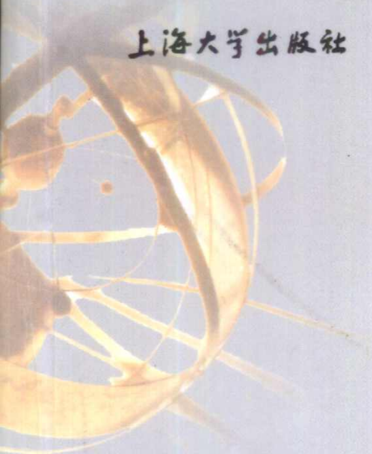
上海大学出版社



高等数学
学习指导

许凤良◎编著

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

572

高等数学学习指导

（理工类）

许凤良　编著

上海大学出版社
·上　海·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导／许凤良编著. —上海：上海大学出版社，2002.7

ISBN 7-81058-425-1

Ⅰ.高... Ⅱ.许... Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 041332 号

上海大学出版社出版发行

(上海市延长路 149 号 邮政编码 200072)

上大印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 890×1240 1/32 印张 20.75 字数 585 千字

2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷

印数:1～2100

定价:38:00 元

前　言

在钱伟长校长的倡导下，上海大学于 1985 年开始试行三学期制。为了提高学生的自学能力，很需要有与教学同步的学习辅导书，又需要有每学期终了的复习指导书，本书就是按三学期制的要求编写的。本书中的高等数学 A(一)、高等数学 A(二)、高等数学 A(三)三大部分以及每一部分的练习题、自测题、复习提纲、考试题等都是和三学期制的教学计划和课程内容紧密结合的，它是编者多年来从事三学期制教学的结晶。同时，本书编写的依据是《高等数学教学基本要求》，编写的范本是高等教育出版社出版，同济大学数学教研室主编的《高等数学》教科书，因此，它不仅仅只是对三学期制适用，也可作为理工类专业学生学习《高等数学》一书的学习指导书。

编者在长期从事高等数学的教学中，发现学生在学习高等数学中存在一些困惑，常常产生一些掌握误区，比如对基本概念的错误理解、对基本理论的错误判断以及错误的解题方法等，为此，编者以自己的教学经验和体会，日积月累地有针对性地编写了一些辅导材料，对学生在学习中容易产生的各种问题作了深入浅出的剖析和专题论述，为了开导学生的学习窍门和训练学生的解题技巧，编者特别注重解题分析，在解题上，除了例举各种正确的解题方法外，还对各种方法的优劣进行了比较，通过年复一年的教学，确实起到了帮助学生扫平障碍，活跃思路，掌握方法，提高能力的作用。

感谢校领导和出版社的大力支持。现编者将凝聚着自己一点心血的辅导材料充实、完善、整理、出版。书中突出了知识的连贯，强调了解题训练，还增加了强化教育的内容，目的是帮助更多的学生学懂学好《高等数学》这门课程。

关于解题训练，编者认为：加强教师指导下学生的认知活动，提

高学生学习的主动性和进取性，教师要努力创造有利于学生独立思考的情境，解题训练无疑是高等数学教学的一种重要手段。为此，本书结合历届研究生入学试题，选编了补充习题、自测题等，可供学生选用，亦可作为教师在习题课上的教学素材。

关于强化教育，编者将自己在上海大学基础强化班教学中的教材即本书的第五章《极限续论》一并编入本书，不作基本要求，目的是让学生在学好高等数学的基础上提高数学分析能力。

由于时间仓促和限于编者的水平，书中的缺点、问题不少。热忱欢迎广大师生、读者指正。

编者

2001 年 7 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一部分　高等数学 A(一)

第二部分　高等数学 A(二)

第三部分　高等数学 A(三)

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一部分

高等数学 A(一)

第一章　函数和极限

一、关于函数的四个特性

1. 函数的有界性

定义 1　设 $y=f(x)$ 在数集 A 上有定义。若 $\exists M>0$，$\forall x\in A$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$ 在 A 上为有界函数。否则，即 $\forall M>0$，$\exists x_0\in A$ 有 $|f(x_0)|>M$，则称 $y=f(x)$ 在 A 上为无界函数。

几何上，若能找到两条平行的关于 Ox 轴对称的水平直线 $y=\pm M(M>0)$，使 $y=f(x)$ 在 A 上的图像夹在两直线 $y=\pm M$ 之间的，则称 $y=f(x)$ 在 A 上为有界函数。而无界函数是找不到具有上述性质的两条平行水平直线的。

分析上，若证明 $y=f(x)$ 在 A 上有界，则只要找到一正数 M，使 $\forall x\in A$ 有 $|f(x)|\leqslant M$ 即可。而若证明 $y=f(x)$ 在 A 上无界，则 $\forall M>0$，由 $|f(x)|>M$，只要找 A 上一点 x_0，使 $|f(x_0)|>M$ 即可。这个 x_0 既可由不等式 $|f(x)|>M$ 解 x 求得，又可用观察法求得。

定义 2　设 $y=f(x)$ 在数集 A 上有定义，若 $\exists p,q\in \mathbf{R}$，$\forall x\in A$，有 $q\leqslant f(x)\leqslant p$，则称 $y=f(x)$ 在 A 上是有上界 p、下界 q 的有界函数。若 $\exists p\in\mathbf{R}$，$\forall x\in A$，有 $f(x)\leqslant p$（或 $\geqslant q$），则称 $y=f(x)$ 在 A 上是有上界 p（或下界 q）的函数。

例 1　证明 $y=f(x)=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为无界函数。

证　$\forall M>0$，由 $|f(x)|=|x\sin x|>M$，因 $\sin x=1$，$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\cdots$

令 $k_0=[M]+1$，$\exists x_0=2k_0\pi+\frac{\pi}{2}\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x_0)|=x_0>k_0>M$，

故 $y=f(x)=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为无界函数。

2. 函数的单调性

定义 若 $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$,有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$),则称 $y = f(x)$ 在 A 上为严格单调上升(或单调下降)函数,简称单调上升(或单调下降)函数,用↗(或↘)表示。

注:$y = f(x)$ 在 A 上单调下降的箭头表示不可为"↙"。

若 $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$,有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$),则称 $y = f(x)$ 在 A 上为一般单调上升(或单调下降)函数。

在书本中若无特殊说明,函数单调性讨论都指严格单调性的讨论。

对数列$\{x_n\}$:

若 $\forall n$ 有 $x_{n+1} - x_n > 0$ (或 < 0),则称$\{x_n\}$为单调上升(或下降)数列。

若 $\forall n$ 有 $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$ (或 $\leqslant 0$),则称$\{x_n\}$为一般单调上升(或下降)数列。

注:验证一个函数 $y = f(x)$ 在区间 A 上的单调性。根据定义,必须在 A 上任取两点来比较其函数值大小(在第三章可用导数符号来讨论函数单调性)。

例 2 若 $y = f(x)$ 在$[-l, l]$上为偶函数,又 $f(x)$在$[0, l]$上↗,证明 $y = f(x)$ 在$[-l, 0]$上↘。

证 $\forall x_1, x_2 \in [-l, 0]$, $-l \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 0$, $l \geqslant -x_1 > -x_2 \geqslant 0$。

因 $f(x)$为偶函数,又在$[0, l]$上↗,所以

$$f(x_2) - f(x_1) = f(-x_2) - f(-x_1) < 0。$$

故 $y = f(x)$ 在$[-l, 0]$上↘。

3. 函数的奇偶性

(1) **定义** 若 $y = f(x)$ 在对称区间 A 上有定义, $\forall x \in A$,此时,$-x \in A$,有 $f(-x) = -f(x)$(或 $f(-x) = f(x)$),则称 $y = f(x)$ 在 A 上为奇函数(或偶函数)。

几何上,若 $y = f(x)$ 在 A 上为奇(或偶)函数,则 $y = f(x)$ 在 A 上的图像关于原点(或 Oy 轴)对称。

(2) $y = f(x)$ 在对称区间 A 上非奇非偶函数的判定:

几何上，若曲线 $y=f(x)$ 在 A 上的图像既不关于 Oy 轴对称，又不关于原点对称，则 $y=f(x)$ 在 A 上必是非奇非偶函数。

分析上，它是奇偶性定义的否定命题。因此，只要验证 $\exists x_1\in A, x_2\in A$，使得 $f(-x_1)\neq -f(x_1)$，同时，$f(-x_2)\neq f(x_2)$，则 $y=f(x)$ 在 A 上为非奇非偶函数。

注意：上述两式绝不是 $f(-x)\neq -f(x)$，$f(-x)\neq f(x)$。

(3) 由函数的奇偶性的几何特性，可以容易地把定义在 $[0,l]$ 上的函数 $y=f(x)$ 在 $[-l,0]$ 进行延拓，以得到一个新的函数 $y=F(x)$，使 $y=F(x)$ 在 $[-l,l]$ 上为奇函数或偶函数。

① 把 $y=f(x)$，$x\in[0,l]$，$f(0)=0$ 作关于原点对称的图像，如图 1-1 所示。

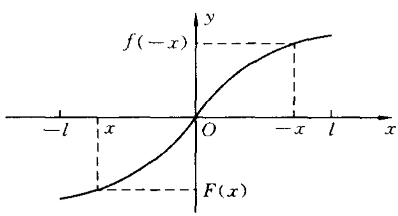


图 1-1

于是
$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x\leqslant l, \\ 0, & x=0, \\ -f(-x), & -l\leqslant x<0 \end{cases}$$

在 $[-l,l]$ 上为奇函数。

② 把 $y=f(x)$，$x\in[0,l]$ 作关于 y 轴对称图像，如图 1-2 所示。

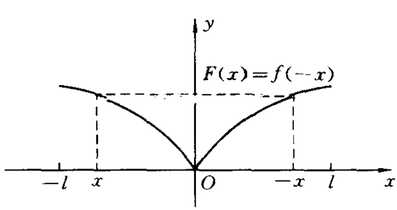


图 1-2

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com