1999

研究生入学考试

数学复习系列 2

数学复习指南

[经济类]

主编 陈文灯

世界图书出版公司

1999年研究生入学考试**数学**复习系列 2

[经 济 类]

数学复习指南

主　编　陈文灯
副主编　黄先开
　　　　刘　慧

世界图书出版公司
北京・广州・上海・西安
1998

图书在版编目(CIP)数据

经济类数学复习指南/陈文灯主编. －北京:世界图书出版公司北京公司,1998.3
(1999年研究生入学考试数学复习系列丛书)
ISBN 7-5062-3702-4

Ⅰ.经… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-文科(教育)-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第04958号

书　　名　[经济类]数学复习指南(1999年研究生入学考试数学复习系列　2)
主　　编　陈文灯　　副主编:黄先开　刘慧
出　　版　世界图书出版公司北京公司
印　　刷:河北省香河县新华印刷有限公司
发　　行　世界图书出版公司北京公司(北京朝阳门内大街137号,100010)
销　　售:各地新书书店
开　　本:787×1092　1/16　　印张:30　　字数:820千字
版　　次:1998年3月第1版　　1998年3月第1次印刷
印　　数:0001－10000
书　　号:ISBN 7-5062-3702-4/G·77
定　　价:36.00元

前　言

本书是根据国家教委颁布的《考研数学复习大纲》、近几年统考命题的特点以及作者历年评阅试卷和在“考研班”辅导的经验而编写的一本应试之作。在今年修订中又参考了国外一些试题。本书对难度较大的题型均作出思维定式处理。读者在短期内，对照归纳总结的方法、技巧，研读相关的典型例题便可融汇贯通、举一反三、触类旁通。

本书特点如下：

(1)对大纲所要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性及错用公式、定理的错误。

(2)针对“考研”题型，安排相应章节，深入分析探究，总结出解题方法、技巧，便于读者掌握和应用。

(3)用“举题型讲方法”的格式代替各书普通采用的“讲方法套题型”的作法，使读者应试时思路畅通，有的放矢。

(4)介绍许多新的快速解题方法、技巧，大大提高读者的解题速度和准确性。

(5)广泛采用表格法，使读者对要点一目了然。

陈文灯　陈文灯印

1998.2

目　　录

“*”——数四考生不看

第一篇　微积分

第一章　函数·极限·连续

§1.1　函　数

一．定义

设有两个变量 x,y，如果对于 x 的变域D中的每一值，按照一定的法则，变量 y 有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y = f(x)$$

函数概念的两个要素：

(1) 定义域 $\triangleq$ 自变量 x 的变化范围，记为 D_f（若函数是解析式子表示的，则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域）．

(2) 对应关系 $\triangleq$ 给定 x 值，求 y 值的方法．

解题提示　当且仅当给定的两个函数，其定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则就是两个不同的函数．

【例 1.1】　下列各组函数中，哪些组是等价的？

(1)　$y = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$　与　$y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$

(2)　$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}^{2}x - 2\log_{\frac{1}{3}}x\log_3 x + \log_3{}^{2}x}$ 与 $y = \log_{\frac{1}{3}}x - \log_3 x$

(3)　$y = \left(\int_0^{x^2} f(t)dt\right)'$ 与　$y = 2xf(x^2)$，其中 $f(u)$ 为连续函数．

[解]　(1)　该组的定义域均为 $x \neq 0$，且对应关系也相同，故该组两函数是等价的．

(2)　$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}^{2}x - 2\log_{\frac{1}{3}}x\log_3 x + \log_3{}^{2}x} = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}x - \log_3 x & \text{当 } 0 < x \leqslant 1 \\ \log_3 x - \log_{\frac{1}{3}}x & \text{当 } x > 1 \end{cases}$$

该组的两个函数定义域均为$(0, +\infty)$，但对应关系不同，故不等价．

(3)　$\because y = \left(\int_0^{x^2} f(t)dt\right)' = f(x^2)\cdot 2x$

$\therefore$ 该组的两函数是等价的．

注：函数的表示法只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关，即

$$f(x) = f(t) = f(u) = \cdots$$

【例 1.2】　设 $f'(-x) = x[f'(x) - 1]$，求 $f(x)$．

[解]　令 $-x = t$，则原方程变为 $f'(t) = -t[f'(-t) - 1]$

即　$$f'(x) = -x[f'(-x) - 1]$$

解联立方程组 $\begin{cases} xf'(x) - f'(-x) = x \\ f'(x) + xf'(-x) = x \end{cases}$, 得

$$f'(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}, \quad \text{积分得}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - \arctan x + c$$

二． 函数的定义域的求法

记住下列简单函数的定义域：

$y = \dfrac{1}{x}$	$D_f: x \neq 0, (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = \sqrt[2n]{x}$	$D_f: x \geqslant 0, [0, +\infty)$
$y = \log_a x$	$D_f: x > 0, (0, +\infty)$
$y = \sin x$ 或 $\cos x$	$D_f: x$ 为任意实数, $(-\infty, +\infty)$
$y = \tan x$	$D_f: x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z$
$y = \cot x$	$D_f: x \neq k\pi, k \in Z$

解题提示　求复杂函数的定义域，就是求解简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

【例 1.3】 求下列函数的定义域：

(1) $y = \log_{x-1}(16 - x^2)$　　(2) $F(x) = \int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$

(3) $y = \arcsin \dfrac{2x - 1}{7} + \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{\lg(2x - 1)}$

[解] (1) $\begin{cases} 16 - x^2 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| < 4 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$ 及 $2 < x < 4$, 即 $(1,2) \cup (2,4)$

(2) 该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 初学者易写成 $D_f: x \neq 0$, 究其原因是对可积函数类不甚了解. 因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, 所以 $x = 0$ 是被积函数的第一类间断点, 因此 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在包含 $x = 0$ 的区间内积分有意义.

$$(3) \begin{cases} \left|\dfrac{2x - 1}{7}\right| \leqslant 1 \\ 2x - x^2 \geqslant 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leqslant 2x \leqslant 8 \\ x(x - 2) \leqslant 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x > \dfrac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \text{ 及 } 1 < x \leqslant 2$$

即 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2]$

【例 1.4】 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$ 求下列函数的定义域：(1) $f(2x)$； (2) $f(x + 3)$

[解] (1) $f(2x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant 2x \leqslant 1 \\ -1 & 1 < 2x \leqslant 2 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ -1 & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

$\therefore D_f:[0,1]$

$$(2) f(x+3)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x+3\leqslant 1\\ -1 & 1<x+3\leqslant 2\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1 & -3\leqslant x\leqslant -2\\ -1 & -2<x\leqslant -1\end{cases}$$

$\therefore D_f:[-3,-1]$

三． 函数的基本性质

1.奇偶性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果对于 $\forall x\in X$ 恒有

$$f(x)=f(-x)\qquad (\text{或 } f(x)=-f(-x))$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称;奇函数的图象关于坐标原点对称.

解题提示

① 判别给定函数的奇偶性,主要是根据奇偶性的定义,有时也用其运算性质.

② $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

③ 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不是奇偶函数.

④ 奇偶函数的运算性质:

1° 奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;

2° 偶数个奇(或偶)函数的积为偶函数;

3° 一奇函数与一偶函数的乘积为奇函数.

【例 1.5】 判别下列函数之奇偶性:

(1) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

(2) $y=F(x)(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2})$ 其中 $a>0,a\neq 1,F(x)$ 为奇函数.

(3) $y=\int_0^x f(t)dt$,其中 $f(x)$ 为奇函数.

[解] (1) 令 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$
$$=\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

解题提示 凡遇到根式 $a+\sqrt{b}$(其共轭根式为 $a-\sqrt{b}$ 或 $-a+\sqrt{b}$),$\sqrt{a}+\sqrt{b}$(其共轭根式为$\sqrt{a}-\sqrt{b}$),不论其在分子或分母上都应用其共轭根式处理).

(2) 令$g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$, 则

$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}+\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=0$$

$\therefore g(x)$ 为奇函数

又　$F(x)$ 为奇函数

故　$y = F(x)(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2})$ 为偶函数.

(3) 令　$F(x) = \int_0^x f(t)dt$

$$\because F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xlongequal{\text{令 } t = -u} \int_0^x f(-u)(-du)$$

$$\xlongequal{\because f(x) = -f(-x)} \int_0^x [-f(u)](-du) = \int_0^x f(u)du = \int_0^x f(t)dt = F(x)$$

$\therefore$ 当 $f(x)$ 为奇函数时，$y = \int_0^x f(t)dt$ 是偶函数.

2.周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，若存在一个与 x 无关的正数 T，使对于任一 $x \in X$，恒有

$$f(x + T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.通常把满足关系式的最小正数 称为函数 $f(x)$ 的周期.

解题提示

① 判别给定的函数 $f(x)$ 是否为周期函数，主要是根据周期的定义，有时也用其运算性质.

② 周期函数的运算性质：

1°　若 T 为 $f(x)$ 的周期，则 $f(ax + b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$；

2°　若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数；

3°　若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2, (T_1 \neq T_2)$ 为周期的函数，则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1、T_2 的最小公倍数为周期的函数.

【例1.6】　当 $x \in [0, \pi]$ 时，$f(x) \neq 0$　且 $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$　则在 $(-\infty, +\infty)$ 内，$f(x)$ 是(　　).

(a) 是以 π 为周期的函数　　(b) 是以 2π 为周期的函数

(c) 是以 3π 为周期的函数　　(d) 不是周期函数

[解]　考研的试题是单项选择题，因此我们在本书中所列举的也是属这类.

由题设条件 $f(x + \pi) \neq f(x)$，所以(a) 不入选.

$$\because f(x + 2\pi) = f[(x + \pi) + \pi] \xlongequal{\text{由题设}} f(x + \pi) + \sin(x + \pi)$$

$$\xlongequal{\text{再由题设}} [f(x) + \sin x] - \sin x = f(x)$$

$\therefore f(x)$ 是以 2π 为周期的函数.故(b) 入选.

3.有界性

设函数 $y = f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在 $M > 0$，使得对于一切 $x \in X$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在 X 上有界；若不存在这样的 $M > 0$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

注意：

① 函数 $f(x)$ 有无界是相对于某个区间而言；

② 分辨无界函数与无穷大量；

③ 几个常见的有界函数：

$|\sin x|\leqslant 1,\qquad |\cos x|\leqslant 1,\quad (-\infty,+\infty)$

$|\arctan x|\leqslant \frac{\pi}{2},\qquad |\text{arccot}\,x|\leqslant \pi,\quad (-\infty,+\infty)$

④ 设函数 $f(x),g(x)$ 均是(a,b)内的有界函数,则 $f(x)\pm g(x),f(x)g(x)$ 均是(a,b)内的有界函数.

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义,如果对 $\forall x_1,x_2\in X,x_1<x_2$,恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加的(或单调减少的).

§1.2 分段函数 初等函数

一. 函数

如果一个函数在其定义域内,对应于不同的区间段有着不同的表达形式,则该函数称为分段函数.

常见的几个分段函数:

(1) 符号函数 $y=sgnx=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$

(2) y 是 x 的最大整数部分,记为 $y=[x]$

(3) 狄利克莱(Dirichlet)函数 $y=f(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$

二. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Z_f,如果对于 Z_f 中任一 y 值,从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的一个 x 值,则称变量 x 为变量 y 的函数.记为

$$x=\varphi(y)$$

它称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.习惯上,$y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.

注意:

①$y=f(x)$ 的图象与其反函数 $x=\varphi(y)$ 的图象重合;$y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.

② 只有一一对应的函数才有反函数.

求反函数的步骤:

(1) 把 x 从方程 $y=f(x)$ 中解出;

(2) 把第一步所得到的表达式中的 x 与 y 对换,即得所求函数的反函数.

【例 1.7】 设 $f(x)=\begin{cases}x & -2<x<1\\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 2^x & 2<x\leqslant 4\end{cases}$ 则 $f^{-1}(x)=(\quad)$.

(a)$\begin{cases} x & -2 < x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \log_2 x & 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$ (b)$\begin{cases} x & -2 < x < 1 \\ -\sqrt{x} & 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ \log_2 x & 4 < x \leqslant 16 \end{cases}$

(c)$\begin{cases} x & -2 < x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ \log_2 x & 4 < x \leqslant 16 \end{cases}$ (d) 以上都不对

[解] 求分段函数的反函数,只要分别求出各区间段的反函数及定义域即可.

由 $y = x, \quad -2 < x < 1$ 可得 $x = y, \quad -2 < y < 1$

于是反函数为 $y = x, \quad -2 < x < 1$

由 $y = x^2, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$ 可得 $x = \sqrt{y}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 4$

于是反函数为 $y = \sqrt{x}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 4$

由 $y = 2^x, \quad 2 < x \leqslant 4,$ 可得 $x = \log_2 y, \quad 4 < y \leqslant 16$

于是反函数为 $y = \log_2 x, \quad 4 < x \leqslant 16$

综上所述,所求函数的反函数为 $y = \begin{cases} x & -2 < x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leqslant x \leqslant 4 \\ \log_2 x & 4 < x \leqslant 16 \end{cases}$

故(c)入选.

三. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f,而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ,若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \varnothing$,则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

y—— 因变量,u—— 中间变量,x—— 自变量

四. 初等函数

由基本初等函数 $c, x^m, a^x, \log_a x$,三角函数($\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$),反三角函数($\arcsin x$, $\arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$)通过四则运算或复合而成的只能用一个式子表示的函数称为初等函数.

一般讲,分段函数不是初等函数,但也有例外.例如 $y = \sqrt{x^2}$,就是初等函数,也是分段函数

$$y = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

五. 函数复合的方法

将两个或两个以上函数进行复合是本节的难点.以下根据函数的特点分别讲述几种方法.

1. **代入法** (适用于初等函数的复合)

把一个函数的表达式代替另一个函数中的自变量,这样就得到这两个函数的复合函数.这种方法称之为代入法.

【例 1.8】 求下列复合函数:

(1) 设 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$,求 $f[f(f(x))]$ 及 D_f.

(2) 设 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots)}_{n次}$.

[解] (1) $f(f(x))=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}=\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}-1}{\dfrac{x-1}{x+1}+1}=\dfrac{\dfrac{-2}{x+1}}{\dfrac{2x}{x+1}}=-\dfrac{1}{x}$

$$f[f(f(x))]=\frac{-\dfrac{1}{x}-1}{-\dfrac{1}{x}+1}=\frac{x+1}{1-x}\qquad D_f:x\neq 0,1,-1$$

(2) $f_2(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+2f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

由此可推测 $$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$$

再由数学归纳法即可证明推测的正确性.

2.**图示法** (适用于分段函数参与的复合)

所谓图示法是借助于图形的直观性达到复合的一种方法.

图示法的解题步骤

(1) 先画出中间变量函数 $u=\varphi(x)$ 的图象;

(2) 把 $y=f(u)$ 的分界点在 xou 坐标面上画出(这是若干条平行于 x 轴的直线);

(3) 写出 u 在不同区间段上 x 所对应的变化区间;

(4) 将(3)所得结果代入 $y=f(u)$ 中,便得 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

【例 1.9】 设 $f(x)=\begin{cases}1+x & 当 x<0\\ 1 & 当 x\geqslant 0\end{cases}$,求 $f[f(x)]$.

[解] 令 $f(x)=u$,则

$$f(u)=\begin{cases}1+u & 当 u<0\\ 1 & 当 u\geqslant 0\end{cases}$$

1° 作出 $u=f(x)=\begin{cases}1+x & 当 x<0\\ 1 & 当 x\geqslant 0\end{cases}$ 的图象

2° 再在图 1－1 中作出

$y=f(u)=\begin{cases}1+u & 当 u<0\\ 1 & 当 u\geqslant 0\end{cases}$ 的分界点 $u=0$ 的图象(x 轴).

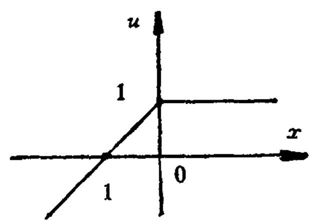

图 1－1

3° 从图中可看出:当 $x<-1$ 时,$u=1+x<0$

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时,$u=1+x\geqslant 0$;当 $x>0$ 时,$u=1>0$.

4° 把 2° 代入 $y=f(u)$ 中,得 $f[f(x)]=\begin{cases}2+x & x<-1\\ 1 & x\geqslant -1\end{cases}$

【例 1.10】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<1\\ x & x\geqslant 1\end{cases}$,$\varphi(x)=\begin{cases}x+2 & x<0\\ x^2-1 & x\geqslant 0\end{cases}$,求 $f[\varphi(x)]$.

[解] 令 $u=\varphi(x)$ 则 $f(u)=\begin{cases}e^u & u<1\\ u & u\geqslant 1\end{cases}$

1° 作出 $u = \varphi(x) = \begin{cases} x+2 & x<0 \\ x^2-1 & x \geqslant 0 \end{cases}$ 的图象,见图 1 - 2.

2° 再在图 1 - 2 中作出 $y = f(u)$ 的分界点 $u = 1$ 的图象.

3° 当 $x < -1$ 时 $\quad u = x + 2 < 1$

当 $-1 \leqslant x < 0$ 时 $\quad u = x + 2 \geqslant 1$

当 $0 \leqslant x < \sqrt{2}$ 时 $\quad u = x^2 - 1 < 1$

当 $x \geqslant \sqrt{2}$ 时 $\quad u = x^2 - 1 \geqslant 1$

4° $f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^x + 2 & x < -1 \\ x + 2 & -1 \leqslant x < 0 \\ e^{x^2-1} & 0 \leqslant x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1 & x \geqslant \sqrt{2} \end{cases}$

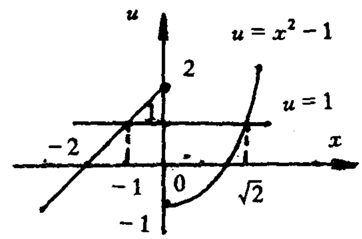

图 1 - 2

§ 1.3 极 限

一. 概念、定理、重要公式

1. 数列极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 一个正整数 N,当 $n > N$ 时,恒有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

收敛数列的性质:

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则其极限唯一;

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,则数列 $\{x_n\}$ 有界;

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $a < b$ 则 $\exists$ 一个正整数 N,当 $n > N$ 时, $x_n < y_n$;

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,且存在正整数 N,当 $n > N$ 时,恒有 $x_n \leqslant y_n$,则 $a \leqslant b$.

数列敛散性的判别定理:

定理 1(夹逼定理) 若存在正整数 N,当 $n > N$ 时恒有

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

定理 2 单调有界数列必有极限.

【例 1.11】 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}}$ $\qquad$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^n \sqrt{1+x}\,dx$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + (\frac{x^2}{2})^n}$

[解] (1) $3 < (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} < (3 \cdot 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} 3 \cdot 3^{\frac{1}{n}} = 3$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} (1 + 2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} = 3$

(2) $\because$ 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$x^n \leqslant x^n\sqrt{1+x} \leqslant \sqrt{2}x^n$

$$\therefore \int_0^1 x^n dx \leqslant \int_0^1 x^n\sqrt{1+x}dx \leqslant \int_0^1 x^n\sqrt{2}dx$$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{2}x^n dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}dx = 0$$

(3) 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时

$$1 \leqslant \sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n} \leqslant \sqrt[n]{3}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3} = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n} = 1$$

当 $1 < x \leqslant 2$ 时

$$x < \sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n} \leqslant \sqrt[n]{3}x$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}x = x$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n} = x$$

当 $x > 2$ 时

$$\frac{1}{2}x^2 < \sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n} < \sqrt[n]{3}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n} = \frac{x^2}{2}$$

综上所述，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n} = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & 1 < x \leqslant 2 \\ \frac{1}{2}x^2 & x > 2 \end{cases}$$

【例 1.12】 求下列数列的极限：

(1) 设 $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, \cdots x_n = \sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}\,(a > 0)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 设 $x_1 = \sqrt{2}, x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(3) 设 $0 < x_n < 1, n = 0,1,2\cdots, x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解题提示 求这种类型的极限步骤：

① 判断极限的存在性 $\begin{cases}\text{单调性}\\ \text{有界性}\end{cases}$，方法可用数学归纳法或不等式的放缩法；

② 先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = l$，然后通过解关于 l 的方程，求得 l 的值，从而得出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

[解]　(1) 显然 $x_2 > x_1$,　不妨设 $x_k > x_{k-1}$,则

$x_k + a > x_{k-1} + a$

$\Rightarrow \sqrt{x_k + a} > \sqrt{x_{k-1} + a} \Rightarrow x_{k+1} > x_k$

$\therefore \{x_n\}$为单调增加.

又　$\because x_1 = \sqrt{a}$,　$x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$

$x_n^2 = a + x_{n-1} \quad \Rightarrow x_n = \dfrac{a}{x_n} + \dfrac{x_{n-1}}{x_n} < \sqrt{a} + 1$

$\therefore \{x_n\}$ 有界.

故　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$,则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a + x_{n-1}}$$

即　$l = \sqrt{a + l} \quad \Rightarrow \quad l = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$

因此　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1 + \sqrt{4a + 1}}{2}$　　$\left(\dfrac{1 - \sqrt{4a + 1}}{2} < 0 \text{ 舍去}\right)$

(2) 由 $x_n = \sqrt{2x_{n-1}}$,可知 $x_2 = \sqrt{2x_1} = \sqrt{2\sqrt{2}}$

显然 $x_1 < x_2$　,　不妨设 $x_{k-1} < x_k$

于是　$\sqrt{2x_{k-1}} < \sqrt{2x_k}$,即 $x_k < x_{k+1}$

可见$\{x_n\}$为单增序列.

$\because x_n = 2\dfrac{x_{n-1}}{x_n} < 2$　　　$(\because x_{n-1} < x_n)$

$\therefore \{x_n\}$ 有界.

故　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$,则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2x_{n-1}}$$

即　$l = \sqrt{2l} \Rightarrow l = 2$,　$l = 0$(舍去)

因此　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

(3) 由 $0 < x_n < 1$,可知只要证明$\{x_n\}$的单调性,即可知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.事实上,由 $x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n$　有　$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = -x_n + 2 > 1$　　$(\because 0 < x_n < 1)$

即　$x_{n+1} > x_n$

可见$\{x_n\}$为单增序列.

故　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$,则

$l = -l^2 + 2l \Rightarrow l = 1$,　$l = 0$(舍去)

因此　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

二． 函数极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,当 $|x| > X$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

注：由该定义可知，极限与函数在某点处有无定义无关.

左极限　$f_-(x_0)=f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<x_0-x<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

右极限　$f_+(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=A$

常用该定理判别分段函数在分界点处是否有极限.

三．　无穷小与无穷大的定义

(1) 如果函数 $f(x)$（或数列 $\{x_n\}$）的极限等于零，则称函数 $f(x)$（或数列 $\{x_n\}$）为无穷小. 用"$\varepsilon-N$""$\varepsilon-\delta$" 的语言可叙述为：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n|<\varepsilon$$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)|<\varepsilon$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)|<\varepsilon$$

(2) 在自变量 x 的一定变化趋势（$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$）下，如果对于任意给定的正数 M，当自变量 x 变到某一时刻以后，不等式 $|f(x)|>M$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 在 x 的这种变化趋势下是一个无穷大量，用"$M-N$"，"$M-X$"，"$M-\delta$" 语言可叙述为：

数列 $\{x_n\}$ 为无穷大，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists$ 一个正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n|>M$$

当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 为无穷大，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)|>M$$

当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为无穷大，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)|>M$$

同样可定义 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，　$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$，　$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$

注：无穷大实质上是变量不存在极限的一种形式.

四．　无穷小的阶

设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 都是自变量 x 在同一变化过程中的无穷小，如果

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c(\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶的无穷小，记为 $\alpha(x) = 0(\beta(x))$.

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

$\lim \dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c(c \neq 0)$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

解题提示　求无穷小阶的方法：① 洛毕达法则；② 等价无穷小.

【例 1.13】　设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2)dt$，$g(x) = x^3 + x^4$，则当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的[　　]

(a) 等价无穷小　　(b) 同阶但非等价无穷小

(c) 高阶无穷小　　(d) 低阶无穷小

[解]　$\because \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{\sin x} \sin(t^2)dt}{x^3 + x^4}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\xlongequal{\text{用洛毕达法则}} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin^2 x)\cdot \cos x}{3x^2 + 4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2 + 4x^3} = \frac{1}{3}$$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶但非等价无穷小，故(b) 入选.

【例 1.14】　当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 为 $\dfrac{1}{x}$ 的(　　) 无穷小.

(a) 等阶　(b) 同阶　(c) 二阶　(d) 三阶

[解]　$\because \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x} / \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = 1$

$\therefore$ 当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 为 $\dfrac{1}{x}$ 的二阶无穷小，故(c) 入选.

【例 1.15】　已知当 $x \to 0$ 时，$f(x) = \sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，则 $g(x) = ($　　$)$.

(a)$1 - \cos x$　　(b)$\tan x - \sin x$　　(c)$\arcsin x$　　(d) $\sqrt{x}$

[解]　$\because f(x) = \dfrac{2\sin x}{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}} \sim \sin x \sim x$(当 $x \to 0$)

(a)$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$　　(b)$\tan x - \sin x = \dfrac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} \sim \dfrac{1}{2}x^3(x \to 0)$

(c)$\arcsin x \sim x$(当 $x \to 0$)

$\therefore g(x) = \arcsin x$

故　(c) 入选.

五．　重要定理

(1) 局部有界性　　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $\exists$ 某个 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x)| \leqslant M \qquad (M > 0)$$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，且 $A > B$，则 $\exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有