高等学校教学参考书

机械原理丛书

飞轮设计

孙序梁 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

机械原理丛书

飞 轮 设 计

孙序梁 编

高等教育出版社

内 容 简 介

本书的主要内容有：飞轮转动惯量的计算方法、空间机械系统中等效力（力矩）、等效质量（转动惯量）的计算方法、飞轮的结构设计等，同时还对变等效转动惯量飞轮进行了介绍。

本书可作为高等工业学校机械原理课程的补充教材或教学参考书，也可供有关工程技术人员参考。

(京)112号

高等学校教学参考书
机械原理丛书
飞 轮 设 计
孙序梁 编
*
高等教育出版社 出版
新华书店北京发行所发行
国防工业出版社印刷厂印装
*
开本850×1168 1/32 印张 2.375 字数 60 000
1992年8月第1版 1992年8月第1次印刷
印数0001— 1 640
ISBN 7-04-002272-9/TH·203
定价1.60元

前　言

飞轮是一种结构简单、造价低廉的调速装置，它已经应用于多种机械系统。但是，飞轮设计的理论和方法目前尚未达到完臻的程度。分析飞轮的工作过程和计算飞轮的转动惯量，要涉及机械系统动力学知识和较难的高等数学问题，有时只能采用图解法近似求解。近年来，随着电子计算机的推广使用，将为飞轮设计开辟新的途径。

高等工业学校开设的机械原理课程，目前受到学时数和教材篇幅的限制，还不能完整地讲述飞轮设计的方法和过程。本书作为一本补充教材和教学参考书，将以机械原理为基础，比较全面、系统地介绍飞轮设计。本书将结合机械系统的各种机械特性，讲述一些典型的设计方法，从而形成一个完整的飞轮设计的概念。但本书将不详细地介绍飞轮设计的具体步骤。此外，书中还将介绍等效力(力矩)、等效质量(转动惯量)的计算方法以及变等效转动惯量的飞轮。

本书承合肥工业大学丁爵曾教授和清华大学唐锡宽教授悉心审阅，并提出了许多宝贵意见，谨表示衷心感谢。

限于编者水平，错误和不妥之处在所难免，请读者批评指正。

编者

1988年11月

目　　录

§1 概 述

1° 在现代机械，特别是在高速运动的机械中，机器动力学是一个重要的研究课题，其中包括机器的周期性速度波动的调节。机器在稳定运动阶段中，由于驱动外力与阻抗外力不能时时相平衡，而其质量分布又不能作相应的变化，必然引起周期性的速度波动，以至影响机器的工作质量。这个问题至今还不能认为是已经彻底解决。目前，在机器上安装飞轮仍然是简便有效的调节速度波动的方法。现在，在大型的工程机械、精密齿轮机床和现代化最新研制的六足步行机器人中，都能见到飞轮装置；在另外一些机械中，虽然没有安装飞轮，但是许多构件却具有飞轮的效应。学习有关飞轮的知识，除了便于掌握飞轮的设计方法之外，对深入理解机器运转过程中某些动力学问题也将有所帮助。

飞轮设计的核心问题是计算飞轮的转动惯量。计算飞轮转动惯量的途径是求解描述机械系统运动过程的动力学方程。对刚性构件组成的机械系统而言，其运动方程式集中地表达了外力、构件质量（包括飞轮的转动惯量）和构件运动之间的关系。因而飞轮设计的内容之一就是根据已知外力、给定的速度变化要求和构件质量计算出飞轮应有的转动惯量。

2° 外力是决定机械系统运动规律的主导因素。作用在机械系统上的外力可分为驱动力和工作阻力两类。驱动力由原动机传入，驱使机械系统运动而作正功；工作阻力由工作对象传来，阻抗机械系统运动而作负功。外力的变化规律将直接影响求解运动方程的具体方法和难易程度，通常将外力随运动参数和时间的变化规律称为机械系统的机械特性。下面先介绍几种常见到的外力变化规律，以便为归纳求解运动方程的方法提供依据。

1．常量力

作用在机械系统上的外力在稳定运动阶段为常量。例如液压

传动系统的驱动力、构件的重力、在不计绳索重量时起重机的荷重、轧钢机和刨床上的生产阻力等。当机械系统的外力均为常量时，机械系统的运动方程将大为简化，计算飞轮转动惯量的方法也比较简单。

2. 力是作用构件运动速度的函数

属于这类的外力有通风机的载荷、离心泵及螺旋桨的工作阻力等。常用的三相异步电机，其输出扭矩就与转子的转速有关（见图1-1）。由于在机械系统中，常采用交流电机进行驱动，所以，这里简要地介绍一下交流电机的机械特性。

图 1-1 为三相异步交流电机的特性曲线。其中 n_{min} 为电机的最小稳定转速；n_H 为电机的额定转速；n_0 为电机的同步转速；M_K 为最大输出力矩；M_H 为额定力矩。

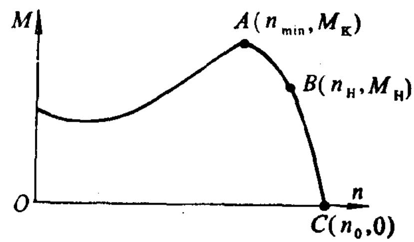

图 1-1

当转速小于 n_{min} 时，电机处于不稳定状态；当电机正常工作时，其转速在 n_{min} 到 n_0 之间。在额定工作点B附近的特性曲线段，可以近似地用直线 BC 代替。当电机处于其间的某一转速 n 时，电机的输出力矩M为

$$M = M_H \frac{n_0 - n}{n_0 - n_H} = M_H \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 - \omega_H} \tag{1-1}$$

式中 ω、ω_0、ω_H分别为对应于 n 、n_0、n_H的角速度。

式（1-1）又可写成下列形式

$$M = a - b\omega \tag{1-2}$$

这里

$$a = M_H \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega_H}$$

$$b=M_H\frac{1}{\omega_0-\omega_H}$$

当需要利用机械特性曲线的整个稳定区间时，该区间的机械特性曲线ABC（见图1-1）可以近似地视为抛物线，即

$$M=a+b\omega+c\omega^2 \tag{1-3}$$

若已知图1-1上点$A(n_{min}、M_K)$、$B(n_H、M_H)$、$C(n_0、0)$处的值，将它们代入上式，即可求出式中系数a、b、c的值。

3．力是机构位置的函数

具有这类机械特性的机器力如：活塞式压缩机的工作阻力、掘土机的载荷、弹簧的弹力以及内燃机的输出力矩等都是机构位置的函数。

4．随时间而变化的作用力

如球磨机的磨削阻力即是随时间而变化的。

在同一个机械系统中，可同时存在几个外力，它们可以是按同一规律变化，也可能分别按不同规律变化。当出现后一种情况时，整个外力系将同时是几个自变量的函数。

3° 机械系统中每个可动构件的质量都影响着系统的运动。现有两类不同的方法来表达这种影响。一种方法是将构件质量对运动的影响表现为惯性力，将构件的惯性力视作机械系统的外力，并纳入平衡计算之中。但是，欲准确地计算出构件的惯性力，必须已知构件的真实运动速度和加速度，而在设计飞轮时，机械系统的真实运动常常是未能准确确定的。在此情况下，只能计算出惯性力的近似值。另一种方法是将各构件质量的作用以等效质量或等效转动惯量的形式引入机械系统的运动方程式。

4° 在计算飞轮的转动惯量时，还应当知道对机械系统运动速度波动的要求和限制。这种限制通常用速度不均匀系数的形式给出。速度不均匀系数

$$\delta=\frac{\omega_{max}-\omega_{min}}{\omega_m} \tag{1-4}$$

式中 ω_{max}、ω_{min} 和 ω_m 分别为等效构件在稳定运转阶段中一个循环内的最大角速度、最小角速度和平均角速度。平均角速度 ω_m 的值可近似地等于最大角速度与最小角速度之和的半值，即

$$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_{max} + \omega_{min}) \tag{1-5}$$

目前，在飞轮设计中都沿用速度不均匀系数δ。但是δ仅能表明在一个运动循环内速度波动的最大相对幅值，纯属运动学特性，它并没有涉及到产生惯性力矩的角加速度值α。因为同一个δ值可能对应不同的最大角加速度值 α_{max}，所以有少数文献已经提出按照稳定阶段内瞬时角加速度的最大值 α_{max}来设计飞轮的问题，希望能通过飞轮改善机械系统的动力学特性。本书将在§7介绍关于飞轮动力学设计的知识。

5° 在计算飞轮的转动惯量时，可以将机械系统的运动方程式写成微分方程形式或积分方程形式。前一种形式着眼于机械系统的外力平衡；后一种形式则表达机械系统的能量平衡关系。本书将根据飞轮设计的具体条件，分别介绍两种不同方程式的求解方法。

6° 在机械原理教科书中，将飞轮按其功能划分为稳速（稳定速度，减小波动幅度）和蓄能（积蓄能量、适时释出）两大类。近期有少量文献提出，利用飞轮来补偿或平衡输入轴的外力矩，即出现外力矩平衡飞轮。外力矩平衡飞轮应具有变化的等效转动惯量，用以平衡输入轴外力矩的波动。关于变等效转动惯量飞轮的概念将在§7中介绍。严格地讲，稳速、蓄能和平衡外力矩波动三种功能可以同时体现在同一飞轮上，无法截然区分。设计飞轮时，应当标明以哪种功能为主，以便在设计中采用相应的方法。

§2 等效力与等效质量

1° 空间机械系统的等效力与等效力矩

对自由度为1的机械系统而言，若已知其中一个构件的运动，即可以用运动学分析的方法求出其余构件的对应运动。因此，在某些条件下，有可能把机械系统的动力学分析代之以对一个构件的分析，称这个构件为该机械系统的等效构件。通常多选择绕定轴近似匀速回转的构件作为等效构件。

借助于等效构件分析机械系统的运动时，应当考虑系统上全部外力的影响。比较简便的方法是用一个作用在等效构件上的假想外力（或外力矩）替代全部外力。替代的等效条件是：两者的瞬时功率相等。满足这一条件的假想外力称为该力系的等效力或等效力矩。由等效条件可以导出平面机械系统的等效力F_e或等效力矩M_e的计算公式为

$$F_e = \sum_{j=1}^{n} F_j\left(\frac{v_j}{v_e}\right)\cos\theta_j + \sum_{j=1}^{n} M_j\left(\frac{\omega_j}{v_e}\right) \tag{2-1}$$

$$M_e = \sum_{j=1}^{n} F_j\left(\frac{v_j}{\omega_e}\right)\cos\theta_j + \sum_{j=1}^{n} M_j\left(\frac{\omega_j}{\omega_e}\right) \tag{2-2}$$

式中 v_j——外力$\boldsymbol{F}_j$作用点处构件的线速度值；

θ_j——外力$\boldsymbol{F}_j$与作用点线速度$\boldsymbol{v}_j$的夹角；

ω_j——外力矩M_j作用构件的角速度；

v_e——等效力$\boldsymbol{F}_e$作用点处构件的线速度值；

ω_e——等效构件的角速度。

此处，取$\boldsymbol{F}_e$与$\boldsymbol{v}_e$的方向一致。

空间机械系统上的外力组成空间力系，空间力系的等效力或等效力矩可按下式计算

$$F_e=\sum_{j=1}^{n}F_j\left(\frac{v_j}{v_c}\right)\cos(\widehat{F_j v_j})$$
$$+\sum_{j=1}^{n}M_j\left(\frac{\omega_j}{v_e}\right)\cos(\widehat{M_j\omega_j}) \quad (2-3)$$
$$M_e=\sum_{j=1}^{n}F_j\left(\frac{v_j}{\omega_j}\right)\cos(\widehat{F_j v_j})$$
$$+\sum_{j=1}^{n}M_j\frac{\omega_j}{\omega_e}\cos(\widehat{M_j\omega_j}) \quad (2-4)$$

式中 $\boldsymbol{M}_j$、$\boldsymbol{\omega}_j$分别为力矩矢量和角速度矢量。

2° 空间机械系统的动能计算及等效质量或等效转动惯量

对机械系统进行动力学分析时，可以用等效质量或等效转动惯量表示各构件质量和转动惯量对运动的影响。等效质量或等效转动惯量所蕴藏的动能应当等于整个机械系统各构件动能之和。平面机械系统的等效质量或等效转动惯量应按下式计算：

$$m_e=\sum_{j=1}^{n}m_j\left(\frac{v_{Sj}}{v_e}\right)^2+\sum_{j=1}^{n}J_j\left(\frac{\omega_j}{v_e}\right)^2 \quad (2-5)$$
$$J_e=\sum_{j=1}^{n}m_j\left(\frac{v_{Sj}}{\omega_e}\right)^2+\sum_{j=1}^{n}J_j\left(\frac{\omega_j}{\omega_e}\right)^2 \quad (2-6)$$

式中 m_j——构件 j 的质量；

v_{Sj}——构件 j 质心处的构件速度；

J_j——构件 j 的转动惯量；

ω_j——构件 j 的角速度。

对于空间机械系统，各构件作空间运动，该系统的动能计算公式为

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}(J_x\omega_x^2+J_y\omega_y^2+J_z\omega_z^2)-J_{xy}\omega_x\omega_y$$
$$-J_{yz}\omega_y\omega_z-J_{zx}\omega_z\omega_x$$

若选取 x、y、z 轴与惯性主轴重合，则全部离心惯性积等于零，机械系统的总动能可以写成

$$E=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j v_{Sj}^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(J_{xj}\omega_{xj}^2+J_{yj}\omega_{yj}^2+J_{zj}\omega_{zj}^2) \tag{2-7}$$

式中 ω_{xj}、ω_{yj}、ω_{zj}——构件 j 的角速度矢量在 x、y、z 轴上的投影；

J_{xj}、J_{yj}、J_{zj}——构件 j 对 x、y、z 轴的转动惯量。

由上述动能计算公式，可以导出空间机械系统的等效质量或等效转动惯量分别为：

$$m_e=\sum_{j=1}^{n}\left[m_j\left(\frac{v_{Sj}}{v_e}\right)^2+J_{xj}\left(\frac{\omega_{xj}}{v_e}\right)^2+J_{yj}\left(\frac{\omega_{yj}}{v_e}\right)^2+J_{zj}\left(\frac{\omega_{zj}}{v_e}\right)^2\right] \tag{2-8}$$

$$J_e=\sum_{j=1}^{n}\left[m_j\left(\frac{v_{Sj}}{\omega_e}\right)^2+J_{xj}\left(\frac{\omega_{xj}}{\omega_e}\right)^2+J_{yj}\left(\frac{\omega_{yj}}{\omega_e}\right)^2+J_{zj}\left(\frac{\omega_{zj}}{\omega_e}\right)^2\right] \tag{2-9}$$

3° 计及摩擦的等效力与等效质量

对于自由度为 1 的机械系统，应用等效构件法能够简便、迅速地对它进行动力学分析。但是，通常在计算等效力和等效质量时，没有考虑机械系统中的摩擦损失。或者说未能严格按照力平衡或能量平衡条件分析机械系统的运动。下面介绍考虑摩擦损失情况下等效力和等效力矩的计算方法，这种方法是在一定的假设条件下导出的。

假定机械系统由机构 Ⅰ 和机构 Ⅱ 串联组成，如图 2-1 所示。轴 *1* 和轴 *3* 分别为该系统的输入轴和输出轴，轴 2 为机构 Ⅰ 和 Ⅱ 间的联接构件，它们的转动惯量分别为 J_1、J_2 和 J_3，其他构件的转

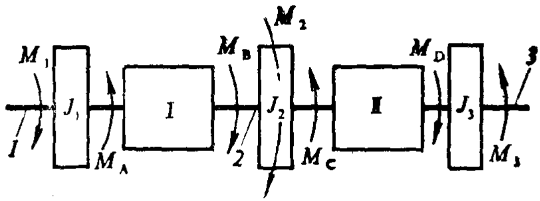

图 2-1

动惯量并入机构Ⅰ、Ⅱ之中。设作用在轴 1、2、3 上的外力矩分别为M_1、M_2、M_3；角速度分别为ω_1、ω_2、ω_3；角加速度分别为α_1、α_2、α_3。假定其他构件不受外力及外力矩作用，机构Ⅰ、Ⅱ的机械效率为常量，不受载荷和作用时间等因素的影响。机构中能量传递路线为$1 \to \mathrm{I} \to 2 \to \mathrm{II} \to 3$。根据轴1的力矩平衡条件可写出

$$M_1 + M_A = J_1\alpha_1 \tag{2-9}$$

式中M_A为机构Ⅰ作用于轴 1 的阻抗力矩。根据轴2的力矩平衡条件，可以写出

$$M_B + M_2 + M_C = J_2\alpha_2 \tag{2-10}$$

式中M_B为机构Ⅰ作用于轴2的驱动力矩；M_C为机构Ⅱ作用于轴2的阻抗力矩。根据轴3的力矩平衡条件，可写出

$$M_D + M_3 = J_3\alpha_3 \tag{2-11}$$

式中 M_D为机构Ⅱ作用于轴3的驱动力矩。

对机构Ⅰ而言，M_A为输入力矩，M_B为输出力矩。设i_1、η_1分别为机构Ⅰ的传动比和机械效率，根据机构Ⅰ的力矩平衡条件得出：

$$M_B = -M_A i_1 \eta_1 \tag{2-12}$$

式中 $i_1 = \omega_1/\omega_2$。

同理，因M_C、M_D分别为机构Ⅱ的输入力矩和输出力矩，i_2、η_2分别为机构Ⅱ的传动比和机械效率，所以

$$M_D = -M_C i_2 \eta_2 \tag{2-13}$$

式中　$i_2=\omega_2/\omega_3$。

若将M_B、M_D值代入式（2-10）和（2-11），则可得

$$-M_A i_1\eta_1+M_2+M_C=J_2\alpha_2 \tag{2-14}$$

$$-M_C i_2\eta_2+M_3=J_3\alpha_3 \tag{2-15}$$

再由式（2-9）、（2-15）分别得出

$$M_A=J_1\alpha_1-M_1 \tag{2-16}$$

$$M_C=\frac{1}{i_2\eta_2}(M_3-J_3\alpha_3) \tag{2-17}$$

将以上两式代入式（2-14）后，得

$$M_1 i\eta+M_2 i_2\eta_2+M_3=J_1 i\eta\alpha_1+J_2 i_2\eta_2\alpha_2+J_3\alpha_3 \tag{2-18}$$

式中　$i=i_1 i_2$; $\eta=\eta_1\eta_2$。

式（2-18）给出了外力矩M_1、M_2、M_3和运动学参数α_1、α_2、α_3之间的函数关系。

由于

$$\omega_2=i_2\omega_3$$

则

$$\alpha_2=\frac{d\omega_2}{dt}=i_2\frac{d\omega_3}{dt}+\omega_3\frac{di_2}{dt}$$

或

$$\alpha_2=i_2\alpha_3+\omega_3^2\frac{di_2}{d\varphi_3} \tag{2-19}$$

同理，由$\omega_1=i_1\omega_2$得

$$\alpha_1=\frac{d\omega_1}{dt}=i_1\alpha_2+\omega_2^2\frac{di_1}{d\varphi_2}$$

将$\omega_2=i_2\omega_3$、$d\varphi_2=i_2 d\varphi_3$和式（2-19）代入上式，又因$i=i_1 i_2$，故得

$$\alpha_1=i\alpha_3+\omega_3^2\frac{di}{d\varphi_3} \tag{2-20}$$

将式（2-20）、（2-19）代入式（2-18），得

$$M_1 i\eta+M_2 i_2\eta_2+M_3=(J_1 i^2\eta+J_2 i_2^2\eta_2+J_3)\alpha_3 +\left(J_1 i\eta\frac{di}{d\varphi_3}+J_2 i_2\eta_2\frac{di_2}{d\varphi_3}\right)\omega_3^2 \tag{2-21}$$

式（2-21）即为机械系统计及摩擦损失的动力学方程。假定η_1、

η_2、J_1、J_2、J_3 皆为常量，则式（2-21）等号右边第二项可写为

$$J_1 i\eta\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\varphi_3}+J_2 i_2\eta_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}\varphi_3}=\frac{\mathrm{d}}{2\mathrm{d}\varphi_3}(J_1 i^2\eta+J_2 i_2^2\eta_2+J_3) \tag{2-22}$$

又知

$$\alpha_3=\frac{\mathrm{d}\omega_3}{\mathrm{d}t} \quad 或 \quad \alpha_3=\frac{\mathrm{d}\omega_3^2}{2\mathrm{d}\varphi_3} \tag{2-23}$$

将式（2-22）、（2-23）代入式（2-21）得

$$(M_1 i\eta+M_2 i_2\eta_2+M_3)\mathrm{d}\varphi_3=\mathrm{d}\left(\frac{J_1 i^2\eta+J_2 i_2^2\eta_2+J_3}{2}\omega_3^2\right) \tag{2-24}$$

若记

$$M_e=M_1 i\eta+M_2 i_2\eta_2+M_3$$

$$J_e=J_1 i^2\eta+J_2 i_2^2\eta_2+J_3$$

则由式（2-24）得

$$M_e\mathrm{d}\varphi_3=\mathrm{d}\left(\frac{J_e\omega_3^2}{2}\right) \tag{2-25}$$

式（2-25）是以构件 *3* 为等效构件时，机械系统计及摩擦损失的运动微分方程式。M_e、J_e 分别为计及摩擦损失后的等效力矩和等效转动惯量。

在以上各式的推导过程中，是以机械系统的输出构件（从动件）*3* 为等效构件的，由此得出：当取机械系统的输出构件为等效构件时，等效力矩应等于各外力矩与其相应传动比及机械效率的乘积之和。仍以上述例题为例，若改用机械系统的输入件 *1* 为等效构件。可以同样方法导出

$$M_e=M_1+M_2\frac{1}{i_1\eta_2}+M_3\frac{1}{i\eta}$$

即如果以输入构件（主动件）为等效构件时，等效力矩应等于各外力矩分别除以该力作用构件到等效构件的传动比和机械效率，然后相加。

同理，如果以输入构件（主动件）为等效构件，则等效转动惯量为

$$J_e = J_1 + J_2 \frac{1}{i_1^2 \eta_1} + J_3 \frac{1}{i^2 \eta}$$

以上是在简化条件下导出的计及摩擦的等效力矩和等效转动惯量的计算公式，意在阐明它们的基本原理。由于在并联机构中，特别是在差动机构中，很难准确测定功率流的流向和大小；且在工作过程中，机械系统的功率流方向有时是变化的，所以要准确地导出在此种情况下普遍实用的计及摩擦的动力学方程式是一件比较困难的工作。

§3 力是机构位置函数时计算飞轮转动惯量的切向力方法

1° 在由内燃机驱动的机械系统中，驱动力是活塞位置的函数，如果载荷也随机构位置而变化，则此机械系统的外力仅为机构位置的函数。力是机构位置的函数时，计算飞轮转动惯量的方法很多，这些方法所依据的基本原理也不完全相同。本书将从中选择几种有典型意义的方法，分别在§3、§4内介绍。

2° 图 3-1 所示为一内燃机机构。作用在滑块（活塞）3 上的驱动外力 P 可根据内燃机的特性曲线求得，它是活塞位置的函数，曲柄1在工作过程中作近似匀速运动。现将外力向构件1简化。若不计摩擦力的影响，作用在滑块3上的外力应为

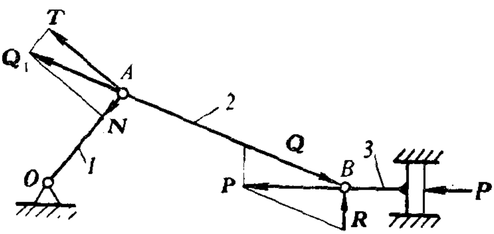

图 3-1

$$P+Q+R=0 \tag{3-1}$$

其中Q为连杆对滑块的作用力，沿连杆方向作用；R为导轨对滑块的反作用力，方向垂直于导轨。根据力系平衡条件式(3-1)，可求出连杆对滑块的作用力Q，则滑块对连杆的作用力 $Q_1=-Q$。因连杆为二力杆，故Q_1也是连杆对曲柄的作用力。将 Q_1分解为曲柄上的法向力N和切向力T，则作用在曲柄 1 上的驱动力矩为 $M_d=Tr$，其中 r 为曲柄的长度，该力矩是曲柄转角的函数。

3° 在切向力法中，各构件质量对机械系统运动速度的影响