

上海大学出版社

高等数学 学习指导

许凤良◎编著

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

372

65
117

高等数学学习指导

(理工类)

许凤良 编著

上海大学出版社

· 上 海 ·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导 / 许凤良编著. —上海: 上海大学出版社, 2002. 7

ISBN 7-81058-425-1

I. 高... II. 许... III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 041332 号

上海大学出版社出版发行

(上海市延长路 149 号 邮政编码 200072)

上大印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 890×1240 1/32 印张 20.75 字数 585 千字

2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1~2100

定价: 38.00 元

前 言

在钱伟长校长的倡导下,上海大学于1985年开始试行三学期制。为了提高学生的自学能力,很需要有与教学同步的学习辅导书,又需要有每学期终了的复习指导书,本书就是按三学期制的要求编写的。本书中的高等数学A(一)、高等数学A(二)、高等数学A(三)三大部分以及每一部分的练习题、自测题、复习提纲、考试题等都是和三学期制的教学计划和课程内容紧密结合的,它是编者多年来从事三学期制教学的结晶。同时,本书编写的依据是《高等数学教学基本要求》,编写的范本是高等教育出版社出版,同济大学数学教研室主编的《高等数学》教科书,因此,它不仅仅只是对三学期制适用,也可作为理工类专业学生学习《高等数学》一书的学习指导书。

编者在长期从事高等数学的教学中,发现学生在学习高等数学中存在一些困惑,常常产生一些掌握误区,比如对基本概念的错误理解、对基本理论的错误判断以及错误的解题方法等,为此,编者以自己的教学经验和体会,日积月累地有针对性地编写了一些辅导材料,对学生在学习容易产生各种问题作了深入浅出的剖析和专题论述,为了开导学生的学习窍门和训练学生的解题技巧,编者特别注重解题分析,在解题上,除了例举各种正确的解题方法外,还对各种方法的优劣进行了比较,通过年复一年的教学,确实起到了帮助学生扫平障碍,活跃思路,掌握方法,提高能力的作用。

感谢校领导和出版社的大力支持。现编者将凝聚着自己一点心血的辅导材料充实、完善、整理、出版。书中突出了知识的连贯,强调了解题训练,还增加了强化教育的内容,目的是帮助更多的学生学懂学好《高等数学》这门课程。

关于解题训练,编者认为:加强教师指导下学生的认知活动,提

高学生学习的主动性和进取性,教师要努力创造有利于学生独立思考的情境,解题训练无疑是高等数学教学的一种重要手段。为此,本书结合历届研究生入学试题,选编了补充习题、自测题等,可供学生选用,亦可作为教师在习题课上的教学素材。

关于强化教育,编者将自己在上海大学基础强化班教学中的教材即本书的第五章《极限续论》一并编入本书,不作基本要求,目的是让学生在学好高等数学的基础上提高数学分析能力。

由于时间仓促和限于编者的水平,书中的缺点、问题不少。热忱欢迎广大师生、读者指正。

编者

2001年7月

目 录

第一部分 高等数学 A(一)

第一章 函数和极限	(3)
一、关于函数的四个特性	(3)
二、函数和复合函数	(8)
三、正确表达和理解极限定义中的逻辑关系	(12)
四、函数的连续性和间断点类型的判定	(23)
五、函数(或数列)极限计算方法	(27)
六、用极限表示函数的计算方法及已知极限确定未知 函数中常数的方法	(52)
七、关于无界和无穷大的关系	(58)
八、闭区间上连续函数的性质及其应用	(60)
第二章 导数和微分的概念及其计算方法	(65)
一、导数的基本概念	(65)
二、求导公式和求导运算法则	(68)
三、高阶导数计算方法	(74)
四、隐函数和由参数方程确定函数的一阶导数和二阶 导数的计算	(85)
五、微分及其计算方法	(89)
六、几类特殊函数导数的计算	(92)
七、导数的简单应用	(101)

第三章 中值定理及其应用	(106)
一、中值定理正确性的验证	(106)
二、函数零点存在性及个数的讨论	(108)
三、多项式函数的实零点和重数的判定方法	(118)
四、关于 ξ 的函数值等式或导数值等式的证明	(120)
五、关于利用导数证明不等式	(122)
六、利用极限保号性证明不等式	(133)
七、函数性态的讨论	(134)
第四章 不定积分计算方法	(149)
一、原函数和不定积分的关系	(149)
二、第一类换元法(凑微分)	(150)
三、第二类换元法(变量代换法)	(152)
四、分部积分法	(156)
五、换元法和分部积分法结合使用	(161)
六、关于几类特殊函数的积分方法	(164)
第五章 极限续论	(187)
一、否定命题的表达及其特征	(187)
二、实数连续性	(196)
三、闭区间上连续函数性质的证明及一致连续	(204)
附录一 高等数学 A(一)补充习题	(215)
第一章 函数和极限	(215)
第二章 导数和微分的概念及其计算方法	(217)
第三章 中值定理及其应用	(220)
第四章 不定积分计算方法	(223)
第五章 极限续论	(224)
附录二 高等数学 A(一)自测题	(226)
第一章 函数和极限	(226)

第二章 导数和微分的概念及其计算方法	(228)
第三章 中值定理及其应用	(230)
第四章 不定积分计算方法	(232)
附录三 高等数学 A(一)复习提纲	(233)
第一层次	(233)
第二层次	(234)
第三层次	(234)
附录四 高等数学 A(一)历届试题	(236)
1998 级高数 A(一)试题	(236)
1999 级高数 A(一)试题	(237)
2000 级高数 A(一)试题	(238)
2001 级高数 A(一)试题	(239)

第二部分 高等数学 A(二)

第六章 定积分和定积分应用	(245)
一、积分不等式	(245)
二、几种特殊函数定积分的计算	(249)
三、利用定积分计算和式的极限	(259)
四、利用定积分换元法和分部积分法证明定积分 关系式	(261)
五、变限函数导数计算公式及其应用	(266)
六、关于改进的积分中值定理和 Cauchy-Schwarz 不等式	(271)
七、定积分的几何应用	(275)
八、定积分的物理应用(功和水压力及引力的计算)	(290)
九、广义积分敛散性的判定及计算	(296)
第七章 级数	(305)
一、数列、级数、通项、级数的和数、部分和的正确表达及	

相互关系	(305)
二、理解级数敛散性的性质和判别法	(307)
三、函数项级数的收敛域及和函数	(320)
四、幂级数的收敛半径及收敛域的讨论	(321)
五、函数展开幂级数的讨论	(331)
六、幂级数的和函数讨论	(338)
七、关于 Taylor 公式及其应用	(352)
八、关于函数展开 Fourier 级数	(359)
第八章 向量代数和空间解析几何	(380)
一、向量代数中各个几何量的计算	(380)
二、向量的运算规律	(381)
三、向量垂直、平行、共面的条件	(381)
四、平面方程的形式	(388)
五、平面平行、垂直、重合的条件	(389)
六、点到平面的距离	(389)
七、平面方程的确定	(390)
八、直线方程的形式	(390)
九、直线与直线的夹角及平行、垂直、相交、异面的条件	(392)
十、直线与平面的夹角及平行、垂直、相交、直线在 平面上的条件	(393)
十一、点到直线的距离	(394)
十二、关于对称点和对称直线的计算	(395)
十三、关于异面直线的讨论	(396)
十四、直线方程确定的方法	(397)
十五、旋转曲面方程	(409)
十六、空间曲线 Γ 的表示	(409)
十七、空间立体(区域)	(410)
十八、关于立体图形的描绘	(410)

附录五 高等数学 A(二)补充习题	(427)
第六章 定积分和定积分应用	(427)
第七章 级数	(432)
第八章 向量代数和空间解析几何	(438)
附录六 高等数学 A(二)自测题	(442)
第六章 定积分和定积分应用	(442)
第七章 级数	(444)
第八章 向量代数和空间解析几何	(446)
附录七 高等数学 A(二)复习提纲	(450)
第六章 定积分和定积分应用	(450)
第七章 级数	(452)
第八章 向量代数和空间解析几何	(456)
附录八 高等数学 A(二)历届试题	(458)
1998 级高数 A(二)试题	(458)
1999 级高数 A(二)试题	(459)
2000 级高数 A(二)试题	(460)
2001 级高数 A(二)试题	(462)

第三部分 高等数学 A(三)

第九章 多元函数微分学	(467)
一、多元函数的极限、连续、偏导数、全微分、方向导数 之间的关系	(467)
二、多元显式函数一阶偏导数和二阶偏导数的计算	(472)
三、关于隐函数存在定理	(476)
四、关于偏导数的变量代换	(481)
五、多元函数微分法的应用	(486)

第十章 多元函数积分学	(499)
一、二重积分的计算和应用	(499)
二、三重积分的计算和应用	(512)
三、第一类曲线积分的计算和应用	(531)
四、第二类曲线积分的计算和应用	(537)
五、第一类曲面积分的计算和应用	(553)
六、第二类曲面积分的计算和应用	(561)
第十一章 微分方程	(573)
一、一阶微分方程及其解法	(573)
二、高阶微分方程及其解法	(577)
三、建立微分方程的典型例子	(587)
附录九 高等数学 A(三) 补充习题	(608)
第九章 多元函数微分学	(608)
第十章 多元函数积分学	(611)
第十一章 微分方程	(618)
附录十 高等数学 A(三) 自测题	(623)
第九章 多元函数微分学	(623)
第十章 多元函数积分学(一)	(625)
第十章 多元函数积分学(二)	(627)
第十一章 微分方程	(628)
附录十一 高等数学 A(三) 复习提纲	(630)
第九章 多元函数微分学	(630)
第十章 多元函数积分学	(634)
第十一章 微分方程	(638)
附录十二 高等数学 A(三) 历届试题	(641)
1998 级高数 A(三) 试题	(641)

1999 级高数 A(三)试题	(642)
2000 级高数 A(三)试题	(643)
2001 级高数 A(三)试题	(646)
附录十三 上海大学 2001 年高等数学竞赛试题	(648)

第一部分

高等数学 A(一)

第一章 函数和极限

一、关于函数的四个特性

1. 函数的有界性

定义 1 设 $y = f(x)$ 在数集 A 上有定义。若 $\exists M > 0, \forall x \in A$ 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $y = f(x)$ 在 A 上为有界函数。否则, 即 $\forall M > 0, \exists x_0 \in A$ 有 $|f(x_0)| > M$, 则称 $y = f(x)$ 在 A 上为无界函数。

几何上, 若能找到两条平行的关于 Ox 轴对称的水平直线 $y = \pm M (M > 0)$, 使 $y = f(x)$ 在 A 上的图像夹在两直线 $y = \pm M$ 之间的, 则称 $y = f(x)$ 在 A 上为有界函数。而无界函数是找不到具有上述性质的两条平行水平直线的。

分析上, 若证明 $y = f(x)$ 在 A 上有界, 则只要找到一正数 M , 使 $\forall x \in A$ 有 $|f(x)| \leq M$ 即可。而若证明 $y = f(x)$ 在 A 上无界, 则 $\forall M > 0$, 由 $|f(x)| > M$, 只要找 A 上一点 x_0 , 使 $|f(x_0)| > M$ 即可。这个 x_0 既可由不等式 $|f(x)| > M$ 解 x 求得, 又可用观察法求得。

定义 2 设 $y = f(x)$ 在数集 A 上有定义, 若 $\exists p, q \in \mathbf{R}, \forall x \in A$, 有 $q \leq f(x) \leq p$, 则称 $y = f(x)$ 在 A 上是有上界 p 、下界 q 的有界函数。若 $\exists p \in \mathbf{R}, \forall x \in A$, 有 $f(x) \leq p$ (或 $\geq q$), 则称 $y = f(x)$ 在 A 上是有上界 p (或下界 q) 的函数。

例 1 证明 $y = f(x) = x \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为无界函数。

证 $\forall M > 0$, 由 $|f(x)| = |x \sin x| > M$, 因 $\sin x = 1, x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \dots$

令 $k_0 = [M] + 1, \exists x_0 = 2k_0\pi + \frac{\pi}{2} \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$|f(x_0)| = x_0 > k_0 > M,$$

故 $y = f(x) = x \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为无界函数。

2. 函数的单调性

定义 若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称 $y = f(x)$ 在 A 上为严格单调上升 (或单调下降) 函数, 简称单调上升 (或单调下降) 函数, 用 $\nearrow$ (或 $\searrow$) 表示。

注: $y = f(x)$ 在 A 上单调下降的箭头表示不可为 “ $\swarrow$ ”。

若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $y = f(x)$ 在 A 上为一般单调上升 (或单调下降) 函数。

在书本中若无特殊说明, 函数单调性讨论都指严格单调性的讨论。

对数列 $\{x_n\}$:

若 $\forall n$ 有 $x_{n+1} - x_n > 0$ (或 < 0), 则称 $\{x_n\}$ 为单调上升 (或下降) 数列。

若 $\forall n$ 有 $x_{n+1} - x_n \geq 0$ (或 ≤ 0), 则称 $\{x_n\}$ 为一般单调上升 (或下降) 数列。

注: 验证一个函数 $y = f(x)$ 在区间 A 上的单调性。根据定义, 必须在 A 上任取两点来比较其函数值大小 (在第三章可用导数符号来讨论函数单调性)。

例 2 若 $y = f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上为偶函数, 又 $f(x)$ 在 $[0, l]$ 上 $\nearrow$, 证明 $y = f(x)$ 在 $[-l, 0]$ 上 $\searrow$ 。

证 $\forall x_1, x_2 \in [-l, 0], -l \leq x_1 < x_2 \leq 0, l \geq -x_1 > -x_2 \geq 0$ 。

因 $f(x)$ 为偶函数, 又在 $[0, l]$ 上 $\nearrow$, 所以

$$f(x_2) - f(x_1) = f(-x_2) - f(-x_1) < 0.$$

故 $y = f(x)$ 在 $[-l, 0]$ 上 $\searrow$ 。

3. 函数的奇偶性

(1) **定义** 若 $y = f(x)$ 在对称区间 A 上有定义, $\forall x \in A$, 此时, $-x \in A$, 有 $f(-x) = -f(x)$ (或 $f(-x) = f(x)$), 则称 $y = f(x)$ 在 A 上为奇函数 (或偶函数)。

几何上, 若 $y = f(x)$ 在 A 上为奇 (或偶) 函数, 则 $y = f(x)$ 在 A 上的图像关于原点 (或 Oy 轴) 对称。

(2) $y = f(x)$ 在对称区间 A 上非奇非偶函数的判定:

几何上,若曲线 $y = f(x)$ 在 A 上的图像既不关于 Oy 轴对称,又不关于原点对称,则 $y = f(x)$ 在 A 上必是非奇非偶函数。

分析上,它是奇偶性定义的否定命题。因此,只要验证 $\exists x_1 \in A, x_2 \in A$,使得 $f(-x_1) \neq -f(x_1)$,同时, $f(-x_2) \neq f(x_2)$,则 $y = f(x)$ 在 A 上为非奇非偶函数。

注意:上述两式绝不是 $f(-x) \neq -f(x)$, $f(-x) \neq f(x)$ 。

(3) 由函数的奇偶性的几何特性,可以容易地把定义在 $[0, l]$ 上的函数 $y = f(x)$ 在 $[-l, 0]$ 进行延拓,以得到一个新的函数 $y = F(x)$,使 $y = F(x)$ 在 $[-l, l]$ 上为奇函数或偶函数。

① 把 $y = f(x), x \in [0, l], f(0) = 0$ 作关于原点对称的图像,如图 1-1 所示。

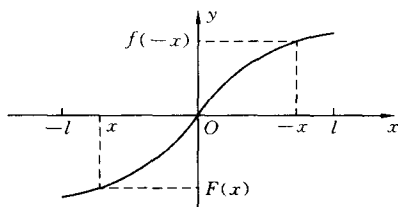


图 1-1

于是

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq l, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -l \leq x < 0 \end{cases}$$

在 $[-l, l]$ 上为奇函数。

② 把 $y = f(x), x \in [0, l]$ 作关于 y 轴对称图像,如图 1-2 所示。

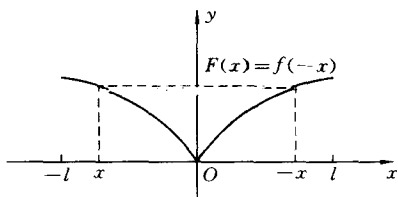


图 1-2