gamma=a\\ \gamma\cap\beta=b\end{array}\right\}\Rightarrow a\parallel b$

为此，我们认为用题组法进行数学总复习教学，是解决当前数学总复习教学效率低、质量不高的有效方法。

二、何谓题组法

所谓题组法，就是针对某一节复习课（或某个知识单元）的教学目标，设计几组题目，将有关数学基础知识、基本技能、基本方法与数学思想溶于其中，换言之，即以分组之题目为骨架编拟课时教案，在具体教学中，以题组中的题目开路（先出现题目，再出现其它），然后引导学生对题目进行分析、讨论、研究和解答。教师借题生话、借题发挥，画龙点睛，使学生在积极主动地探索研究中，在解答题目的过程中巩固所学的知识，发现规律性的东西，并使学生智力与能力得到训练与提高。变“讲—练—讲”为“练—讲—练”，变“一法——题”为“见题—想法”。

三、题组法的实施

题组法的结构由四组题目构成：

（一）**再现型题组**。即把某一节复习课要复习的基础知识（概念、公式、法则、公理、定理、方法、思想，技能等）整理成一组问题的形式，通过解答问题，达到学生再现某些数学知识的目的。这里的主要目的是再现所复习的知识要点，数学思想和方法。这组题目应较易，要由学生独立完成。教师通过课堂巡视指导（或课前批阅）了解学生掌握情况，然后教师（或由学生）逐题明确每题所用知识要点、数学思想和方法，针对学生存在的问题精讲，最后师生共同对这些知识要点、数学思想和方法进行归纳整理。

（二）**巩固型题组**。通过这组问题的解答，使学生进一步巩固这节课所复习的知识要点，数学思想和方法。它是再现型题组的继续和发展。这组题目的难度要较之再现型题组大，对三基适当综合。一般仍先由学生（允许相互讨论）完成，教师通过课堂巡视或提问了解学生情况，发现问题及时解决。

（三）**提高型题组**。根据教学目标，设计一组有一定综合性的题目，通过这组题目的解答，使学生在进一步明确所复习知识要点、数学思想和方法的前提下，能力方面有所提高。这组题目可由学生讨论解决，也可由师生共同完成。

（四）**反馈型题组**。这组题目要低、中、高档题均有，学生通过对这组题目的解答，巩固课堂学习效果，发现自己学习中存在的问题，教师则及时了解课堂教学效果，以便下节课及时矫正。这组题目一般可由学生课下独立练习。

四、几点说明

1. 教师在选编题组时，要围绕有利于复习基础知识，巩固基本方法，揭示某些解题规律来选题、编题，每个题组中的题目及各题组之间要由易到难，由单一到综合，各题组要紧紧围绕课时（或单元）复习目标，使基础知识、基本技能、基本方法、基本思想、解题规律重复出现，螺旋式递进。这符合学生的认识规律，有助于学生掌握问题的来龙去脉，加速从模仿到灵活运用的进程，能深深印入学生的脑海中。

2. 题目的选编，以考纲为纲，以教本为本，应具有典型性和代表性，能起到示范作用。

3. 一组题目解完后，教师应带领学生回过来反思反思，本题组复习了哪些基础知识？利用了哪些基本技能？重温了哪些数学方法？体现了哪些数学思想？哪道题可以推广、引伸、变式？某题还有哪些解法（一题多解）？还有哪些题可借助于本题的解法（多题一解）？把后两个疑问交给学生，使他们不断地反思，在

反思中巩固、深化、提高，使他们的知识由点到面、由面到体，形成合理的知识结构。

4. 题组法能及时反馈教学信息，随时调节教学，因为它能让学生当场了解解题过程，知道正误，及时反馈，教师由此也能立即获得学生方面的信息，该纠正或该强化，随时解决，不烧“夹生饭”，也不留或少留“隔夜饭”，这样教和学的针对性都强，教师及时了解学生掌握了什么？还未掌握什么？哪些学生掌握了？哪些学生还未掌握？等等，奥苏贝尔教授说得好“如果我不得不把全部教育心理学还原为一条原理的话，我将会说，影响学习的最重要的因素是学生已经知道了什么，根据学生的原有知识状况进行教学”。

5. 题组法能激发学生的学习兴趣，一方面是因为学生对数学概念、公式、定理、技能技巧及数学思想和方法的学习，一般地都要在接触到相应的题目，在解决题目的过程中或找到题目的解答后才能获得；另一方面使学生对学习某一知识与方法的重要性与必要性看得见摸得着。再就是学生直接参与了教学过程，动口、动手、动脑的机会大大增加，智力自然得到了发展。正如苏联教育家苏霍姆林斯基指出的：真正的巩固知识，是让学生对事实、事物、现象的实质进行独立思考，很重要的一点是，要让这个思考过程（也就是知识的巩固过程）通过能够观察到、能够加以分析的实际作业的形式反映出来（苏霍姆林斯基所指的“实际作业”，对数学复习课来说，就是课内外练习）。

6. 题组法的核心有两点：一是变“讲—练—讲”为“练—讲—练”，变“一法——题”为“见题—想法”；二是每节课均按低、中、高三个层次设计、组织课堂教学。

7. 我们用题组法组织数学课堂复习教学的体会是：

(1)“(一)再现型题组”与“(三)提高型题组”可要求课前预练（对后进生只要求预练(一)再现型题组，对中等生和优等生要求这两组题均预练），目的是为课堂教学留出充足的时间。

(2) 用题组法组织数学课堂复习教学的重头戏在于解完“(一)再现型题组”后的归纳总结，这是能否上好这节课的关键（约用10分钟）；至于“(二)巩固型题组”，在于用一组较“(一)再现型题组”稍难、有所变式、背景有所变化的题目，让学生通过练习，巩固、加深、提高对“(一)再现型题组”的归纳总结的认识（约用20分钟）。而对“(三)提高型题组”课堂上不留思考时间，教师只需作思路点拨（因为这组题是只要求中上游学生掌握的，由此亦可看出用题组法组织数学课堂复习教学还能做到因材施教）。处理得好可做到锦上添花（约用10分钟）。

(3) 高三数学复习课中，在利用题组法的同时，如再能充分利用投影仪，那么将如虎添翼。

五、对第二阶段复习的设想

我们认为在高三第一阶段复习中尽管教师已做了非常详尽、充实的讲解，但由于第一阶段复习资料在编写时多着眼于按照章节顺序来安排，知识的纵横联系明显不足，而且就学生的接受能力而言，这时还不宜作较多的综合性讨论。这一轮复习下来，学生解决的主要还是覆盖知识点的问题，对于如何综合考虑问题、灵活选用数学思想和方法、提高解决综合题的能力等要求，还有赖于在第二阶段复习中逐步达到。如果在第二阶段复习中不能充分看清这一层要求而执迷于多多益善的“练”，把讲降低到就题论题的分析试题答案的水平上，显然是完不成这一任务的。

为了弥补这一不足，我们也尝试过在第二阶段复习中抽出高中数学中的若干主线，以此来“串”有关的综合性问题。这是一种异于第一阶段而又高于第一阶段的“讲”，这种讲和相应配套的练，对提高综合解题的能力有一定好处。但使用下来又出现了新的矛盾，即这种讲侵占了太多的第二阶段复习的时间，影响到必须保证的一定数量的、全面的、深入的练，因为这样抽出的主线一般有二十几条，每条主线集中讨论的时间以2课时计算，全部讲完要近两个月的时间，这样，能用来进行综合训练的时间就很少了，因此往往为了保证综合训练，只好中途停止这种串讲。

面对上述矛盾和高考对能力的考察主要体现在对数学思想和方法的考察上，我们又一次做了大的改革，在第二阶段复习时，以数学思想和方法为主线将高中数学内容穿插到每份数学思想与方法强化训练题中去，在“练”的基础上，进一步巩固“三基”，强化数学思想和方法，开发智力，培养能力。我们的设想是：在第二阶段复习前，编写一套“数学思想与数学方法强化训练题”，先根据高考主要考察的数学思想和方法为每份卷子铺设一条基线，在整套综合卷中，把体

现那些主线精神的典型考题集中在以它为相应基线的那份练习卷中，而把考察其它数学思想和方法的题目分散安排在其它各卷中。这样，从一套综合卷的整体看，它兼顾了高中数学的方方面面，覆盖了全部基本知识点，但从其中一份卷子看，它又有一个中心。

同时，我们建议：在编写"数学思想与数学方法强化训练题"时，可围绕以下十三条基线进行编写：

① 函数与方程的思想；② 数形结合的思想；③ 化归的思想；④ 分类讨论的思想；⑤ 整体思想；⑥ 特殊化方法和归纳—猜想—证明方法；⑦ 分析—综合法；⑧ 构造法；⑨ 配凑法；⑩ 待定系数法；⑪ 换元法和参数法；⑫ 定义法；⑬ 建模法（应用问题）。

这套练习题，还具有以下特色：(1) 为了不使学生的思维受限，每份练习卷均不标明所考查的数学思想和方法，只是在讲评材料（参考答案）中阐明。(2) 活页装订，可拆成试卷以供检测使用。

第二部分　题组设置

第一章　预备知识

§1.1　集合的概念

一、考纲要求

理解集合、子集(真子集)的概念，了解空集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关术语和符号，能正确表示一些较简单的集合．

二、复习指导

集合是数学中的一个重要概念，是研究数学问题的基础和工具．通过集合可以清楚地界定所要讨论的问题的范围，得出规律性的结论，使理解更加深刻；同时集合的语言简明准确，可以帮助我们更迅速、更简捷地思考，更准确地表明问题．

在高考中，集合几乎是每年必考的内容之一，一般地说，以两种方式进行考查：一是考查集合本身的知识；二是考查集合语言与其它数学知识的综合运用．

本节主要讨论上述第一类问题，也涉及一些第二类问题，后者将主要分散在后面的章节之中讨论．

三、题组设置

(一) 再现型题组

1．下列集合，若是有限集，请用列举法表示；若是无限集请用描述法表示：

(1) 被 4 除余 1 的正整数集合__________．

(2) 第二象限内所有的点组成的集合__________．

(3) 平方后为 9 的实数集合__________．

(4) 由集合$\{0,1\}$的所有子集组成的集合__________．

(5) 平方后为-9的实数集合__________．

2．用适当的符号($\in$、$\notin$、$=$、$\subset$、$\supset$)填空($I=\mathbf{R}$)：

$\frac{2}{3}$______$\mathbf{Q}$，　　$\{\frac{2}{3}\}$______$\mathbf{Q}$，

$\mathbf{Z}$______$\mathbf{N}$，　　$\mathbf{R}^- \cup \mathbf{R}^+$______$\overline{\{0\}}$，

$\{x|x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$____$\{x|x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$.

3．集合$\{a,b,c\}$的子集总共有

(A) 5 个　(B) 6 个　(C) 7 个　(D) 8 个

4．集合$\{0\}$与$\varnothing$的关系是

(A) $\{0\}=\varnothing$　　(B) $\varnothing\in\{0\}$

(C) $\{0\}\subset\varnothing$　　(D) $\varnothing\subset\{0\}$

(二) 巩固型题组

5．试写出满足条件$\{x|x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}\subset M\subseteq\{m||\log_3 m|=3\}$的所有集合$M$.

6．若$A=\{x|x=a^2+2a+4,a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y|y=b^2-4b+3,b\in\mathbf{R}\}$，试确定集合$A$、$B$的关系．

7．设集合$\{(x,y)|x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$，试用列举法表示该集合．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

（三）提高型题组

8. 设 $M=\{x|x^2-4>0\}$，$N=\{x|x^2-ax\geqslant x-a\}$，若 $M\subseteq N$，试求实数 a 的取值范围．

9. 已知集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，其中 $a\neq0$，且 $M=N$，求 q 的值．

10. 若关于 x 的不等式 $4x+p<0$ 的每一个解都是不等式 $x^2-x-2>0$ 的解，求 p 的所有可能取值．

11. 设 $A=\{0,1\}$，$B=\{C|C\subseteq A\}$，试确定集合 A、B 的关系．

（四）反馈型题组

12. 选择题

(1) 设 $A=\{x|x\leqslant3\sqrt{2}\}$，$a=\sqrt{15}$，那么（　）

(A) $a\subset A$　(B) $a\notin A$

(C) $\{a\}\in A$　(D) $\{a\}\subset A$

(2) 集合 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ 的真子集共有（　）

(A) 14 个 (B) 15 个 (C) 16 个 (D) 17 个

(3) 设 $P=\{x|x=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$，$M=\{x|x=m^2-4m+5,m\in\mathbf{N}\}$，则集合 P 与 M 的关系为（　）

(A) $P=M$　(B) P⊂M

(C) $P\supset M$　(D) 不同意以上答案

(4) 设函数 $f(x)=\lg(x^2-3x)$ 的定义域为 M，函数 $g(x)=\lg x+\lg(x-3)$ 的定义域为 N，则有（　）

(A) $M=N$　(B) $M\subset N$

(C) $M\supset N$　(D) $M\cap N=\varnothing$

13. 写出集合 $\{0,1,2\}$ 的所有真子集．

14. 已知集合 $A=\{x|\frac{x+1}{x+2}\geqslant0\}$，$B=\{x|x^2+3x+2\geqslant0\}$，试确定 A，B 的关系．

15. 已知 $\{1,2\}\subseteq x\subset(1,2,3,4)$，求集合 x 的所有可能的情形．

16. 已知 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$，求 x，y 值．

17. 设函数 $f(x)=x^2+px+q(p,q\in\mathbf{R})$，$A=\{x|x=f(x),x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x,x\in\mathbf{R}\}$．

(1) 求证：$A\subseteq B$；

(2) $A=\{-1,3\}$ 时，求 B．

18. 设 $A=\{x||x-\frac{1}{2}(a+1)^2|\leqslant\frac{1}{2}(a-1)^2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0\}$，$(a\in\mathbf{R})$，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围．

§1.2 集合的运算

一、考纲要求

理解交集、并集、补集的概念，了解全集的意义，能掌握有关的术语和符号．

二、复习指导(同§1.1)

三、题组设置

(一) 再现型题组

1. 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,3,6\}$，求：$A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$.

2. I 为全集，A,B,C 为 I 的子集，试用阴影分别表示集合：

(1) $A\cap B\cap C$；　(2) $\overline{A\cup B}$；　(3) $\overline{A}\cap B$.

3. 填空题：

(1) $A\cap A=$______；　(2) $A\cap\varnothing=$______；

(3) $A\cap B$ ______ $B\cap A$；　(4) $A\cap B$ ______ A；

(5) $A\cup A$ ______ A；　(6) $A\cup\varnothing$______

(7) $A\cup B$ ______ $B\cup A$；　(8) $A\cup B$ ______ A；

(9) $A\cap\overline{A}=$______；　(10) $A\cap\overline{A}=$______；

(11) $\overline{\overline{A}}=$______；　(12) $A\cap B$ ______ $A\cup B$.

(二) 巩固型题组

4. 若 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，则满足上述条件的集合 A 为__________.

5. 已知 $I=\{x|x^2-3x+2\geqslant 0\}$，$A=\{x||x-2|>1\}$，$B=\{x|\frac{x-1}{x-2}\geqslant 0\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$A\cap B$，$A\cup B$，$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup B$.

6. 已知 $I=\{x|x^2<50,x\in\mathbf{N}\}$，$\overline{M}\cap L=\{1,6\}$，$M\cap\overline{L}=\{2,3\}$．$\overline{M}\cap\overline{L}=\{5\}$，求 M 和 L.

7. (1) 集合 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则　(　)

(A) $M=N$　(B) $M\supset N$

(C) $M\subset N$　(D) $M\cap N=\varnothing$

(2) 已知全集 $I=N$，集合 $A=\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x=4n,n\in\mathbf{N}\}$，则　(　)

(A) $I=A\cup B$　(B) $I=\overline{A}\cup B$

(C) $I=A\cup\overline{B}$　(D) $I=\overline{A}\cup\overline{B}$

8. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$\overline{A}=\{5\}$，写出集合 $M=\{x|x=\log_2|a|\}$ 的全部子集．

(三) 提高型题组

9. 已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$，$C=\{x|2^{x^2+2x-8}=1\}$，且 $A\cap B\supset\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求实数 a 和集合 A.

10. 设集合 $A=\{x|(x+2)(x+1)(x-1)>0\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，$A\cup B=\{x|x+2>0\}$，$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，试求 a,b 的值．

11. 若 $I=\mathbf{R}$，$A=\{x|(\frac{1}{2})^{(x+2)(x-3)}>1\}$，$B=\{x|\log_3(x-a)<2\}$，问当 a 取什么值时，下列各式分别成立．

(1) $A \subset B$;　　(2) $A \cap B \neq \varnothing$;

(3) $A \cap B = \varnothing$;　(4) $\overline{A} \cup B = \overline{A}$.

12. 求满足 $A \cup B = \{a, b\}$ 的集合 A、B 的所有可能的解.

13. 设 $A = \{x \mid x^2 + px + q = 0, x、p、q \in \mathbf{R}\}$，$B = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，已知 $A \cup B = B$，求 p，q 满足的条件.

（四）反馈型题组

14. 选择题

(1) 设 I 是全集，P、Q 是非空集合，且 $P \subset Q \subset I$，下面结论中不正确的是　　(　)

(A) $\overline{P} \cup Q = I$　　(B) $\overline{P} \cap Q = \varnothing$

(C) $P \cup Q = Q$　　(D) $P \cup \overline{Q} = \varnothing$

(2) 设 S、T 是非空集合，且 $S \not\subseteq T$，$T \not\subseteq S$，设 $X = S \cap T$，那么 $S \cup X$ 是

(A) S　(B) T　(C) $\varnothing$　(D) X

(3) 设全集 $I = \{x \mid x^2 - 5x + 6 \leqslant 0\}$，$M = \{x \mid \lg(x-2) \leqslant 0\}$，$N = \{x \mid \frac{x-2}{3-x} \geqslant 0\}$，那么 $\overline{M} \cup \overline{N}$ 等于　　(　)

(A) $\{x \mid 2 < x < 3\}$　　(B) $\{2, 3\}$

(C) $\{2\}$　　(D) $\{3\}$

(4) 集合 $M = \{(x, y) \mid x = \cos\theta, y = \sin\theta, 0 < \theta < \pi\}$，$N = \{x, y) \mid y = x + b\}$，且 $M \cap N \neq \varnothing$，则 b 满足　　(　)

(A) $b \leqslant -\sqrt{2}$ 或 $b \geqslant \sqrt{2}$

(B) $-\sqrt{2} \leqslant b \leqslant \sqrt{2}$

(C) $-\sqrt{2} \leqslant b \leqslant 1$

(D) $-1 < b \leqslant \sqrt{2}$

(5) 集合 $M = \{x \mid x = n, n \in \mathbf{Z}\}$，$N = \{x \mid x = \frac{n}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$，$P = \{x \mid x = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$，则下列各式中正确的是　　(　)

(A) $N \subset M$　　(B) $N \subset P$

(C) $N = M \cup P$　　(D) $N = M \cap P$

15. 填空题

(1) 设 $A = \{x \mid \lg x \geqslant 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - 2x + 1 \leqslant 0\}$，则

$A \cap B =$ ______，　$A \cup B =$ ______，

$\overline{A} \cap B =$ ______，　$A \cup \overline{B} =$ ______.

(2) 设集合 A，B 是全集 $I = \{1, 2, 3, 4\}$ 的子集，若 $\overline{A} \cap B = \{1\}$，$A \cap B = \{3\}$，$\overline{A} \cap \overline{B} = \{2\}$，则 $A =$ ______，$B =$ ______.

(3) 方程 $x^2 - px - q = 0$ 的解集为 A，方程 $x^2 + qx - p = 0$ 的解集为 B，若 $A \cap B = \{1\}$，则实数 $p =$ ______，$q =$ ______，$A \cup B =$ ______.

(4) 设集合 $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$，集合 $A = \{0, 1, 2, 3\}$，集合 $B = \{2, 3, 4\}$，则 $\overline{A} \cup \overline{B} =$ ______，$\overline{A} \cap \overline{B}$ ______.

16. 全集 $I = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$，$A = \{(x, y) \mid \frac{y-3}{x-2} = 1\}$，$B = \{(x, y) \mid y \neq x + 1\}$，求 $\overline{A} \cap \overline{B}$.

17. 已知 $A = \{x \mid x = -t^2, t \in \mathbf{R}\}$，$B = \{x \mid x = 3 + |t|, t \in \mathbf{R}\}$，$I = \mathbf{R}$，求 $\overline{A \cup B}$.

18. 若 $A = \{1, 3, a\}$，$B = \{1, a^2 - a - 1\}$，$A \cup B = A$，求实数 a 的值.

19. 设 $I = \{2, 4, 3 - a^2\}$，$P = \{2, a^2 - a + 2\}$，$\overline{P} = \{-1\}$，求实数 a 的值.

20. 已知集合 $A = \{x \mid \frac{x+1}{2-x} < 0\}$，$B = \{x \mid 4x + p < 0\}$，且 $B \subseteq A$，求实数 p 的取值范围.

21. 设 $A = \{x \mid x^2 + 4x + p < 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}$，若 $A \cap B = A$，求实数 p 的范围.

22. 设集合 $A = \{a^2, a + 1, -3\}$，$B = \{a - 3, 2a - 1, a^2 + 1\}$，若 $A \cap B = \{-3\}$，求实数 a 的值.

23. 集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - ax + (a-1) = 0\}$，$C = \{x \mid x^2 - mx + 2 = 0\}$，已知 $A \cup B = A$，$A \cap C = C$. 求 a，m 的值.

24. (选作)设 $a, b \in \mathbf{R}$，$A = \{(x, y) \mid x = n, y = na + b, n \in \mathbf{Z}\}$，$B = \{(x, y) \mid x = m, y = 3m^2 + 15, m \in \mathbf{Z}\}$，$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 144\}$ 是平面 xoy 内的点集，问是否存在 a，b 使得① $A \cap B \neq \varnothing$，② $(a, b) \in C$ 同时成立.

§1.3 充要条件

一、考纲要求

理解充分条件、必要条件、充要条件的意义，能够初步判断给定的两个命题的充要关系．

二、复习指导

数学是逻辑性很强的学科，它离不开各种等价或非等价的变换、推理，这些都要以充分必要条件的有关概念作指导．

“充要条件”是高中数学的基础，在各章节中都有充分体现，也是高考必考内容之一．

三、题组设置

（一）再现型题组

1．若 $A\Rightarrow B$，则 A 是 B 成立的______，B 是 A 成立的______，$\overline{A}$ 是 $\overline{B}$ 成立的______；若 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$，则 A 是 B 成立的______，$\overline{A}$ 是 $\overline{B}$ 成立的______．

2．若 $A\not\Rightarrow B$，且 $B\Rightarrow A$，则 A 是 B 成立的______条件，若 $A\Rightarrow B$，且 $B\Rightarrow A$，则 B 是 A 成立的______条件，若 $B\Rightarrow A$，且 $\overline{B}\not\Rightarrow\overline{A}$，则是 B 是 A 成立的______条件．

（二）巩固型题组

3．$x=0$ 是 $xy=0$ 成立______条件，$\sqrt{x^2}=-x$ 是 $x<0$ 成立的______条件，$\varnothing$是空集，$\varnothing\subset A$ 是 $A\neq\varnothing$成立的______条件．

4．下列命题中，M 是 N 成立的充要条件是（　）

(A) M：个位数是 5 的自然数，
　　N：能被 5 整除的数

(B) M：$(x-1)(x+3)=0$，N：$x=1$

(C) M：$\alpha=\beta$，N：$\mathrm{tg}\ \alpha=\mathrm{tg}\ \beta$

(D) M：$ax_0+by_0+c=0$，(A，B 不同时为零)，
　　N：点 (x_0,y_0) 在直线 $ax+by+c=0$ 上．

5．判定下列各题中，P 是 Q 的什么条件（充分而必要条件，必要而非充分条件，充要条件，既非充分也非必要条件）

(1) P：$(x-1)(x+2)=0$；Q：$x=-2$.

(2) P：$a\neq0$；Q：$|a|>0$.

(3) P：$x>5$；Q：$x>2$.

(4) P：$b^2=ac$；Q：$a/b=b/c$.

(5) P：$\theta\neq\frac{\pi}{3}$；Q：$\cos\theta\neq\frac{1}{2}$.

(6) P：$x^2>y^2$；Q：$x>y$.

(7) P：$x>y$ 且 $xy>0$；Q：$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$.

(8) P：$(x+3)^2+(y-4)^2=0$；
　　Q：$(x+3)(y-4)=0$，$(x,y\in\mathbf{R})$.

(9) P：$0.1^{\lg x^2}>1$；Q：$|x|<1$.

(10) P：$A\subset B$；Q：$\overline{B}\subset\overline{A}$.

(11) P：$\triangle ABC$ 的一个内角为 60°；
　　Q：$\triangle ABC$ 的三个内角的度数成等差数列．

(12) 设 $h>0$，P：两个实数 a，b 满足 $|a-b|<2h$；
　　Q：两个实数 a，b 满足 $|a-1|<h$，且 $|b-1|<h$.

（三）提高型题组

6．关于 x 的实系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$，有一个正根，一个负根的充要条件是______；有两个正根的充要条件是______；有两个负根的充要条件是______；有一个正根，一根为零的充要条件是______ $x\in\mathbf{R}$，则函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的值恒为正的充要条件是______；恒为负的充要条件是______．

7．设甲、乙、丙是三个命题，如果甲是乙的必要条件；丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件，那么丙是甲的　（　）

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分又不必要条件

8．下列各题中，条件 M 是 N 成立的什么条件？

(A) 充分但不必要条件

(B) 必要但不充分条件

(C) 充要条件

(D) 都不是

(1) M：$F(x_0,y_0)=0$；
　　N：点 $P(x_0,y_0)$ 在曲线 $F(x,y)=0$ 上．（　）

(2) M：$|a|\geq2$；
　　N：关于 θ 的方程 $\sin^2\theta+a\sin\theta+1=0$ 有解．（　）

(3) M：$a>b$；
　　N：$a\log_m p>b\log_m p(0<m<p\leq1)$．（　）

(4) M：$x\neq3$ 且 $y\neq2$；N：$x+y\neq5$．（　）

9．设关于 x 的一元二次不等式 $ax^2-ax+1>0$ 对一切实数都成立，求实数 a 的取值范围．

10. 求证：关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一根为 1 的充要条件是 $a+b+c=0$.

11. 当 m 取什么整数时，关于 x 的一元二次方程：$mx^2-4x+4=0$ 与 $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 的根都是整数.

12. 已知定点 $A(3,0)$，$B(0,3)$，求线段 AB 与抛物线系 $y=-x^2+mx-1(m\in\mathbf{R})$ 有且仅有一个交点的充要条件.

（四）反馈型题组

13. 选择题

判断是什么条件？

(A) 充分不必要条件

(B) 必要不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(1) $\operatorname{tg} x=1$ 是 $x=\frac{5\pi}{4}$ 的 （　）

(2) 设命题甲为：$0<x<5$；命题乙为：$|x-2|<3$，那么甲是乙的 （　）

(3) 复数 $a+bi$ 为纯虚数是 $a=0$ 的 （　）

(4) $D^2=4F$ 是圆 $x^2+y^2+Dx+Ex+F=0$ 与 x 轴相切的 （　）

(5) 如果 x,y 是实数，那么“$xy>0$”是“$|x-y|=|x|+|y|$”的 （　）

(6) $a=-1$ 是直线 $x+ay=2a+2$ 与 $ax+y=a+1$ 平行（不重合）的 （　）

(7) “$\lg x^2=0$”是“$x=1$”的 （　）

(8) “$x>0$”是“$x^2>0$”的 （　）

(9) “$\lg f(x)>\lg g(x)$”是：“$f(x)>g(x)$”的 （　）

(10) 如果 x、y 是实数，那么“$\cos x\neq\cos y$”是“$x\neq y$”的 （　）

14. 填空题

(1) 已知真命题“$a\geqslant b\Rightarrow c>d$”和“$a<b\Rightarrow e\leqslant f$”，则“$c\leqslant d$”是“$e\leqslant f$”的______条件.

(2) 使直线 $mx+y-3m+1=0$ 的图像不通过第一象限的实数 m 的取值范围是______.

(3) $a+c=2b$ 是 a,b,c 成等差数列的______条件.

(4) $\begin{cases}x_1>3\\x_2>3\end{cases}$ 是 $\begin{cases}x_1+x_2>6\\x_1x_2>9\end{cases}$ 的______条件.

(5) $x\in A\cap B$ 是 $x\in A$ 的______条件，$x\in A\cup B$ 是 $x\in A$ 的______条件.

15. 求证：二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是偶函数的充要条件是 $b=0$.

16. 为了使关于 x 的方程 $x^2-2mx+m^2-1=0$ 的两根均大于 -2 小于 4，求实数 m 的取值范围.

17. 已知 $M=\{(x,y)\mid y^2=2x\}$，$N=\{(x,y)\mid (x-a)^2+y^2=9\}$，求 $M\cap N\neq\varnothing$ 的充要条件.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=P^n+q(P\neq0,P\neq1)$，求数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的充要条件.

§1.4 综合法、分析法和分析综合法

一、考纲要求

能熟练应用综合法、分析法、分析综合法(即联合使用分析法和综合法)分析问题解决问题.

二、复习指导

综合法、分析法、分析综合法是证明数学问题的重要方法,在高考中是必考内容之一,掌握这三种方法尤其分析综合法,对提高分析问题、解决问题的能力有重要作用.

三、题组设置

(一) 再现型题组

1. 已知:$2\lg\frac{x+y}{2}=\lg x+\lg y$,求证:$x=y$.

2. 求证:$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>\sqrt{5}-2$.

3. 已知:$z_1,z_2\in\mathbf{C}$,$z_1\cdot z_2=0$.
求证:z_1,z_2 中至少有一个为零.

(二) 巩固型题组

4. 求证:$\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

5. 若 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$.
求证:x,y,z 成等差数列.

67105

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com