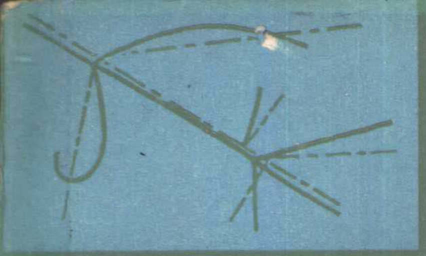
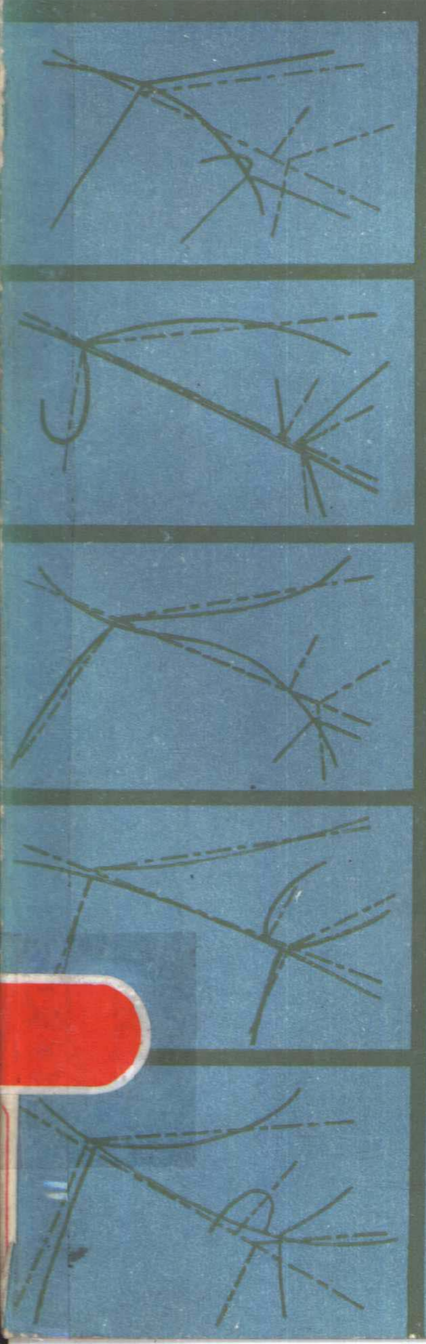


结构振动与动态子结构方法



王文亮　杜作润

复旦大学出版社

结构振动与动态子结构方法

王文亮　杜作润　编著

复旦大学出版社出版

内 容 提 要

动态子结构法是复杂工程结构动态分析中一类效率很高的方法。本书着重介绍了这一方法的基本原理和计算模式。全书分两大部分。第一部分介绍结构振动学的基本原理和常用的分析方法；第二部分详细论述了几种典型的动态子结构方法，其中包括了作者完成的双协调子结构法等。

本书可作为理工科高校力学和工程类专业的教材或教学参考书，也可供有关方面教师、工程技术人员、科研工作者、软件人员阅读和参考。

结构振动与动态子结构方法

复旦大学出版社出版

新华书店上海发行所发行

复旦大学印刷厂印刷

字数 754千字 开本 787×1092 1/16 印张 31

1985年8月第一版 1985年8月第一次印刷

印数：1—7,000

书号：13253·020 定价：6.65元

前　言

现代工程技术和结构工艺的飞速发展，常常需要准确而迅捷地分析、预测大型复杂结构的动态性能。这不仅要求周密地确定它们的工作环境，而且应可靠地测算构系的模态特征。例如，高速柔性飞机在着陆、滑行、起飞和整个巡航飞行过程中，始终受复杂的激励环境所制约。据有关统计表明，在飞行器所发生的许多重大事故中，有40%的事故和振动有关[6]。舰船是极其复杂的海上结构物，自五十年代后半期尤其是从六十年代开始，由于工业和航海事业的发展，船舶马力和航速的提高、高强度钢广泛用于造船业，船舶振动引起的麻烦越来越多。近年来，由于大马力中速柴油机的问世以及超巨型舰船不断建成出海，船舶振动问题，似乎更为突出[8]。在核反应堆结构的设计和高能粒子加速器的建造中，工程师们必须周密地考虑结构的抗振性能，确保有合适的安全系数和安全措施，以免发生灾难性的后果[29,30]。与宇航、航空工程一样，在这类结构物的设计、建造中，热-力耦合振动问题，是亟需深入研究的困难问题之一[40]。民用工程，象高层建筑物的风载响应及地震隔离措施等，几乎已成为人们常识范围内的重要课题。次如陆上各类交通运输和提吊工具、堤坝建筑、化工机械及其传输系统、厂矿各业，也都常有振动问题光顾我们的工程师、设计师。

为要保证结构在“恶劣”环境下，能够可靠而安全地工作，需要有准确的理论预测方法。这是一个要求多种学科和技术协同开发的领域，而结构动力学即为其中心环节之一。

在结构动力学问题中，总包含激励（泛称输入）、系统（弹性结构物本身）和响应（泛称输出）三个要素，常视那一要素为未知而分成三大类型：(1) 已知激励和系统，此时问题归结为响应预测；(2) 已知系统和响应，要求推断激励，称为测量问题；(3) 已知激励和响应，问题则在识别系统。后两类问题，通称为逆问题。以往，结构振动学中所研究和讨论的问题多属于第 (1) 种类型。近年来，测量问题和系统识别问题已逐渐引起人们的重视[3,33,34~39]。利用随机激励的非线性系统识别问题的研究是由 Wiener[293] 引入的，后来 Dimentberg 和 Gorbunor[37] 又提出和考虑了一种特殊类型的识别问题。

激励、系统和响应，这三者之间的关系，可由图 1 看出，其中图 1(a) 是一种粗糙的但很简明的模型。当考虑比如柔性飞机的突风响应、抑或分析船舶的波激振动时，弹性结构的振动运动，又会引起额外的气（水）动力，这就是图 1(b) 的情形。舰船振动问题中的附连水质量、水动阻尼便属于此例。为了能动地控制结构的振动水准，更有效地提高运载器的性能，近年来，受控结构动力学获得了蓬勃的发展[3,203]，如图 1(c)，探讨这些问题的理论基础是气（水）动弹性原理、卡尔曼滤波和最优控制理论等。美 B-52 型飞机上的突风缓和器以及一些飞行器上的颤振抑制系统，是这类问题的典型实例。

结构振动还可以按照常规观点进行分类，那就是分为线性振动和非线性振动，或者分为确定性振动和随机振动。关于前一种分类以及确定性振动问题，人们已作了很充分的论述，下面仅就随机振动问题作一引介。

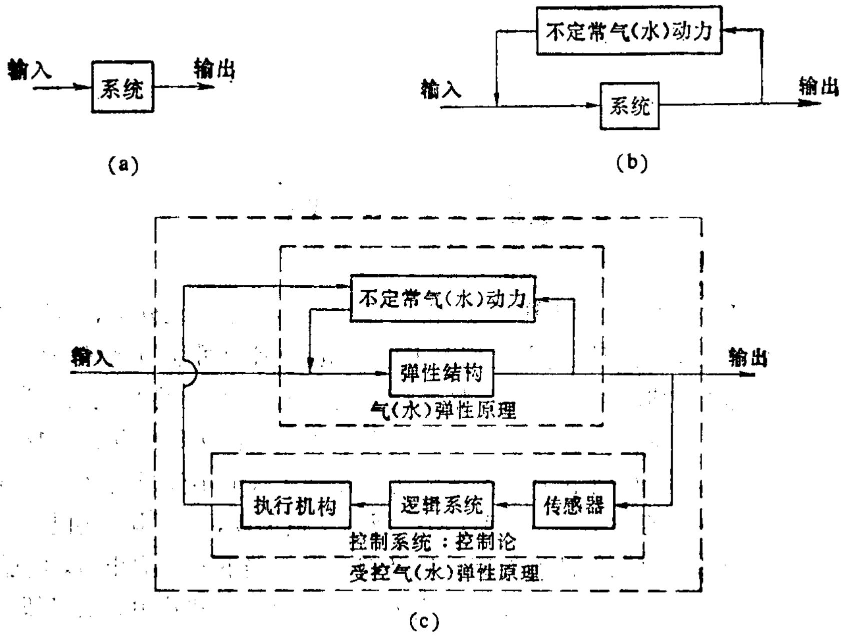


图1 弹性结构动响问题框图

近二十年来，人们从对运载器和海上建筑物的疲劳问题及机(舰)载仪表失灵事故的多次调查分析中，逐步意识到考虑随机振动问题的实际重要性。其中，一大类问题就是需要研究确定性结构对于随机外载荷的响应。比如，飞行器在其飞行过程中，由连续大气紊流、附面层的压力脉动、大功率喷气发动机和火箭发动机的噪声，飞机的着陆撞击或在粗糙跑道上的滑行等载荷，均可强烈地激励飞行器，使其发生振动[288,290,302,304,315]。滨海结构物对于连续随机海波的响应[259,260]也属此例。在考察结构对随机激励的响应时，通常所关心的主要是估计结构损坏的概率或结构的可靠性。有人把随机加载下结构的损坏分成三种形式[287,296]：(1) 应力首次超过极限强度而发生的破坏，称首次通过损坏或首次偏移破坏；(2) 应力变动引起的损伤积累，超过一定的限度而引起的疲劳破坏；(3) 残余微观变形的积累，超过一定的限度而发生的破坏。前两种形式所考察的是应力，后一种形式则着眼于变形。因此相应地，在随机载荷作用下结构的可靠性，我们也可分为两类，即应力可靠性和变形可靠性。应力可靠性问题，人们已作过大量的研究并取得了许多积极的成果。估计此类可靠性问题，通常遵循两条途径：一是基于应力过程的极值统计与损伤累积理论[294,350,353]，得到关于损伤或疲劳寿命的统计信息，通常主要是期望损伤(就人类的目标而言，这应理解为失望损伤。) 而在特殊情况下，可得到损伤的标准偏差。二是把疲劳过程划分成工程裂纹形成、裂纹扩展、最后断裂三个阶段，并认为最后断裂是由于应力首次超过剩余强度，此即为首次通过可靠性问题。比较而言，后一途径似乎更为合理，更因由此可计及周期性检查或检验试验，并可考虑与此有关的优化问题[305~308]，故它涉及多种统计信息，过程十分繁复，但仍能引起广泛的兴趣；前一途径则比较简单，加上还有其它优点，因而目前仍为工程设计所采用。

由于制造工艺的公差、测量时的不准确、材料的非均匀性、几何缺陷以及热脉动等原因，使得几乎所有的工程结构系统在下述意义之下是无序的，即它们的参数(比如质量、刚度和

结构阻尼等)只能作为服从某种概率分布的随机变量来处理。在线弹结构中,依据其参数的统计特性来确定模态的统计特性,有时具有很大的实际意义,这就是所谓无序结构系统的振动问题,这是另一类形式的随机振动问题。工程上,对无序系统的定量研究和评述,读者可参阅文献[297,298]、[309] 和 [310] 等。

工程问题的线性特征,有时并不是本质的, 我们常常基于等能耗散原则,对于非线性问题进行线性化或统计线性化。不是所有的非线性力学系统,都可以随意线化的,所以,事实上一开始就存在非线性构系的随机振动问题。 现在,非线性随机振动学已成为结构振动理论的一个重要分支。T. K. Caughey[357] 曾作过这方面的综合性评述。解非线性系统随机振动问题的方法,除一类为数很少的问题可求精确解之外,主要的方法是求近似解。求近似解大致可分为四类:(1) FPK (Fokker-Planck-Kolmogorov) 法;(2) 统计线化法;(3) 摄动法(或称小参数法);(4) 统计试验法(即 Montecarlo 法)。可能还有其它一些方法,但或许都是上述这些方法演变派生而来的,不再一一赘述。1975 年 9 月,在第七次国际非线性振动会议上,S. H. Crandall 所作的报告[291],对随机振动中非线性振动问题研究的历史发展过程作了概括和总结,并且简明地叙述了它的理论和应用概况,可为读者借鉴。在国内,文 [290] 曾从工程应用观点来叙述评论非线性随机振动问题,文 [288] 可作为具体应用模态综合技术和统计线化法计算非线性结构随机振动问题的一个例子,可供参阅。

无论是哪类振动问题,或者为避免共振、防止颤振,或者研究其它种种响应问题,一般都要求先行计算结构的模态;准确地确定构系的质量-刚度(和/或结构阻尼)的分布,无疑是预测复杂结构模态的必要步骤。 大型数字电子计算机的发展,促进了有限单元数值方法的兴趣,后者的技巧与前者的大存储量和运算的高速度,两者的有力配合,可使弹性构系的振动问题的解答实现程序化、自动化,从而一举得到成百上千个自由度的复杂构系的模态或响应信息。这种飞跃和突破,要是回朔几十年,即使当时最精明的工程师或者最权威的力学工作者,也许都会感到惊叹不已。

用有限单元法解线弹性结构的动力学问题的方程,通常可表示为[7,23,23,29,81]:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q} \tag{1}$$

其对应的模态特性(主模态,包括主频率与主振型),众所周知,由下列所谓的广义特征值问题所确定:

$$\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{x}}=\omega^2\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

目前求解方程(2)(确定特征向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和相应的特征频率 ω)的一些流行方法有矩阵迭代法(也称乘幂法)、雅可比方法 (Jacobi 方法),Givens-Householder (简称 G-H) 方法,子空间迭代法、Peter-Wilkinson (简写 P-W) 和 Lanczos 方法等[84~86, 91, 95, 100]。振动学理论在实用上的巨大成功,可以说,都与这些方法的成就休戚相关。解算响应问题,模态迭加法是可供选择的方法之一,数值求解方程(1),统属于直接方法,可用者通常有吉尔(Gill)方法、纽马克方法、威尔逊-Θ 法以及中心差分法等;某些情况下,模态迭加法与直接解法配合使用,更能显见成效。文献 [107] 提出了一种借助矩阵指数的幂级数展开公式,对 (1) 进行直接积分的新方法,也很有推广使用的价值。

然而,事物的发展和变化、事物之间的矛盾运动是没有止境的。人们出于一些特殊的需要和追求,常对结构物的性能提出前所未闻的各种高指标和高可靠性,促使某些构系愈见复杂化、大型化。其精细的动态分析和机器存储量之间有时仍会发生矛盾。我们固然可以应

用充分计及矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 的稀疏或带状性质的子空间迭代法或 P-W 等方法来克服上述困难，但这毕竟是有限度的。在一个复杂结构的动态有限元分析中，导致成千上万个自由度的特征值问题是不足为奇的。出路何在？其一是作为一种促进因素，进一步刺激计算机的容量增加和速度加快；其二是促使各种降阶技术和动态子结构技术的兴起和发展。

值得一提的降阶技术有文献［121～125］和［129～131］提出的静力（Guyan-Irons）缩聚法，现在已被统称为特征值节化（Eigenvalue Economization）。它以保留一小部分被称为正坐标（masters）的未知坐标为基础，通过静力缩聚变换，消去另一部分被称为副坐标（Slaves）的自由度，从而使得动力矩阵的尺寸得到减缩。这里，为了求得准确的结果，必须谨慎合理地选取正坐标，稍有疏忽就会失落特征谱中某些低频［134～135］。当结构的动刚度矩阵仅能由测量取得时，这种方法就不适用了。为了克服它的缺点，后来 Kuhar[126] 提出了动力变换法，但仍未彻底解决问题。

比较成熟的动态子结构法大致有三类：子结构的缩聚阻抗匹配法、模态综合技术（包括与阻抗匹配法的有机结合）以及有限超单元法[113,114,120,134~136,137~219] 等。

子结构的缩聚阻抗匹配法，是一种测试计量与理论计算紧密相结合的综合方法，它为确定结构的模态特性和建立实际结构较为逼真的数学模型提供了良好途径。国外，文［355］和［356］的作者曾成功地运用这一方法，解决了带叶冠的叶片——涡盘系统的动特性分析问题；国内，哈尔滨工业大学、南京航空学院的一些同行，在将机械阻抗法用于飞行器振动分析中，也作了不少工作[33~36]。

模态综合技术，它的基本思想是按工程观点或结构的几何轮廓，并遵循某些原则要求[1,137]，把完整结构人为地抽象肢解成若干个子结构（或部件）；首先对自由度少得多的各别子结构进行动态分析，然后经由各种方案，把它们的主要模态信息（常为低阶主模态资料）予以保留，并借以综合完整结构的主要模态特性。它的主要优点是：可通过解算若干小尺寸的特征值问题来代替直接解算大型特征值问题，从而将“小”机器扩展到分析“大”系统；同时，对各个子结构可分别使用各自适宜的数学模型和计算程序，甚至可借助测试（比如，用机械阻抗方法）来取得它们的主模态资料。

有限超单元法，最早似乎出自 Wittrick 等人的论文[132]，Leung 作了较好的发挥[134,135]，Vorus、恽伟君等也相继提出并用于船舶结构的动态分析[136,114,115,263]。其主要思想是将超单元的动态缩聚与模态综合技术结合起来；所以我们把它称为模态综合超单元法。最近，作者又论证了模态综合超单元法与 Craig 约束模态综合法之间的内在联系，可以帮助读者理解这类方法的实质[151]。

有关动态子结构方法的最新评述、策略思想及分类方法等问题，可参阅胡海昌的有关论著[1,9,137]。文［9，137］还着重推荐了动柔度对频率的幂级数展开方法，讨论了用频移法加快收敛的问题。作者认为，幂级数展开方法，随着计算机容量的增加，将愈益显现其优越性。而在国内，朱礼文[144]可能是最早使用频移法改进自由界面模态综合技术的作者之一。

模态综合技术在宇航工程中已有效地使用了多年。但是，在对一类例如舰船整体和局部振动之间的耦合问题、弹性容器内液体的晃动以及柔壁腔内噪声激振等所谓流-固耦合振动和响应问题的分析中，其优点却尚未被充分利用。然而，人们可以预期，动态子结构方法，在其中也是可以大有作为的。文献［220］已用变分原理对流-固耦振分析奠定了理论基础。在应用方面，上海船研所恽伟君等和 640 飞机设计所吴兴世等，已经取得了一些积极的成

果[145,222,224,225,227,263]。

这里顺便提一下海上结构物的波浪响应问题。不管是否用动态子结构方法，这里都会碰到所谓附连水效应的影响，这一效应使得原来意义上的“干”壳梁的主模态丧失了正交性。解决问题的方法之一，是与方程 (2) 相对应，求解由特征值问题

$$(\lambda^2 M^* + \lambda C^* + K^*)x^* = 0 \tag{3}$$

所确定的船舰“湿”模态。上式中带有星号 * 的质量、阻尼等阵，表示已计及附连水效应的影响。方程 (3) 所规定的湿模态，一般情况下是复模态(包括特征频率 λ 和振型 x^*)，它们也有相应的正交性[9~16]，可由 Q-R 方法求解。响应问题，可应用胡海昌[9]、Bishop 或 Schmitz[14,16] 等人所概括的方法去计算。

当分析叶片-涡盘系统的动频、考察包含流动液体管道的横向振动以及研究如旋转宇宙飞船、纱锭转子一类回转系统的动态特征时，有时还必须在上述特征方程中引入表征陀螺力矩的反称矩阵 [97, 41~44]。原则上讲，这样一些系统的主模态也是复模态。Meirovitch 和 Plaut[41,44] 为解答陀螺系统的特征值问题及探求陀螺系统的响应，提供了新方法。随着人造卫星、宇宙飞船等回转结构物的不断涌现和发展，陀螺系统的特征值问题已变得越来越重要了。由此可见，进一步推广模态综合技术的应用范围——用子结构(或部件)的复模态，去综合整体结构的复模态，确是一个很有价值的研究课题。这方面的文章，可见 [9] 和 [198, 219] 等。文献 [9] 的处理方法的力学背景明确，它使我们有可能来讨论增加约束对特征振动的影响，并且为在线性阻尼系统中推广模态综合法提供了依据。

有许多工程结构，具有某种对称性或移动的重迭性，利用这些性质去减缩结构的静、动态分析的规模，也是一个很有意义的课题，有不少学者已投入这方面的研究工作[51~53]。借助群表示论去研究多重对称结构的振动问题，早在 1930 年，就开始为从事量子力学和分子振动学研究的学者所应用，但直到最近几年才获得结构工程师及有关研究工作者的注意。在国内，钟万勰等首先利用群论建立起一套分析对称构系的计算方法[51,52]，这对提高计算速度和节省存储量来说都有十分显著的效果。在国外，Williams[55] 和 Leung[62] 等也已利用动态子结构方法确立起一套分析重复和周期性结构的算法，颇有借鉴价值。最近，张锦、王文亮和陈向钧将模态综合技术用于群表示论，更大规模地减缩了对称结构动态特性的分析计算自由度[53]，对于 C_{nv} 群上对称的理想化涡盘——叶片系统耦振特性的分析计算结果，与实验数据符合良好。这一工作，离开解决 C_n 群上对称的真实盘-叶体系的动频问题，诚然还有一段距离，但却预示这种方法有着令人鼓舞的发展前景。

自六十年代初 Hurty[161] 和 Gradwell[162] 奠定模态综合技术的基础以来，这门技术无论在理论或应用方面都已取得了巨大的成功。它在复杂结构的动态分析中是如此卓有成效，以至于确乎近代工程动力学学者和工程师们都必须了解和掌握这门技术。鉴于国内外目前尚无此类论题的已版专著的情况，我们向读者奉献这本拙著，确有抛砖引玉、推波助澜之意。

本书除第一部分各章罗列结构振动学的常规内容之外，在第二部分着重介绍动态子结构法的一些基本概念，并从工程力学观点分析某些模态综合技术的动力学原理，比较系统地叙述和评价几种重要的动态子结构方法，其中包括著者所作的一些工作。由于动态子结构方法，内容和形式都十分浩繁并处于不断的进展状态，我们没有也不可能一一将它们包括在本书之中。就国内学者专家而言，他们也有许多创造性的工作和十分精妙的论述，凡笔者目

力所及，均写入本书末所附参考文献目录之中。出于上述原因，我们没能在书中详细援引，有志深入探究的读者，或可从中汲取更多的营养。

本书基于原编讲义《模态综合法概论》(1980 年) 及其改进本《结构振动与动态子结构方法》(1981 年)，其大部分内容曾在复旦大学对好几届振动专业毕业班学生讲授过。作者之一的王文亮还曾先后对复旦大学振动组教师及上海 640 飞机设计所强度 2 室、武汉海军工程学院造船系、上海交通大学二系振动研究室等有关师生和工程技术人员作过介绍；去年暑假，还曾应原三机部第一研究设计院第二研究所邀请，前往讲学。这些活动，对于交流心得、推广应用动态子结构方法，都很有帮助。特别是不少同志对讲义的改进以及成书出版的各种意见和建议，更使我们得益非浅，理当谨此致谢。

本书所选例题，多属教学性质。有些实际课题，常剔除其中的具体细节，尽可能加以理想化，以便进行课堂讲习。个别大型算例，即使是作者自己完成的，由于分析计算过程繁冗，只好把它们作为补遗，列在书末的参考文献之中，以供读者在实际需要时研习品评之用。

作者特别感谢赵令诚老师和胡海昌老师，他们曾先后审阅了前述的讲义和修改本，并提出了大量具体的改进意见。此外，在写作过程中，作者还得到了恽伟君、吴兴世、曹志浩、马文华、季益民、钱洪华、吴新炳、陈向钧、朱昌明、盛沛生、韩汉初、朱翠媛、姚善莲等人的指导与帮助，在此一并表示衷心感谢。

复旦大学出版社对本书的关怀和支持，也是它得以出版的另一重要因素，在此也借机表示谢意。

由于著者水平有限，错误之处肯定不少。望读者提出宝贵的意见。

王文亮　杜作润

一九八三年三月

目　　录

前　言

第I部份　结构振动学

第一章　力学中几个基本原理……2

§1-1　引言……2

§1-2　一些基本概念……2

§1-3　虚位移原理……4

§1-4　达朗贝尔原理……7

§1-5　动力学普遍方程……8

§1-6　可变形连续体的虚功方程……9

§1-7　独立坐标下的第二类拉格朗日方程……11

§1-8　非自由系的第一类拉格朗日方程……12

§1-9　拉格朗日方程讨论……13

§1-10　哈密顿原理……19

§1-11　贝谛定理……21

§1-12　马克斯威尔互易定理……21

第二章　弹性结构的振动……23

§2-1　概述……23

§2-2　主模态分析……24

§2-3　模态迭加法……29

§2-4　简谐激励……34

§2-5　数值积分法……36

§2-6　无拘束结构……42

§2-7　结构摄动……43

§2-8　解析解两例……48

第三章　频率的极端性质……52

§3-1　瑞莱驻值定理……52

§3-2　坐标变换……53

§3-3　拘束振动……55

§3-4　瑞莱-李兹法……57

第四章　矩阵特征值问题及若干解法……60

§4-1　矩阵特征值问题……60

§4-2　特征值、特征向量的一些特性……62

§4 3　特征值的估计……65

§4-4　求解方法简介……67

§4-5　Jacobi 方法……70

§4-6 幂法及其推广……73
§4-7 G-H 方法……76

第五章 连续系统……81

§5-1 柔顺弦或索的振动……81
§5-2 杆的伸缩(纵)振动……83
§5-3 轴的扭转振动……86
§5-4 梁的弯曲振动……88
§5-5 响应问题……87
§5-6 均匀梁对于简谐激励的响应……100
§5-7 梁对于瞬态力的响应……102
§5-8 用瑞莱-李兹法解算非均匀梁的固有频率……108
§5-9 用瑞莱-李兹法分析非均匀梁的响应……112
§5-10 梁对于移动载荷的响应……114
§5-11 梁对于时变边界的响应……119
§5-12 轴力对弯曲振动的影响……122
§5-13 在弹性基础上的梁……124
§5-14 梁系……125
§5-15 剪切变形和旋转惯性……134
§5-16 应力、应变和位移关系……137
§5-17 矩形板横振动……139
§5-18 圆板的横振动……144

第六章 随机振动学……146

§6-1 一般介绍……146
§6-2 随机过程概论……147
§6-3 平稳过程……152
§6-4 单自由度振系及随机过程的变换……163
§6-5 多自由度振系……170
§6-6 宽带过程与窄带过程……179
§6-7 柔性飞机滑行动力响应分析……183

第II部份 动态子结构方法

第七章 有限单元法简介……190

§7-1 前言……190
§7-2 有限元离散化和单元矩阵……191
§7-3 梁的振动……194
§7-4 总体方程组……201
§7-5 板的面内振动……204
§7-6 板的横向振动……211
§7-7 板-梁组合结构……215
§7-8 半解析环形有限单元……216
§7-9 特征值节化……224

第八章　古典的模态综合技术 ……229
§8-1　G. M. L. Gladwell 的分枝模态法……229
§8-2　初等的动态子结构法……258
第九章　近代模态综合法的一些基本概念 ……275
§9-1　坐标与坐标变换……275
§9-2　部件划分和对接边界……279
§9-3　各种模态集的含义及其生成方法……281
§9-4　子结构耦合……304
第十章　约束模态综合法 ……308
§10-1　W. C. Hurty 的综合法……308
§10-2　R. R. Craig, Jr. 和 M. C. C. Bampton 的综合法……310
§10-3　C-B 法与分枝模态法的关系……312
§10-4　约束模态综合法的动力学原理……314
§10-5　约束模态综合法的缺点及改进措施……321
§10-6　逐级 Craig 综合法……330
第十一章　自由子结构法 ……333
§11-1　S. Rubin 的部件描述……333
§11-2　双协调动态子结构法……350
第十二章　其他几种动态子结构法 ……368
§12 1　R. H. Hintz 的模态综合法……369
§12-2　W. A. Benfield 和 R. F. Hruda 的模态综合法……375
§12-3　L. Meirovitch 和 H. L. Hale 的假设模态综合法……394
§12-4　J. S. Arora 和 D. T. Nquyen 的动态子结法……397
§12-5　在个别结构上各种方法的收敛对比……399
第十三章　模态综合超单元法 ……400
§13-1　非线性特征值问题……400
§13-2　A. Y.-T. Leung 的精确动态缩聚法……410
§13-3　模态综合超单元法……415
§13-4　特征值节缩的进一步探讨……423
第十四章　若干流-固耦振问题……426
§14-1　流体力学的基本动力学方程……426
§14-2　速度势方程……430
§14-3　动态子结构法的应用……434
§14-4　流-固耦振分析中的双协调动态子结构方法……458
结束语 ……465
参考文献 ……467

第一部分　结构振动学

这一部分，讨论结构振动学中的一些基本问题，阐明若干古典的或常规的分析方法。其中，包括介绍几个有关的力学基本原理、线弹结构振动问题的主要特征、随机过程基础和随机振动理论、矩阵特征值问题，以及连续弹性系统包括轴、梁和板的振动等。这些方面的内容，既具有独立的使用价值，可为一般工程技术人员和有关专业的师生作参考，又是学习和分析第二部分内容的必备基础。如果读者对这些内容业已了解和掌握，则可直接阅读第二部分。

第一章　力学中几个基本原理

§1-1　引　　言

所谓原理，都是指从人类总的经验中概括得出的根本规律，它们的正确性已为和正在为人们的亿万次实践所证实。这章要叙述的力学原理，都属于仅在"经典力学"范畴内适用的一些基本规律，其他定理可以它们为基础经逻辑推理而导出。

在力学中有许多命题都可以作为原理。比如，我们可以把牛顿定律作为原理，而把能量守恒、动量守恒等定理作为它们的推论；尽管能量守恒本身也可作为原理。当然，在"经典力学"范畴中，不同的力学原理应当相互沟通，也就是说，从一个（或几个）原理可以推导出其余的原理。

力学原理可分类如下[30,387]：

$$
\text{力学原理}\begin{cases}\text{微分的}\begin{cases}\text{非变分的（如牛顿定律、达朗贝尔原理）}\\\text{变分的（如虚功原理）}\end{cases}\\\text{积分的}\begin{cases}\text{非变分的（如能量守恒原理）}\\\text{变分的（如哈密顿原理）}\end{cases}\end{cases}
$$

非变分的原理指出真实运动的某些公共性质，例如真实运动要遵守牛顿定律或能量守恒等。但牛顿定律或达朗贝尔原理指出真实运动在每一瞬时所必须遵守的条件，因而它们是微分形式的非变分原理；而能量守恒或动量变化定理等则指出在某一有限的时间间隔内真实运动所应满足的条件，因而它们都是积分形式的非变分原理。

变分的原理提供一种准则，把真实运动与在同样条件下运动学上可能的其他运动区分开来。其中的微分形式如虚功原理，提供了判别每一瞬时真实运动的准则；以及积分形式如哈密顿原理，提供了在任一有限时段内判别真实运动的准则。

§1-2　一些基本概念

1．非自由系统·约束　一群质点的系集，由于其中质点之间存在着相互作用，致使每一质点的运动与其它质点的位置和运动发生关联，我们今后把这种集合体，叫做力学体系（或系统）。限制系统中各个质点的位置和速度的预定条件，我们将称之为约束；在最一般的情况下，约束可由数学式表述为：

$$f(\boldsymbol{r}_s, \dot{\boldsymbol{r}}_s, t) = 0 \tag{1-2.1}$$

式中 t 为时间，$\boldsymbol{r}_s = x_s\boldsymbol{i} + y_s\boldsymbol{j} + z_s\boldsymbol{k}$ 是系统中质点 m_s 的位置矢径，$\dot{\boldsymbol{r}}_s$ 为 m_s 的速度。

遭受到约束的力学系统，称之为非自由系统，以区别于没有任何约束的自由系统。

约束可作如下分类：

$$
\text{约束}\begin{cases}\text{位置(几何或有限)的}\begin{cases}\text{定常的} & f(\boldsymbol{r}_s)=0\\ \text{非定常的} & f(\boldsymbol{r}_s,\ t)=0\end{cases} & (1\text{-}2.2_a)\\ \text{速度(运动或微分)的}\begin{cases}\text{定常的} & f(\boldsymbol{r}_s,\ \dot{\boldsymbol{r}}_s)=0\\ \text{非定常的} & f(\boldsymbol{r}_s,\ \dot{\boldsymbol{r}}_s,\ t)=0\end{cases} & (1\text{-}2.2_b)\end{cases}
$$

位置约束以及可积分成为位置约束的速度约束叫做全定约束，不能积分成为位置约束的速度约束叫做非全定约束。只含有全定约束的系统叫做全定系统，含有非全定约束（一般也同时含有全定约束）的系统叫做非全定系统（"全定"（holonomic）一词译自希腊文，意指完全合法[30]；在许多理论力学教程中都把"holonomic"译为"完整"，但完整一词我们将别有它用）。

今后，我们只讨论全定的力学系统。

2．实位移与虚位移 在运动过程中，系统中各个质点 m_s 的位移 $d\boldsymbol{r}_s=dx_s\boldsymbol{i}+dy_s\boldsymbol{j}+dz_s\boldsymbol{k}$，一方面应满足动力方程：

$$
m_s\ddot{\boldsymbol{r}}_s=\boldsymbol{p}_s+\boldsymbol{f}_s \qquad (1\text{-}2.3_a)
$$

和初始条件

$$
\boldsymbol{r}_s(0)=\boldsymbol{r}_s^0\quad \dot{\boldsymbol{r}}_s(0)=\dot{\boldsymbol{r}}_s^0 \qquad (1\text{-}2.3_b)
$$

另一方面，还必须满足约束方程（1-2.2$_a$），即还应该满足如下条件：

$$
\sum_s\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s}dx_s+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_s}dy_s+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_s}dz_s\right)+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt=0\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots k) \qquad (1\text{-}2.4_a)
$$

方程（1-2.3$_a$）中 $\boldsymbol{p}_s$ 和 $\boldsymbol{f}_s$ 分别表示第 s 个质点 m_s 所受到的主动力的合力和约束反力的合力。方程（1-2.4$_a$）中的 k，表示系统所遭受到的约束的个数。

凡是同时满足上述两组条件（1-2.3）和（1-2.4）的运动，就是系统实际发生的运动，称为真实运动。而把在时间间隔 dt 中由真实运动所引起的位移 $d\boldsymbol{r}_s$，称为系统的实位移。如果时间没有变化，此即 $dt=0$，则必然有 $d\boldsymbol{r}_s=0$，也就是说，实位移必须经历时间。

在约束是定常的情况下，由于 $\partial f_\alpha/\partial t=0$，实位移 $d\boldsymbol{r}_s$ 所必须满足的条件（1-2.4$_a$）退化为如下简单形式：

$$
\sum_s\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s}dx_s+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_s}dy_s+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_s}dz_s\right)=0\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots k) \qquad (1\text{-}2.4_b)
$$

在理论力学中，又把满足（1-2.4）的无穷小位移称为约束容许的位移，或简称可能位移，显然实位移是满足约束条件的，所以也是可能位移。但是反之不然，任意一个可能位移并不一定是某种真实运动中所产生的实位移，这是因为我们在定义可能位移时，只要求它满足条件（1-2.4），而不要求它一定要满足动力方程（1-2.3$_a$）和初条件（1-2.3$_b$）。总之，我们可以这样说，所有满足条件（1-2.4$_a$）或（1-2.4$_b$）的位移都是可能位移，而其中只有一组 $d\boldsymbol{r}_s$ 是实位移。

现在，我们来引进虚位移的概念。设想在某一瞬时 t，所考察的力学体系在约束容许的情况下，由原来的位置移动到另一无限邻近的位置，也就是说，系统中各个质点 m_s 发生了一个无限小的位移。这一位移并非质点在实际运动中所真实发生的，而只是想象中可能发生的瞬间移动，它只取决于质点 m_s 在此瞬时的位置和加在它上面的约束，而不是由于时间的变化所引起的。我们把这种位移叫做虚位移，并以 $\delta\boldsymbol{r}_s$ 表之。由于时间无变化（$\delta t=0$），因此人们又把虚位移叫做等时变分。因此，不管约束是否是定常的，虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_s=\delta x_s\boldsymbol{i}+\delta y_s\boldsymbol{j}+\delta z_s\boldsymbol{k}$ 总是满足如下的方程组

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_s}\delta x_s+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_s}\delta y_s+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_s}\delta z_s\right)=0\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots k)\tag{1-2.5}$$

的任意位移。条件(1-2.5)与定常约束下的条件(1-2.4_b)完全一致，所以，在定常约束情况下，虚位移就是可能位移，而实位移是虚位移(或可能位移)之一。在非定常约束场合，读者不难证实：虚位移是任意两个可能位移之差，实位移是可能位移之一。在以后结构振动的叙述中，我们所探讨的力学体系，总是指定常的全定系统。

3．广义坐标与自由度 我们来考察一个由 n 个质点所组成的系统，它受到 k 个约束：

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_s,\ t)=0\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots k)\tag{1-2.6}$$

显然，这时此体系的独立坐标的数目等于 $N=3n-k$。今后，我们把能决定系统几何位置的彼此独立的量称为该系统的广义坐标。十分明显，广义坐标的选择不是唯一的，不同的选择，只反映描述力学体系位形的外在差异，而决不会改变系统本身的内在固有特性。

下面介绍系统自由度的概念。我们让上述系统发生某一虚位移，由于这一虚位移，系中各质点的矢径获得了一个等时变分 $\delta\boldsymbol{r}_s=\delta x_s\boldsymbol{i}+\delta y_s\boldsymbol{j}+\delta z_s\boldsymbol{k}$，其中 $3n$ 个等时变分：δx_s，δy_s 和 δz_s $(s=1,\ 2,\ \cdots n)$ 不是相互独立的，因为它们要受到条件(1-2.5)的制约。因而，独立的虚位移的个数也等于 $N=3n-k$，亦即等于系统的广义坐标数。

力学体系的自由度数就是独立的虚位移的个数。

因此，在我们所限定考察的全定系统中，广义坐标数总等于自由度数。但在非全定系统中，广义坐标数大于自由度数。

4．理想约束 作用在质点上的外力(包括约束反力)$\boldsymbol{b}(=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{f})$在任意虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 上所作的功叫做虚功。如果力学系统所受的约束力在任何虚位移上作功的总和等于零，则此种约束称为理想约束，即可以数学地表述为

$$\sum_{s=1}^{n}\boldsymbol{f}_s\cdot\delta\boldsymbol{r}_s=0\tag{1-2.7}$$

式中 $\boldsymbol{f}_s$ 是作用在第 s 个质点 m_s 上的约束反力。光滑面(或曲线、铰链)、刚性杆、不可伸长的绳索等都是理想约束。

应该指出，在主动力和约束力之间并无严格的界限，因此，必要时我们也可以把不具有理想约束的系统转化为具有理想约束的系统。例如，接触面粗糙的一些刚体所成的系统，在虚位移上摩擦力作负功，因而不具有理想约束。但若把所有摩擦力都看作主动力的一部分，那就可以把这个体系当作具有理想约束的系统来处理。由此可见，所有弹性力、阻尼力亦可当作主动力看待，这样可以大大扩大适用于理想约束体系的许多原理的应用范围。

§1-3 虚位移原理

虚位移原理或称虚功原理是分析力学中的一个重要原理，它和达朗贝尔原理联合使用可推导出牛顿定律。

虚功原理的内容是：具有定常、理想约束的力学体系，原来处于静止状态(相对于惯性参考系)，其平衡(指静止)的充要条件是，在任何虚位移上所有主动力的虚功之和等于零。

亦即，如果质点 m_s $(s=1,\ 2,\ \cdots n)$ 的主动力合力为 $\boldsymbol{p}_s$，则系统保持静止的充要条件是在任何虚位移 $\delta\boldsymbol{r}_s$ 上，有

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{p}_s \delta \boldsymbol{r}_s = 0 \qquad (1\text{-}3.1)$$

此式称为虚功方程。

先证明原理中条件 (1-3.1) 的必要性。设质点 m_s 所受主动力的合力为 $\boldsymbol{p}_s$，所受约束反力的合力为 $\boldsymbol{f}_s$。由初始时保持静止($\boldsymbol{r}_s^0 = \dot{\boldsymbol{r}}_s^0 = 0$, $\ddot{\boldsymbol{r}}_s \equiv 0$)，根据牛顿定律(1-2.3$_a$)，我们有

$$\boldsymbol{p}_s + \boldsymbol{f}_s = 0$$

因而对任何虚位移均有

$$\sum_s (\boldsymbol{p}_s + \boldsymbol{f}_s) \delta \boldsymbol{r}_s = 0$$

将上式展开，得

$$\sum_s \boldsymbol{p}_s \delta \boldsymbol{r}_s + \sum_s \boldsymbol{f}_s \delta \boldsymbol{r}_s = 0$$

由于理想约束的条件 (1-2.7)，所以推出式 (1-3.1) 成立。

再来证明条件的充分性。即要证明，如果系统原来处于静止状态并满足虚功方程 (1-3.1)，则系统仍然保持静止。采用反证法。设虚功方程 (1-3.1) 对任意虚位移均成立，而系统在主动力系作用下原来的静止状态被破坏了，则至少有一个质点 m_i 的 $\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{f}_i \neq 0$，于是质点 m_i 将沿 $\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{f}_i$ 的方向产生加速度 $\boldsymbol{a}_i = \ddot{\boldsymbol{r}}_i$，这个加速度为

$$\boldsymbol{a}_i = (\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{f}_i)/m_i$$

由于运动是从静止 ($\boldsymbol{r}_s^0 = \dot{\boldsymbol{r}}_s^0 = 0$) 开始的，故在时元 dt 内将产生与 $\boldsymbol{a}_i$ 同方位的实位移 $d\boldsymbol{r}_i$，所以至少在这个质点上有

$$(\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{f}_i) \cdot d\boldsymbol{r}_i > 0$$

对 s 求和，且考虑到理想约束的条件 (1-2.7)，推出

$$\sum_{s=1}^{n} \boldsymbol{p}_s \cdot d\boldsymbol{r}_s > 0$$

对于定常约束下的系统，实位移 $d\boldsymbol{r}_s$ 是虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_s$ 的可能形式之一，于是当取 $\delta \boldsymbol{r}_s = d\boldsymbol{r}_s$ 时，就有

$$\sum_s \boldsymbol{p}_s \delta \boldsymbol{r}_s > 0$$

这与推论前的假设条件 (1-3.1) 矛盾。这说明满足方程 (1-3.1) 时，每个质点都必须保持静止，即系统必须处于静止状态。

前面已提到，对于 n 个质点所形成的力学体系，如果遭受 k 个约束 (1-2.6)，那么独立坐标就减少到 $N = 3n - k$ 个，它也是系统的自由度数。既然只有 N 个坐标是独立的，那么我们就可通过式 (1-2.6)，把 $3n$ 个不独立的坐标用 N 个独立参数 q_1, q_2, $\cdots q_N$ 及 t 表示，即

$$\boldsymbol{r}_s = \boldsymbol{r}_s(q_1, q_2, \cdots q_N, t) = \boldsymbol{r}_s(\boldsymbol{q}, t) \qquad (1\text{-}3.2_a)$$

或者

$$\left.\begin{aligned} x_s &= x_s(q_1, q_2, \cdots q_N, t) \\ y_s &= y_s(q_1, q_2, \cdots q_N, t) \\ z_s &= z_s(q_1, q_2, \cdots q_N, t) \end{aligned}\right\} \quad (s = 1, 2, \cdots n, N < 3n) \qquad (1\text{-}3.2_b)$$

式中 q_1, q_2, $\cdots$, q_s 叫做拉格朗日广义坐标，它不一定是长度，可以是角度或其他物理量，例如面积 A 或体积 V 等等。根据广义坐标的定义，$\boldsymbol{q} = \text{col}\{q_i\}$ 足以描述力学体系的运动。

用广义坐标 $\boldsymbol{q}$ 来描述，力学体系的虚位移原理将有非常简单的形式。根据式 (1-3.2)，虚位移是