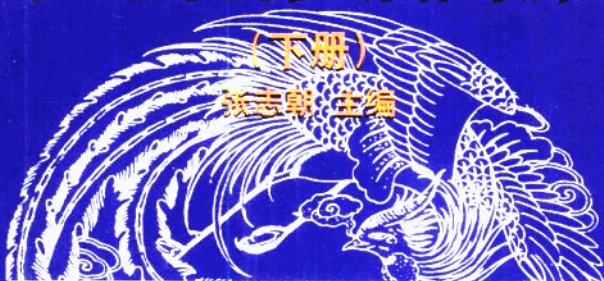


北京朗曼教学与研究中心教研成果

高一数学同步讲解与测试

(下册)

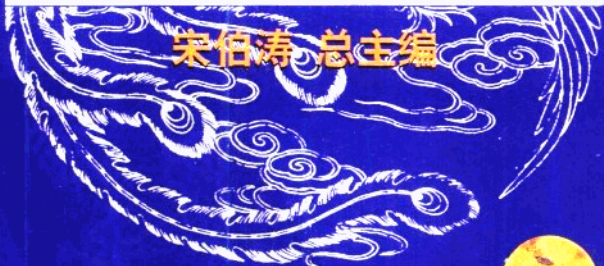
张志朝 主编



中数学



宋伯涛 总主编



中国青年出版社



北京朗曼教学与研究中心资料

中学数学 1 + 1

——高一数学同步讲解与测试
(下 册)

主编 张志朝 陶加庆

中国青年出版社

责任编辑:李培广

封面设计:Paul Song

中学数学 1+1

高一数学同步讲解与测试(下)

主编 张志朝 陶加庆

*

中国青年出版社出版 发行

社址:北京东四 12 条 21 号 邮政编码:100708

北京市昌平长城印刷厂印刷 新华书店总经销

*

880×1230 1/32 12.5 印张 400 千字

2000 年 7 月北京第 1 版 2003 年 1 月北京第 3 次印刷

定价:14.80 元

ISBN 7-5006-3663-6/G·1111

再 版 前 言

本丛书是由北京朗曼教学与研究中心根据中学数学教材修订再版的《中学数学1+1》系列丛书之一。它以新数学大纲为指导,按照新教材的体系分章编写。其特点在于结合教材对各章节重点、难点、疑点及考点等逐一进行讲解,内容详尽,条理清晰,分析透彻,所选例题题型系统全面。所涉及内容主要是各单元应掌握的基础知识、知识运用、思维方法、解题方法等,其中对例题的分析处理十分到位,不仅有恰到好处的思路点拨与规范解答,更重要的是解题后的说明,它是作者解题的体会和感受,是解题经验的总结。因此也可以说它是作者从解题实践中具体概括出来的精髓。在说明中,作者言简意赅地揭示巧思的思维过程;如何灵活地选用数学方法;对于可转化或引申的题目,给出其转化或引申的形式及其解法;对题中可能出现的错解予以指出等等。它将给学生以启示,帮助学生领悟作者选题的意图,使学生做到立足基础,抓住关键,突破难点,研究方法,以一题代一类,真正使学生做到举一反三,触类旁通,从而达到跳出题海、启迪思维的效果。同步测试部分根据各章节特点对基础知识、重点难点、知识应用进行针对性的巩固训练。其中选用了目前各地较为常用的题型,增加了一些体现近几年中考与高考命题方向的新题,并补充了一些与生产生活密切相关的应用题,可以说题型十分丰富,且综合性强,旨在帮助学生巩固知识,提高综合运用知识的能力。

学生在使用本书过程中,应结合教科书,努力掌握知识点的各种用法及注意事项,对某些重点难点要进行仔细的分析、研究,结合例题,做到深刻理解与牢固掌握。做同步练习时,要结合教科书及讲解内容进行独立思考,首先考虑应选择何种解题思路与策略,然后实施解题,并注意解题的规范性,解题结束后可与题解对照,弄懂弄通为什么是这个答案而不是那个答案?为什么这样解而不是那样解?还可以怎样解?怎样才对?从一个点进行发散性联想思维。课后还应对某些重点题目进行反复的再思考、再分析、再总结。有问题主动询问,及时解决。本中心答疑信箱就是为这一目的而开设的。

出版前,作者对书中许多地方作了较为合理的修改,但仍难免存有不尽人意之处,谨请广大读者批评指正。凡需要本书以及本系列其他丛书的读者可与本中心联系,通信地址:北京市朝阳区亚运村邮局89信箱,邮编:100101;联系电话:010-64926023、64925886。

宋伯涛

2003年1月于北师大



目 录

第四章 三角函数	(1)
本章教材分析	(1)
一、任意角的三角函数	(1)
4.1 角的概念的推广	(1)
学习目标	(1)
高考要求	(1)
知识点精讲	(1)
典例剖析	(3)
疑难问题举例	(5)
错解点击	(6)
本节小结	(6)
同步测试	(7)
同步测试解答	(8)
4.2 弧度制	(9)
学习目标	(9)
高考要求	(9)
知识点精讲	(10)
典例剖析	(10)
疑难问题举例	(12)
错解点击	(13)
本节小结	(14)
同步测试	(14)
同步测试解答	(16)
4.3 任意角的三角函数	(18)
学习目标	(18)
高考要求	(18)
知识点精讲	(18)
典例剖析	(19)
疑难问题举例	(22)



错解点击	(24)
本节小结	(26)
同步测试	(26)
同步测试解答	(29)
4.4 同角三角函数的基本关系式	(31)
学习目标	(31)
高考要求	(31)
知识点精讲	(31)
典例剖析	(33)
疑难问题举例	(37)
错解点击	(42)
本节小结	(43)
同步测试	(43)
同步测试解答	(46)
4.5 正弦、余弦的诱导公式	(49)
学习目标	(49)
高考要求	(49)
知识点精讲	(49)
典例剖析	(50)
疑难问题举例	(52)
错解点击	(55)
本节小结	(56)
同步测试	(56)
同步测试解答	(59)
阶段测试	(61)
阶段测试解答	(63)
二、两角和与差的三角函数	(66)
4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切	(66)
学习目标	(66)
高考要求	(66)
知识点精讲	(66)
典例剖析	(67)
疑难问题举例	(73)
错解点击	(78)
本节小结	(78)



同步测试 1	(79)
同步测试 1 解答	(81)
同步测试 2	(83)
同步测试 2 解答	(86)
4.7 二倍角的正弦、余弦、正切	(88)
学习目标	(88)
高考要求	(89)
知识点精讲	(89)
典例剖析	(89)
疑难问题举例	(97)
错解点击	(103)
本节小结	(105)
同步测试	(105)
同步测试解答	(107)
阶段测试	(110)
阶段测试解答	(112)
三、三角函数的图像和性质	(114)
4.8 正弦函数、余弦函数的图像与性质	(114)
学习目标	(114)
高考要求	(114)
知识点精讲	(115)
典例剖析	(116)
疑难问题举例	(122)
错解点击	(124)
本节小结	(125)
同步测试	(125)
同步测试解答	(128)
4.9 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像	(130)
学习目标	(130)
高考要求	(131)
知识点精讲	(131)
典例剖析	(132)
疑难问题举例	(133)
错解点击	(135)
本节小结	(137)



同步测试	(137)
同步测试解答	(141)
4.10 正切函数的图像和性质	(143)
学习目标	(143)
高考要求	(144)
知识点精讲	(144)
典例剖析	(145)
疑难问题举例	(146)
错解点击	(146)
本节小结	(147)
同步测试	(147)
同步测试解答	(151)
4.11 已知三角函数值求角	(154)
学习目标	(154)
高考要求	(154)
知识点精讲	(154)
典例剖析	(155)
疑难问题举例	(155)
错解点击	(157)
本节小结	(158)
同步测试	(158)
同步测试解答	(161)
阶段测试	(164)
阶段测试解答	(166)
专题一 三角函数的求值及恒等变形	(169)
同步测试	(176)
同步测试解答	(178)
专题二 三角函数的最值	(180)
同步测试	(185)
同步测试解答	(187)
阶段测试	(191)
阶段测试解答	(194)
第五章 平面向量	(197)
本章教材分析	(197)



一、向量及其运算	(197)
5.1 向 量	(197)
学习目标	(197)
考点要求	(198)
知识点精讲	(198)
典例剖析	(199)
疑难问题举例	(203)
错解点击	(204)
本节小结	(205)
同步测试	(205)
同步测试解答	(208)
5.2 向量的加法	(208)
学习目标	(208)
考点要求	(209)
知识点精讲	(209)
典例剖析	(210)
疑难问题举例	(214)
错解点击	(215)
本节小结	(216)
同步测试	(217)
同步测试解答	(219)
5.3 向量的减法	(220)
学习目标	(220)
考点要求	(221)
知识点精讲	(221)
典例剖析	(222)
疑难问题举例	(226)
错解点击	(227)
本节小结	(228)
同步测试	(228)
同步测试解答	(230)
5.4 实数与向量的积	(231)
学习目标	(231)
考点要求	(231)
知识点精讲	(231)



典例剖析	(232)
疑难问题举例	(235)
错解点击	(237)
本节小结	(238)
同步测试	(239)
同步测试解答	(241)
5.5 平面向量基本定理	(242)
学习目标	(242)
考点要求	(243)
知识点精讲	(243)
典例剖析	(243)
疑难问题举例	(246)
错解点击	(248)
本节小结	(249)
同步测试	(249)
同步测试解答	(252)
5.6 平面向量的坐标运算	(254)
学习目标	(254)
考点要求	(254)
知识点精讲	(254)
典例剖析	(255)
疑难问题举例	(258)
错解点击	(260)
本节小结	(260)
同步测试	(261)
同步测试解答	(263)
5.7 线段的定比分点	(265)
学习目标	(265)
考点要求	(265)
知识点精讲	(265)
典例剖析	(266)
疑难问题举例	(273)
错解点击	(275)
本节小结	(276)
同步测试	(277)



同步测试解答	(281)
5.8 平面向量的数量积及其运算律	(284)
学习目标	(284)
考点要求	(284)
知识点精讲	(284)
典例剖析	(285)
疑难问题举例	(289)
错解点击	(291)
本节小结	(292)
同步测试	(292)
同步测试解答	(295)
5.9 平面向量数量积的坐标表示	(297)
学习目标	(297)
考点要求	(297)
知识点精讲	(297)
典例剖析	(297)
疑难问题举例	(301)
错解点击	(303)
本节小结	(304)
同步测试	(304)
同步测试解答	(307)
5.10 平 移	(308)
学习目标	(308)
考点要求	(309)
知识点精讲	(309)
典例剖析	(310)
疑难问题举例	(313)
错解点击	(314)
本节小结	(315)
同步测试	(315)
同步测试解答	(318)
阶段测试(一)	(319)
阶段测试(一)解答	(323)
阶段测试(二)	(326)
阶段测试(二)解答	(330)



二、解斜三角形	(333)
5.11 正弦定理	(333)
学习目标	(333)
考点要求	(333)
知识点精讲	(334)
典例剖析	(335)
疑难问题举例	(339)
错解点击	(341)
本节小结	(342)
同步测试	(342)
同步测试解答	(345)
5.12 余弦定理	(348)
学习目标	(348)
考点要求	(348)
知识点精讲	(348)
典例剖析	(349)
疑难问题举例	(357)
错解点击	(359)
本节小结	(359)
同步测试	(360)
同步测试解答	(363)
5.13 解斜三角形应用举例	(365)
学习目标	(365)
考点要求	(365)
知识点精讲	(365)
典例剖析	(365)
疑难问题举例	(370)
错解点击	(372)
本节小结	(373)
同步测试	(373)
同步测试解答	(375)
阶段测试	(378)
阶段测试解答	(381)



第四章 三角函数

本章教材分析

三角函数是中学数学的重要内容之一,研究方法主要是代数的方法,它的基础主要是几何中的相似形和圆,因此对三角函数的研究,已经初步把代数和几何联系起来了.本章教材重点是:三角函数的概念;同角三角函数间的关系式和诱导公式;求任意角的三角函数值;正弦函数图像的作法和性质,主要难点是:弧度制和周期函数的概念;综合运用公式化简三角函数式和证明三角恒等式;函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像变换,使学生熟练掌握三角函数的定义、性质是学好本章的关键.

一、任意角的三角函数

4.1 角的概念的推广

学习目标

1. 理解按旋转方向的不同产生正角、负角、零角、象限角的概念.
2. 掌握终边相同角的概念及它的一般表示法,即终边与 α 相同的角,可写成 $k \cdot 360^\circ + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$).
3. 掌握按终边位置不同产生象限角和轴上角.

高考要求

象限角、终边相同角是理解全部三角知识的重要基础知识,一般结合后面“弧度制”考查,以选择题和填空题为主.

知识点精讲

1. 任意角的概念



角可以看成是一条射线从初始位置(始边)出发,绕着它的端点(顶点)旋转而成的.旋转终止时的射线称为角的终边.

我们规定按逆时针方向旋转所得的角为正角,顺时针方向旋转所得的角为负角,没有旋转的角为零角.因此,我们在确定一个角的大小时,不仅要看看它的始边与终边的位置,而且要看它是如何旋转而成的.这样一来,角的范围就打破了 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的限制,可以为“任意角”了.

任意角概念的建立,为建立一般角的三角函数的概念提供了条件,也为利用三角函数研究物体的转动提供了可能.

为方便起见,我们常把角放在直角坐标系中,使角的顶点和坐标原点重合,将角的始边放在 x 轴的正半轴上,这样,就可以通过对角的终边位置的研究来考察角.

2. 终边相同的角

任意一个角唯一地确定一条终边.但是,反过来任意一个终边位置却可以表示无数个角.

一个角,每增加或减少 360° ,终边就又回到原来的位置.终边相同的角周而复始地出现,正是三角函数具有周期性的本质原因,理解并掌握这种“周期现象”是学习好三角函数的关键之一.

α 角以及所有与 α 角终边相同的角都可以表示为 $k \cdot 360^\circ + \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$).因而,与 α 角终边相同的角的集合为

$$\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}.$$

① k 是整数;

② α 是任意角;

③ $k \cdot 360^\circ$ 与 α 之间是“+”号,如 $k \cdot 360^\circ - 30^\circ$,应看成 $k \cdot 360^\circ + (-30^\circ)$;

④终边相同的角不一定相等,但相等的角,终边一定相同.终边相同的角有无数个,它们相差 360° 的整数倍.

3. 象限角

角的终边在第几象限,就称这个角是第几象限的角.

如果角的终边在坐标轴上,这时的角不属于任何象限,可将其称为轴上角.根据角的终边在什么轴上,就称之为该轴上的角.

为了表示出所有的第一象限的角,可以先表示出 $0^\circ \sim 360^\circ$ 间第一象限的角 $0^\circ \sim 90^\circ$,然后再将它一般化,写出所有和它们终边相同的角,得

$$0^\circ + k \cdot 360^\circ < \alpha < 90^\circ + k \cdot 360^\circ (k \in \mathbb{Z}),$$

于是,第一象限角的集合就可以写成



$$\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

其他象限角的集合分别可写成:

第二象限角的集合

$$\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

第三象限角的集合

$$\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

第四象限角的集合

$$\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} \text{ 或 } \{\alpha \mid k \cdot 360^\circ - 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

注意区分下列角:

① $0^\circ \sim 90^\circ$ 间的角—— $\{\alpha \mid 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ\}$

② 第一象限角—— $\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

③ 锐角—— $\{\alpha \mid 0^\circ < \alpha < 90^\circ\}$

④ 小于 90° 的角—— $\{\alpha \mid \alpha < 90^\circ\}$



例1 给出下列四个命题:(1) -75° 是第四象限角;(2) 225° 是第三象限角;(3) 475° 是第二象限角;(4) -315° 是第一象限角.其中正确的有

()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

分析:分别作出这些角的终边,即知这些角为第几象限的角,进而可对以上各命题的真假作出判断.

解:通过作出这些角的终边,可知:命题(1)、(2)、(3)、(4)均为真命题,故应选择 D.

说明:对于一个任意角 α ,若要确定它为第几象限的角,除了作出这个角的终边确定为第几象限角的方法外,我们还可以把角 α 表示为: $\alpha = k \cdot 360^\circ + \alpha'$ (其中 $k \in \mathbb{Z}, 0^\circ \leq \alpha' < 360^\circ$). 由于 α 与 α' 同终边,因此只要确定 α' 所在的象限,也就可知 α 为第几象限的角. 例如: $\because 475^\circ = 360^\circ + 115^\circ$, 又 $\because 115^\circ$ 是第二象限的角,故 475° 也是第二象限角;又如: $\because -315^\circ = -360^\circ + 45^\circ$, 且由 45° 为第一象限角,故 -315° 也是第一象限角.

例2 在 0° 到 360° 范围内,找出与下列各角终边相同的角,并指出它们是哪个象限的角:

(1) $2903^\circ 15'$

(2) $-845^\circ 10'$

分析:写出终边与(1)、(2)相同的角的集合,再根据里面 k 的取值



就可以找出所需的角.

解:(1)终边与 $2903^{\circ}15'$ 相同的角的集合为:

$$S = \{\beta | \beta = k \cdot 360^{\circ} + 2903^{\circ}15', k \in \mathbb{Z}\}$$

当 $k = -8$ 时, $\beta = 23^{\circ}15'$,

故在 0° 到 360° 范围内, 终边与 $2903^{\circ}15'$ 相同的角是 $23^{\circ}15'$, 它是第一象限的角.

(2)终边与 $-845^{\circ}10'$ 相同的角的集合为:

$$S = \{\beta | \beta = k \cdot 360^{\circ} - 845^{\circ}10', k \in \mathbb{Z}\}$$

当 $k = 3$ 时, $\beta = 234^{\circ}50'$.

故在 0° 到 360° 范围内, 终边与 $-845^{\circ}10'$ 相同的角是 $234^{\circ}50'$, 它是第三象限的角.

说明: 任何一个正角(或负角)都可以看成是由 $0^{\circ} \sim 360^{\circ}$ 间的某个角通过逆时针(或顺时针)方向旋转整数圈而得到的.

例 3 把 1230° , -3290° 写成 $k \cdot 360^{\circ} + \alpha$ (其中 $(0^{\circ} \leq \alpha < 360^{\circ}, k \in \mathbb{Z})$) 的形式.

分析: 用所给角除以 360° , 将余数作为 α .

$$\text{解: } \because 1230 \div 360 = 3 \text{ 余 } 150, \therefore 1230^{\circ} = 3 \times 360^{\circ} + 150^{\circ}.$$

$$\therefore -3290 \div 360 = -10 \text{ 余 } 310,$$

$$\therefore -3290^{\circ} = -10 \times 360^{\circ} + 310^{\circ}.$$

说明: 负角除以 360° , 为保证余数为正角, 试商时应使得到的负角的绝对值大于已知负角的绝对值.

例 4 写出终边在 y 轴上的角的集合.

解: 终边在 y 轴的正半轴上角的集合为

$$\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^{\circ} + 90^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

终边在 y 轴的负半轴上角的集合为

$$\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^{\circ} + 270^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

故终边在 y 轴上角的集合为

$$\begin{aligned} & \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^{\circ} + 90^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^{\circ} + 270^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha | \alpha = 2k \cdot 180^{\circ} + 90^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = (2k+1) \cdot 180^{\circ} + 90^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha | \alpha = n \cdot 180^{\circ} + 90^{\circ}, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

说明: 同样方法可写出终边在 x 轴上的角的集合为

$$\begin{aligned} & \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = k \cdot 360^{\circ} + 180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha | \alpha = 2k \cdot 180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = (2k+1) \cdot 180^{\circ}, k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\alpha | \alpha = n \cdot 180^{\circ}, n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$



终边在坐标轴上角的集合为

$$\{ \alpha \mid \alpha = n \cdot 180^\circ + 90^\circ, n \in \mathbf{Z} \} \cup \{ \alpha \mid \alpha = n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z} \} \\ = \{ \alpha \mid \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \}.$$

我们一定要理解这种求并集的方法.

疑难问题举例

例5 已知 α 是第二象限角, 试确定① 2α , ② $\frac{\alpha}{2}$, ③ $-\alpha$ 所在的象限.

分析: 由 α 的一般表达式, 推算出 2α , $\frac{\alpha}{2}$, $-\alpha$ 的一般表达式, 再对 k 进行必要的讨论, 即可使问题获解.

解: ① $\because \alpha$ 是第二象限角,

$$\therefore k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}$$

$$\therefore 2k \cdot 360^\circ + 180^\circ < 2\alpha < 2k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbf{Z}$$

$\therefore 2\alpha$ 与 $180^\circ \sim 360^\circ$ 的角的终边相同.

故 2α 是第三、第四象限角. 特别地, 2α 也可以是终边在 y 轴负半轴上的角(它不属于任何一个象限).

$$\textcircled{2} \because k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z} \quad (*)$$

当 k 为偶数时, 设 $k = 2m (m \in \mathbf{Z})$, 有

$$m \cdot 360^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < m \cdot 360^\circ + 90^\circ,$$

这时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第一象限的角.

当 k 为奇数时, 设 $k = 2m + 1 (m \in \mathbf{Z})$, 有

$$(2m + 1) \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < (2m + 1) \cdot 180^\circ + 90^\circ, \text{ 即}$$

$$k \cdot 360^\circ + 225^\circ < \frac{\alpha}{2} < m \cdot 360^\circ + 270^\circ,$$

这时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限的角.

$\therefore$ 当 α 为第二象限角时, $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第三象限的角.

$$\textcircled{3} \because -k \cdot 360^\circ - 180^\circ < -\alpha < -k \cdot 360^\circ - 90^\circ, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\therefore -(k + 1) \cdot 360^\circ + 180^\circ < -\alpha < -(k + 1) \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}.$$

故 $-\alpha$ 为第三象限角.