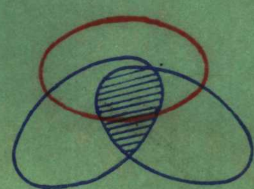
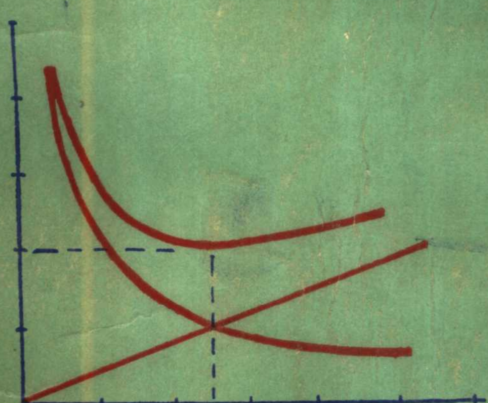
管理的数量方法

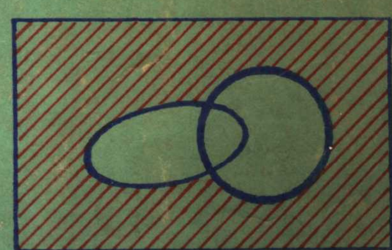
理论和习题

〔美〕约翰·E·厄尔曼 著

上海铁道学院运输系 译







人 民 铁 道 出 版 社

管理的数量方法

理论和习题

〔美〕约翰·E·厄尔曼 著
上海铁道学院运输系 译

人民铁道出版社
1980年·北京

内容提要

本书对管理科学所需要的数量方法作了比较详细的叙述，主要分确定性模型和概率性模型两部分。书中对网络分析、分配论、存贮论、线性规划、排队论、统计分布、决策论等作了介绍，并对质量管理、设备管理、预测、可靠性理论等作了阐述，有一定的参考价值。本书的特点是数学表达方式不多，主要是通过近400个例题来展开的，使读者容易理解。

本书可供大专院校管理专业师生、企业管理和财经管理工作者、科研和工程技术人员参考。

参加本书翻译的有：黄世玲、任家聪、杨洪益、徐大祐。

管理的数量方法
理论和习题
THEORY AND PROBLEMS
of
QUANTITATIVE METHODS IN MANAGEMENT
〔美〕约翰·E·厄尔曼 著
MCGRAW-HILL BOOK COMPANY,1976.7.
上海铁道学院运输系 译
人民铁道出版社出版
责任编辑 张显善 封面设计 翟达
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
人民铁道出版社印刷厂印
开本 787×1092 1/16 印张．21.5 字数·532 千
1980年2月 第1版 1980年2月 第1次印刷
印数：0001—18,500 册 定价：2.20 元

译者的话

本书为上海市技术经济及管理现代化研究会的《现代管理科学译丛》之一。

现代管理科学与数学有着密切的关系。由于电子计算机这个现代化管理手段的出现，使管理工作者有可能愈来愈多地利用数量方法来解决一些管理中的理论问题和实际问题。目前，国外管理科学所接触到的数学分支很多，范围极为广泛。本书作者吸收了在实际管理工作中有用的数量方法（数学模型），并用了大量例题、解题和补充题来阐明各种数量方法在管理工作中的具体应用。

本书具有深入浅出的特点，使具有一般数学水平的管理工作人员可以顺利阅读。

必须指出，由于社会制度的不同，书中的某些观点和内容都存在一些问题，请读者阅读时注意。译文错误或不当之处，望批评指正。

上海铁道学院运输系

1979年3月

序　言

本书意图作为数量方法、管理科学、运筹学和应用统计方面现行教科书的补充读物，也可作为这些方面的教科书或参考书。在许多可能涉及的论题中，本书集中于那些在实际工作中有广泛用途的论题。此外，本书还着重于解题的技术，而所用的工具仅限于手用计算机（计算器）。所有的概念都是通过大量的例题和解题来展开的。在附录中有全套专门的统计表和其他各类表格。

本书大致分为确定性模型（第1～7章）及概率性模型（第8～19章）两部分，所需的知识主要是大学代数，有些公式是用基础微积分推导的，但除第3章外，没有需用微积分求解的问题。矩阵方法在第7章和第10章未加推导地应用了，但在第7章中有关于这方面的说明，可使不熟悉矩阵的读者顺利地阅读，而第10章中的矩阵方法，只是所提出的两个可行方法中的一个。作者试图将由于数学方法所造成的困难减至最少程度。

约翰·E·厄尔曼

1976年7月

目 录

第一章　基本成本的计算

作为投入决策的成本

企业成本一般包含固定成本和变动成本，变动成本是随销售量或有形产量的不同而变化的。固定成本包括设备的固定费用和其他管理费用；每一单位的变动成本主要包含直接人工费、直接材料费和其他直接分摊的投入量，如动力。设F＝固定成本、v＝每一单位的变动成本、X＝产量。产量X对总成本C的关系式为：

$$C=F+vX \tag{1.1}$$

例1.1.　当固定成本为10,000元和每一单位的变动成本为0.60元时，生产100,000件的总成本是多少？

这里，$F=10,000$，$v=0.60$，$X=100,000$，

由式（1.1）$C=10,000+(0.60)(100,000)=70,000$元（答）

变动成本v是C的斜率，C关于X的微分为$\frac{dC}{dX}=v$。

有时，F与v显然都是未知数，需要从二个C值来进行计算；即已知产量X_1的总成本C_1和产量X_2的总成本C_2，假设是一条直线的关系，成本函数如图1—1所示。那么，F是垂直轴（C）的截距，v是斜率，根据几何原理：

$$v=\frac{C_2-C_1}{X_2-X_1} \tag{1.2}$$

以及　$$F=C_1-vX_1=C_2-vX_2 \tag{1.3}$$

例1.2.　成本函数是线性的：当生产2000件，总成本为9000元；当生产4400件，总成本是12,600元。(*a*)求固定成本和每件变动成本；(*b*)求5400件的总成本。

(*a*)　由式（1.2）或图1—1：

$$v=\frac{12,600-9000}{4400-2000}=1.50\text{元/每件（答）}$$

由式（1.3）：

$F=9000-(1.50)(2000)=6000$元（答）

(*b*)　由式(1.1)：$C=6000+(1.50)(5400)=14,100$元　（答）

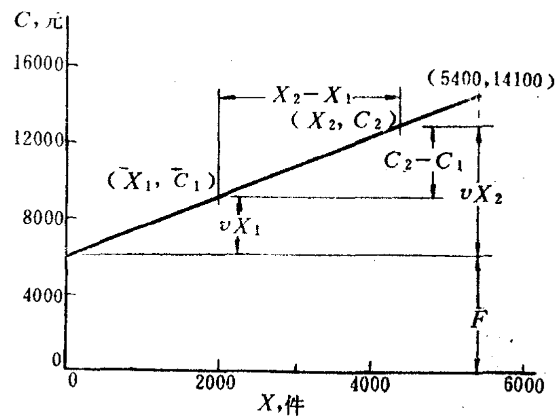


图　1—1

盈亏转折分析

利润计算

当每件按金额r出售，总收入R是：

$$R=rX \tag{1.4}$$

以及利润是：

$$P=R-C \tag{1.5}$$

作R和C于同图（图1—2），给出交点或盈亏转折点。这里，$P=R-C=0$，即$R=C$，由式（1.1）和（1.4），这个盈亏转折点X_b为：

$$rX_b=F+vX_b \quad 或 \quad X_b=\frac{F}{r-v} \tag{1.6}$$

若$X>X_b$，这里有利润；若$X<X_b$，利润是负数，即这里有亏损，数量$r-v$称为利润基值。

例1.3. 在某生产制造过程中，固定成本为10,000元，每件的变动成本是0.40元和每件的售价为0.60元。求（a）盈亏转折点，（b）盈亏转折量。

（a）$F=10,000$，$v=0.4$，$r=0.6$；由式（1.6）：

$$X_b=\frac{10,000}{0.6-0.4}=50,000件 \qquad （答）$$

（b）在式（1.1）或（1.4）中，用$X=X_b$替代，求得相应的数量R_b：

$$R_b=(0.6)(50,000)=30,000元 \qquad （答）$$

或 $$R_b=10,000+(0.4)(50,000)=30,000元 \qquad （答）$$

其结果如图1—2所示。

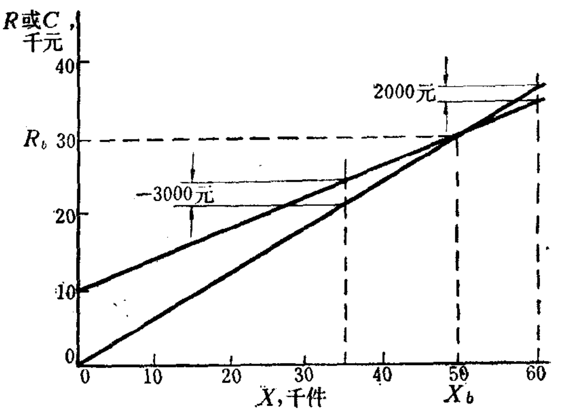


图 1—2

例1.4. 在例1.3中，求数量为（a）60,000，（b）35,000件的利润（亏损）

由式（1.5）：

（a）　$P=R-C=(0.6)(60,000)-[10,000+(0.4)(60,000)]=2000元$　（答）

（b）　$P=(0.6)(35,000)-[10,000+(0.4)(35,000)]=-3000元（亏损）$　（答）

两种方案的评价

给出1和2两个过程，以固定成本为F_1和F_2，每件变动成本为v_1和v_2，应用盈亏转折分析来决定X达到什么数量才能从一个过程替换为另一个过程，或者还是全部一个过程。用二个成本函数的等式（1.1）给出盈亏转折点X_b：

$$F_1+v_1X_b=F_2+v_2X_b$$

$$X_b=\frac{F_1-F_2}{v_2-v_1} \tag{1.7}$$

如果X_b是正数，$F_1>F_2$和$v_1<v_2$，这是一个典型的事例，是由于采用了花钱较多的自动化机器，从而节约了直接人工费。如果$F_1>F_2$和$v_1>v_2$，成本线将会背离，同时，过程1将被证实为不经济的。

例1.5. 某工厂有两台机器，它们的成本如右表：

	机器　A	机器　B
固定成本，元	1200	2000
每件变动成本，元/件	0.75	0.50

求（a）　盈亏转折点；（b）　在盈亏转折条件下的总成本。

（a）　由式（1.7）：

$$X_b=\frac{2000-1200}{0.75-0.50}=3200件（答）$$

如果定货量$Q<3200$，使用机器A；如果$Q>3200$，使用机器B。

（b） 取用机器A或机器B的数据代入式（1.1），求得3200件在盈亏转折时的总成本C_b：

$C_b=2000+0.50(3200)=3600$元 （答）

或

$C_b=1200+0.75(3200)=3600$元 （答）

图1—3是按这个例题绘制的比例图。

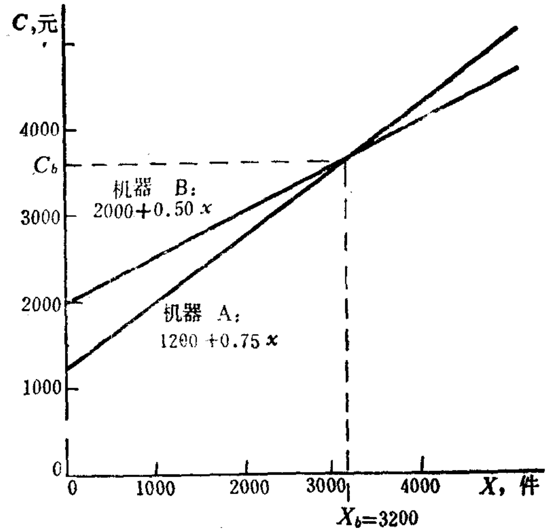


图 1—3

经 济 尺 度

当许多企业活动的总成本以及设备和机器的总成本与装备的生产能力作图画出曲线时，其经验的关系结果由下式给出：

$$C=aK^b \tag{1.8}$$

C是总成本，K是生产能力，以及a与b是常数。当$0<b<1$时，成本函数如图1—4(b)所示，即总成本比生产能力增长得较慢些，这叫做经济尺度。对$b>1$的事例，则显示不经济尺度。式（1.8）的两端取对数，

$$\log C=\log a+b\log K \tag{1.9}$$

于是，在图纸（对数图纸）上的二轴取对数标度，式（1.8）可直接地描绘为一条直线，如图1—4(a)所示。

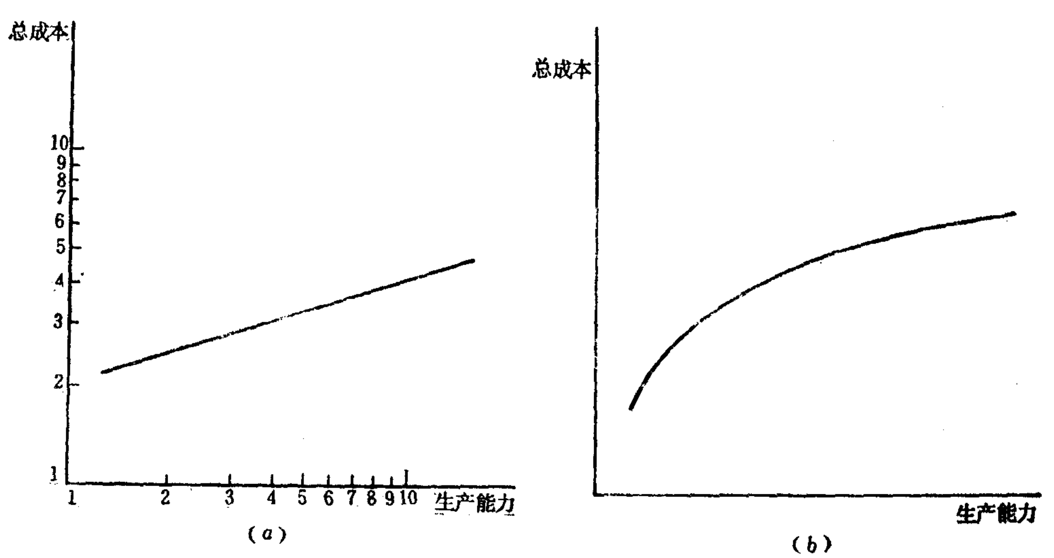


图 1—4

例1.6. 某电力厂的一个部门，它的成本函数$C=1.3K^{0.7}$。这里，C是以百万元计的总成本和K是以兆瓦计的生产能力，求一座800兆瓦工厂的总成本。

由式（1.8），$C=(1.3)(800)^{0.7}$，这个关系式可使用带有X^Y特性的计算机直接计算出来，或者用式（1.9）的对数方法。

$$\log C=\log 1.3+(0.7)(\log 800)=0.1139+(0.7)(2.9031)=2.1461$$

$C=\log^{-1}2.1461=140$，就是140百万元(答)

给出一座工厂的总成本，用式（1.8）“按比例增加”计算另外工厂的总成本。设有1和2的二座工厂，那么，

$$\frac{C_1}{C_2}=\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^b \tag{1.10}$$

例1.7. 设$b=0.7$，以及一座800兆瓦电力厂的总成本为140百万元，一座1100兆瓦电力厂的估计总成本是多少？

以工厂1表示1100兆瓦电力厂，那么，由式（1.10）

$$=C_2\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^b=140\left(\frac{1100}{800}\right)^{0.7}=140(1.375)^{0.7}=140(1.250)$$

$=175$，就是175百万元（答）

根据一组总成本和生产能力的数据来估计a与b的方法，见题17.2，有关经济尺度的有形论证见题1.9。

经 验 曲 线

当反复地做着一件相同的活，根据经验表明象那样的活继续做下去，每件活所花费的时间就会渐渐减少。特别是以连续个生产项目中的一定数量产品的平均生产时间为基值，作图画出其曲线，其结果在对数方格上是一条直线（图1—5）。在实践中，经验比率（图中以斜率表示）是从实际经营推导而得的结果（题17.15）。因而，在估计一项新的活，要取用过去类似工作的经验比率，它的分析步骤说明如下。

符号

x=单位组的序列数目；

t_1=第一个单位所需时间；

u_x=第x个单位所需时间（x的边际时间）；

T_x=第一个x单位组所需总时间；

a_x=第一个x单位组中每个单位的平均时间；

K=a_x的经验曲线的斜率；

P=用百分率表示a_x的经验曲线的斜率。

上述定义从属于一定的基本关系：

1. 第x个单位所需时间是用第一个x单位组的总时间减去第一个（$x-1$）单位组的总时间求得，就是：

$$u_x=T_x-T_{x-1} \tag{1.11}$$

2. 第一个x单位组中每个单位的平均时间是用第一个单位组的总时间除以连续个单位组x求得，即：

$$a_x=\frac{T_x}{x}$$

(1.12)

在图 1 — 5 中，a_x线在 $x=1$（即$\log x=0$）处有$\log t_1$ 的截距，它的斜率是 $-k$，向下的斜率都是负数。由于在对数纸上是一条直线，它具有与式（1.9）和（1.8）的某种相似之处：

$$\log a_x=\log t_1-k\log x \tag{1.13}$$

取反对数，

$$a_x=t_1x^{-k} \tag{1.14}$$

由式（1.12）和（1.14）：

$$T_x=x(t_1x^{-k})=t_1x^{1-k} \tag{1.15}$$

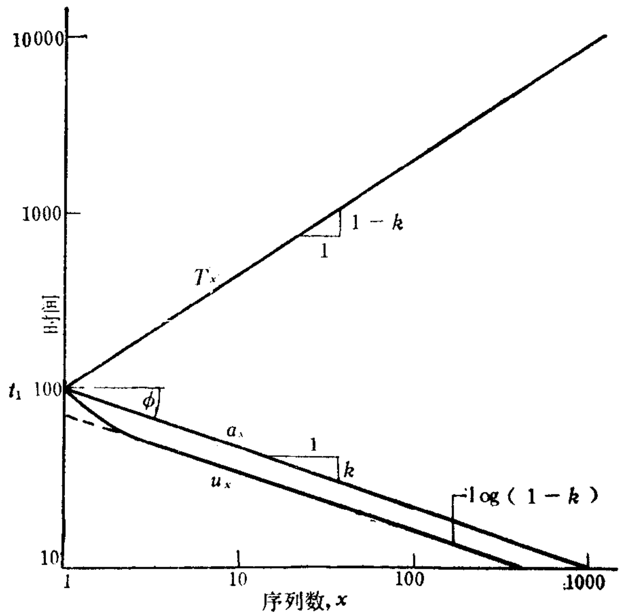


图 1—5

T_x线显示于图 1 — 5 的上部，通常作图是容易的。

把式（1.15）代入式（1.11）求得u_x：

$$u_x=t_1x^{1-k}-t_1(x-1)^{1-k}=t_1[x^{1-k}-(x-1)^{1-k}] \tag{1.16}$$

如图 1 — 5 所示，函数u_x首先是与a_x偏离，然后与a_x平行，用二项式定理将式（1.16）的第二项展开：

$$u_x=t_1[x^{1-k}-x^{1-k}+(1-k)x^{-k}-\text{各项以 } x \text{ 的负较高次幂}]$$

当 $x>10$，最后一项是略而不计的，所以

$$u_x\approx t_1x^{-k}(1-k)=a_x(1-k)\quad x>10 \tag{1.17}$$

在图 1 — 5 的对数方格上，这是一条直线平行于a_x，二线相距$\log(1-k)$。

另一个有用的公式是，为了求取总时间$T_{a,b}$需要使单位数目 a 通过 b（$b>a$）。由于$T_{a,b}=T_b-T_{a-1}$，式（1.15）给出：

$$T_{a,b}=t_1[b^{1-k}-(a-1)^{1-k}] \tag{1.18}$$

根据习惯，经验曲线常常是用它的经验百分率 p 来表示的，这是计算它的斜率的又一条途径。每个序列数目的二倍减去a_x折合成百分率 p。例如，

$$p=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_4}{a_2}=\frac{a_{60}}{a_{30}}=\frac{a_{4000}}{a_{2000}}$$

或

$$p=\frac{a_{2x}}{a_x} \tag{1.19}$$

当 $x>10$，下式也是近似正确

$$p=\frac{u_{2x}}{u_x} \tag{1.20}$$

以式（1.14）代入式（1.19），求得 p 和 k 之间的关系：

$$p=\frac{(2x)^{-k}}{x^{-k}} \tag{1.21}$$

或

$$k=\frac{-\log p}{\log 2}=(-3.32)\log p \tag{1.22}$$

为了方便地画出a_x线，运用下面角ϕ的关系式是有用的：

$$k=\tan\phi \tag{1.23}$$

图 1—6 是一份 k、p和ϕ的完全换算图。

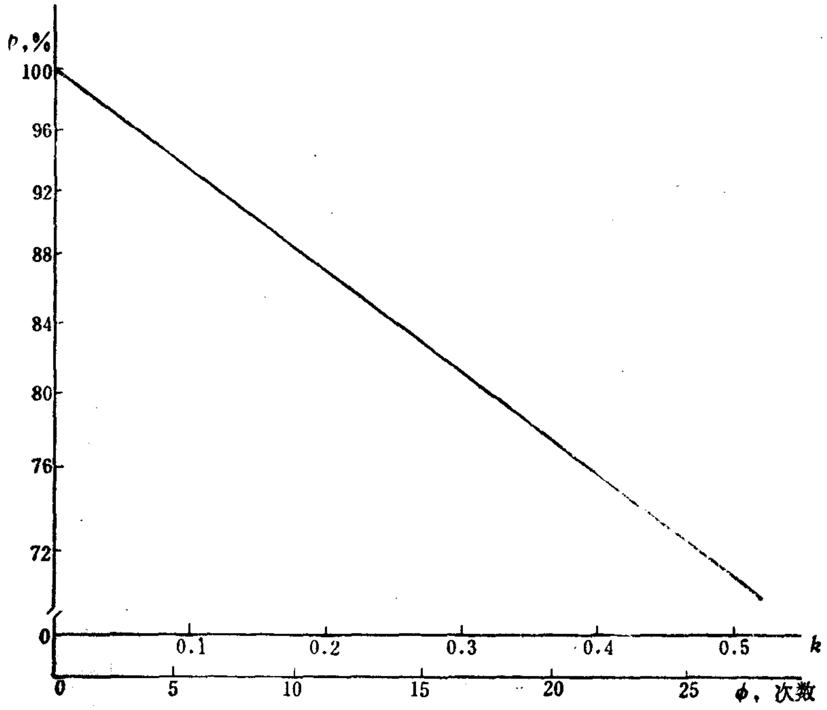


图 1—6

例1.8. 一批90台机器，装配其中第一台机器花去100小时，设经验曲线百分率为80%，求（a）这一批机器的平均装配时间；（b）这批机器的总装配时间；（c）最后一台机器的装配时间；（d）最后10台机器的总装配时间；（e）第64台机器的装配时间；（f）最先32台机器的平均装配时间。

（a）由式（1.22）或图 1—6：

$$k=(-3.32)\log(0.8)=(-3.32)(\bar{1}.9031)=(-3.32)(-0.0969)=0.322$$

由式（1.14）：

$$a_{90}=100(90)^{-0.322}=23.48\text{小时/台（答）}$$

（b）由式（1.12）：

$$T_{90}=90(23.48)=2113.2\text{小时（答）}$$

（c）由式（1.17），由于$x>10$，

$$u_{90}=a_{90}(1-k)=23.48(1-0.322)=15.92\text{小时（答）}$$

（d）由式（1.18）：

$$T_{80,90}=100(90^{1-0.322}-80^{1-0.322})=100(21.1337-19.5117)$$
$$=162.2\text{小时（答）}$$

（e）由式（1.17）：

$$u_{64}=100(64)^{-0.322}(1-0.322)=17.77\text{小时（答）}$$

（f）可用（a）的方法确定，但也可用式（1.19），用$p=0.8$，依次乘前面的a_x，每次乘x的二倍。

x	1	2	4	8	16	32
a_x	100	80	64	51.2	40.96	32.77 小时/台(答)

解　　题

盈亏转折分析

1.1. 成本函数不是线性的，对于非线性函数：

$$C=a+bX+CX^2$$

有三对的点是已知的：

数量X，单位(00)	$X_1=6$	$X_2=10$	$X_3=20$
成本合计C,元(000)	$C_1=104$	$C_2=160$	$C_3=370$

（a）求系数a，b和c；（b）求边际或单位增量成本。

（a）解下列方程组：

$$y_1=a+bx_1+cx_1^2$$
$$y_2=a+bx_2+cx_2^2$$
$$y_3=a+bx_3+cx_3^2$$

同样对于a，b和c使满足一般方程式$y=a+bx+cx^2$。

用拉格朗日插值方法求证，列出：

$$y=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \quad (1.24)$$

这就直接给出了需要的方程式。以表列数据（C为y，X为x）代入式（1.24），

$$C=104\frac{(X-10)(X-20)}{(6-10)(6-20)}+160\frac{(X-6)(X-20)}{(10-6)(10-20)}+370\frac{(X-6)(X-10)}{(20-6)(20-10)}$$

$$=\frac{13}{7}(X^2-30X+200)-4(X^2-26X+120)+\frac{37}{14}(X^2-16X+60)$$

$$=\left[\frac{13}{7}(200)-4(120)+\frac{37}{14}(60)\right]+X\left[\frac{13}{7}(-30)+4(26)+\frac{37}{14}(-16)\right]$$

$$+X^2\left(\frac{13}{7}-4+\frac{37}{14}\right)=\frac{13(200)-28(120)+37(30)}{7}$$

$$+X\frac{13(-30)+28(26)-37(8)}{7}+X^2\frac{26-56+37}{14}=50+6X+\frac{1}{2}X^2\text{(答)}$$

（b）边际成本或单位增量成本是由增加一个单位的产量而产生的，它是以C的变换比率给出的，即用：

$$\frac{dC}{dX}=b+2CX=6+X\quad\text{(答)}$$

当需要有一个近似的连续函数，取代二个或更多个不连续函数时，上述类型的成本函数有时是适用的。上述函数作图1—7。这里，有三条近似切线的直线，在实际工作中，这种特征的产生是由于加班，额外班次，廉价原料用尽而采用较为昂贵的原料和其他等等原因（有关其他方法，见题1.4）。

1.2. 在题1.1中，设销售价格每件为200元，（a）确定利润函数；（b）给出利润为0时的二个数值；（c）求最大利润额。

（a）题1.1的件数：

$$r=\frac{200(100)}{1000}=20$$

由式（1.5）：

$$P=R-C=20X-(50+6X+\frac{1}{2}X^2)$$

$$=-\frac{1}{2}X^2+14X-50(\text{答})$$

（b）收入线 $R=20X$ 如图 1—7 所示，图中指出当 $P=0$ 时，这里有二点，它们就是下列方程式的根：

$$-\frac{1}{2}X^2+14X-50=0$$

或

$$X=\frac{-14\pm\sqrt{196-100}}{-1}=4.2,23.8$$

即，420件及2380件（答）

较低的点是盈亏转折点，上面的点是利润限制点。

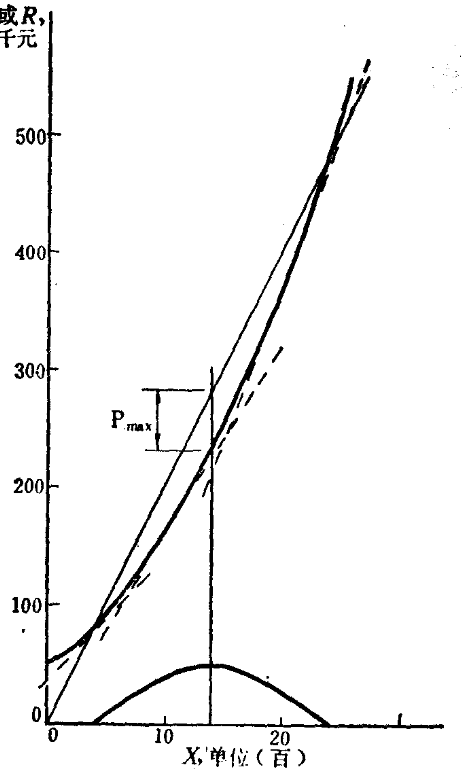


图 1—7

（c）当利润是最大时，X的值是由下式确定

$$\frac{dP}{dX}=-X+14=0\text{ 或 }X=14$$

代人P，最大利润为：

$$P_{max}=-\frac{1}{2}(14)^2+14(14)-50=48,\text{即}48,000\text{元（答）}$$

利润函数曲线如图 1—7 底部所示。

1.3. 盈亏转折点也可以直接用金额来表示，不涉及到件数。（a）求用R，C和F来表示的V_b；（b）如果收入额为42,000元，总的变动成本为28,000元和固定成本为 10,000 元，那么，盈亏转折量应为多少？

（a）考虑图 1—8。从F到C作成本线，然后在45°处作收入线（如果二轴取相同的标度，它们通常都是在45°处），V_b就可以直接读出或从相似三角形$FF'V_b$和$FF''C$计算出来。因而，

$$\frac{V_b}{V_b-F}=\frac{R}{C-F}$$

$$V_b(C-F)=RV_b-RF$$

$$V_b=\frac{RF}{R-C+F}\text{（答）}\tag{1.25}$$

如果使$P=R-C$表示利润：

$$V_b=\frac{RF}{P+F}\tag{1.26}$$