

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

高等量子力学

Advanced Quantum Mechanics

(第二版)

喀兴林

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等量子力学 / 喀兴林. —2 版. —北京: 高等教育出版社, 2001. 8
研究生教学用书
ISBN 7-04-009925-X

I. 高... II. 喀... III. 量子力学-研究生教育-教材 IV. 0413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 044136 号

高等量子力学(第二版)

喀兴林

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

电 话 010-64054588

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

邮政编码 100009

传 真 010-64014048

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16

印 张 33

字 数 610 000

版 次 1999 年 6 月第 1 版

2001 年 8 月第 2 版

印 次 2001 年 8 月第 1 次印刷

定 价 44.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内 容 提 要

高等量子力学课程是物理类各专业研究生的一门基础课. 本书第一版就是作者在讲授此课程近20年所用讲义的基础上增改而成的. 本第二版是在原第一版的基础上修订而成的, 此次修订主要增加了量子力学理论在一些具体问题中的典型应用技巧, 加强了帮助读者提高应用能力的內容. 全书共分八章: 希尔伯特空间、量子力学的理论结构、狄拉克方程、对称性理论、角动量理论、散射理论、二次量子化以及辐射的量子理论, 內容充实新颖, 理论结构和逻辑关系完整严密, 并广泛采用算符代数方法. 本书以基本原理为出发点进行严谨的阐述, 概念定义准确, 分析透彻, 数学推演脉络清楚; 同时注重理解能力、分析能力的训练和培养. 本书是一本易读且又能引导读者进入较深层次的量子力学教材.

本书可作为高等学校物理类各专业, 特别是理论物理专业研究生的教材, 亦可供物理教师参考以及研究人员案头查阅.

第二版序

本书第二版除改正了已经发现的印刷错误和一些不妥之处外,主要增加了量子力学理论在一些具体问题中的典型应用技巧,加强了帮助读者提高应用能力的內容.同时对部分章节作了调整,成为8章38节160小节,使章节划分更趋合理.至于本书的编写目的、编写原则和宗旨则未作改变.

北京师范大学讲授本书的刘晓明同志和中国科学院理论物理所学习本书的张芑同学分别提供了他们所讲所学部分的详尽的勘误表,张芑同学并对本书的内容和讲法提出了一些有益的意见.作者感谢他们二位对本书的关心和爱护.

在准备本书第二版期间,承蒙荆州师范学院提供了十分周到的工作条件和生活条件.为此,作者对院领导以及物理系徐大海、李光惠等同志表示衷心感谢.

作者写第二版序的时候,是2000年12月底,正值量子理论诞生100周年和量子力学诞生75周年.可以毫不夸张地说20世纪是量子力学的世纪.在20世纪之末,20世纪的量子力学已成为一门高度成熟的学科.作者有幸学习了量子力学,并为能对20世纪的量子力学的总结和传播尽自己一点微薄的力量而感到十分高兴和欣慰.

当前,正如19世纪末一些实验的重大突破和理论思考孕育了20世纪的量子力学一样,在量子力学领域又有了一系列突破性实验和理论概念上的重大进展.这预示着量子力学将在新世纪中出现第二次大发展和大飞跃.21世纪极有可能仍是量子力学的世纪.

在新世纪即将到来之际,作者愿将此书献给学习传统量子力学的读者;也同样愿意将此书献给那些有志于进入21世纪新量子力学领域的读者,因为传统量子力学是进入这个领域的必经之门.

喀兴林

2000年12月23日

第一版序

高等量子力学是攻读硕士学位研究生的一门基础课,多数物理类专业都要开设这门课程.本书就是为这些专业的研究生,特别是各类理论专业的研究生所写的教材.

1978年暑期,当时的教育部和中国科学院联合在北京师范大学举办了“高等量子力学讲习班”,作者在这个讲习班上的讲稿应该是本书的第一稿,那时只印发了一份简单的提纲.到了1982年作者在华中工学院(现华中科技大学)为理论物理专业的研究生讲授此课时,形成了一份讲义.这份讲义后来被一些学校采用,作者也一直沿用多年,没有作大的增删.这次成书,是在这份讲义的基础上,加上作者近20年的教学积累,全面重新动笔写成的,可以说是三易其稿了.

给研究生开设基础课的目的,固然要教给他们这样那样的知识,但更重要的是使他们学会自己获取知识的本领.在这个意义上讲,基础课教材就是训练能力的一种程序,教材以具体知识为依托,给学生设计了一系列训练任务,使他们在完成这一系列学习任务中,逐步提高自己的理解能力、推理能力、分析能力和计算能力.因此,本书并不追求“简明易懂”、“深入浅出”,与此相反,和军事训练及体育训练类似,常常安排一些较难的事情要读者去理解、去完成;在正文和练习中也不避免冗长的推导和计算.须知学习的收获总是和付出的劳动成正比的.

量子力学是一门高度成熟的学科.它在建立之初,其发展的速度就是很不寻常的.在1925年和1926年之交,量子力学诞生之后短短几年,就有一批相当成熟的专著问世.如 Dirac (1930年)、Wigner (1931年)、Fock (1932年)和 Pauli (1933年)等人的名著就是在那个时候相继问世的,这些书至今仍是量子力学的经典.时至今日,量子力学已进入古稀之年,在世界图书之林中,量子力学书籍汗牛充栋,不可胜数.经过前人多年来的开拓和雕琢,量子力学的理论框架已经完全定型,甚至其中每个具体问题都已有了典型和标准的处理方法.

写一本新的量子力学书,当然不应该也不可能离开这些前人积累下来的理论框架和定型的方法,相反,应当把这些宝贵的精华内容继承下来和传递下去;然而又不应该只是把这些已有的东西收集起来,整理、堆砌成书.本书就作者力之所及,尽量写成一本有一点特点的,而不是“博采众长”式的教材.本书强调全书的整体性、理论推理的逻辑性、概念的准确性和讲解的可读性.

EAP38/1c

书中收入了一些作者本人的教学研究成果,同时在引导研究生学习,帮助他们提高自己的能力方面做了一些安排,希望能提供一本相对容易读而又能引导读者进入较深层次的量子力学教材。

本书的特点可以用“老”、“细”、“新”三个字来概括。

“老”是指内容取材。量子力学有基本理论,也有基本理论的扩展和延伸;有最新的发展和最新的应用,还有对量子力学的诠释的种种见解和争论。作者认为,作为研究生的基础课,应当主要讲清量子力学中最基本、最核心的内容,这是量子力学这座大厦的基础和骨架。这些内容多是较老的内容,在量子力学诞生后不久即已完成,而学好这些内容正是掌握量子力学的关键所在。因此本书不求新、不求全,把主要精力用于引导研究生学习这些“老”内容,打好扎实的根底。有了扎实的根底,再去学习新发展和新应用肯定是不困难的。至于量子力学的诠释等争论问题,各种观点已经争论了70年,一直未能得到公认的看法。而且不论今后哪种观点被证明是对的,本书的全部内容基本上都无需改动。因此本书不涉及这方面的问题。

“细”是指写作风格。叙述讲解力求清楚透彻,基本概念力求定义准确、分析深刻,而教材的理论结构和逻辑关系也力求完整严密。至于数学的推导和计算也力求给出明确的交代,决不用“显而易见”、“不难看出”一类的词句带过。本书的重点目标是使读者对于量子力学有透彻的理解和较深刻的掌握,而不在于堆砌广博的知识、广泛的应用和一些计算技巧。举例和练习题也多是为深入掌握概念服务的。在本书中,一个内容若不讲就完全不讲,若讲就讲到底、讲透,不搞“概论”、“简介”之类令读者一知半解的内容。

“新”是指本书的面貌。本书中有一些作者自己的东西。在体系的安排和内容的处理上有与别的书不同的地方,在内容的组织和概念的讲解方面有一些作者的看法,在传统的处理方法中有时加入了作者的改进或补充。在计算方面作者发展了算符代数的方法,并广泛运用在各种计算之中。本书有7章36节152小节,上述新的内容除散在各处的之外,约有30个小节是本书所独有的,是其他书中找不到的。在全书近280道练习题中,也有约1/3是作者为本书自拟的。当然,这些多属雕虫小技,在如此高度成熟的理论中是无足轻重的,只是作者的一些学习体会而已,觉得可能还有一点用处,所以写出来与读者共享。

特点不等于优点,正好相反,上述三个特点可能带来一系列缺点。由于一本书篇幅有限,强调了一方面必然就要削弱相反的一面。“老”字强调基本内容就使得新内容较少,缺少量子力学的最新进展,缺少时代气息。“细”字占篇幅较多,可能为学习能力较强的研究生所不喜。另外,“路径积分”是研究生应该学习的,只是由于本书过于强调理论的整体性,使得这一段内容不论从物理方面还是从数学方面来说都显得与本书格格不入,而未能写入本书。

“新”字有时可能反映了作者看法的片面性,作者认为好的东西实际上未必真的那么好.不过书成之后,作者还是认为本书确是体现了作者的写作意图,大体上是作者想写的那个样子.虽然这样写法使出错的概率大大增加,但总比写成一本四平八稳、不痛不痒的书稍微强一点.

作者深知,自己有某些长处,也有明显弱点,这两方面肯定都会在书中反映出来.本书不会一点意思也没有,但也决不是一本十全十美的书;好在当前好书很多,而研究生本来就不应该只抱着一本书读.作者相信,有了扎实的根基,本书未收入的内容以及比本书更好的讲法,都是不难找到、不难掌握的.

学习本书需要学过本科量子力学课,虽然本书在逻辑上并不依赖于此课.另外,需要学过或与本书同时学习群论,主要是有限群的构造和表示.

本书在多数小节后面附有练习题.这些题目的主要目的在于加深对基本概念的理解和进行计算能力的训练,有的题目较容易,也有的题目较难较繁.作者不拟给出这些题目的解答,建议读者充分利用这些题目检查和锻炼自己的理解能力和工作能力.在本书处于油印的第二稿阶段时,就已出现两种版本铅印的题解,本书的题目今后也难免有人做出解答流传,但是作者的的经验是,自己经过艰苦思考后所得出的解答,要比看懂别人的解答收获更大.

本书针对量子力学这门学科的特点,设计了一套符号体系.这套符号体系以简洁灵活为特点,尽量遵守国家的有关规定,尽量采纳国际组织的有关推荐,也尽量不过分违反多年来的习惯用法.

高崇寿同志审阅了本书书稿,提出了不少重要的和原则性的意见,指出了一些应作改进的具体内容,这些意见很中肯,使作者受益不浅.张永德同志和裴寿镛同志仔细地看过书稿,并多次同作者讨论,作者吸收了很多建议,使本书增色不少.作者对以上三位同志表示衷心的感谢.

本书得到了北京师范大学研究生院“研究生重点基础课建设基金”的支持,特此致谢.

本书的写作,时间并不仓促,作者也尽了全力,但受作者功力所限,有些章节写得还不理想,也难免存在不当或错误之处,敬请物理界前辈、教坛同仁和后学诸君不吝赐教,批评指正.

喀兴林

1998年1月于北京师范大学

作者简历



喀兴林, 蒙古族人, 蒙姓喀尔堪, 祖籍甘肃敦煌一带(现甘肃省肃北蒙古族自治县). 1929年6月生于吉林省吉林市, 北京师范大学教授.

中国物理学会第四、五、六届理事, 在学会内任物理教学委员会委员、副主任委员; 物理名词委员会委员; 《大学物理》杂志副主编.

高等院校量子力学研究会理事长、名誉理事长.

曾任国家教委理科物理教材编审委员会、物理教学指导委员会成员; 理论物理教材编审组和教材建设组副组长.

1951年毕业于北京师范大学物理系本科. 毕业后留校任教. 毕生从事理论物理, 特别是量子力学的教学工作. 1994年退休. 著述不多, 本书为代表作.

目 录

第一章 希尔伯特空间.....	1
§ 1 矢量空间	1
§ 1-1 定义	1
§ 1-2 正交性和模	5
§ 1-3 基矢	6
§ 1-4 子空间	11
§ 1-5 右矢和左矢	12
§ 2 算符	15
§ 2-1 定义	16
§ 2-2 算符的代数运算	19
§ 2-3 作用于左矢的算符	24
§ 2-4 厄米算符和幺正算符	27
§ 2-5 投影算符	30
§ 3 本征矢量和本征值.....	32
§ 3-1 定义	32
§ 3-2 本征矢量的完全性	33
§ 3-3 厄米算符完备组	36
§ 3-4 无穷维空间情况	39
§ 4 表象理论	42
§ 4-1 矢量和算符的矩阵表示	42
§ 4-2 表象变换	45
§ 4-3 若干矩阵运算	47
§ 4-4 连续本征值情况	50
§ 5 矢量空间的直和与直积	52
§ 5-1 直和空间	52
§ 5-2 直积空间	55
第一章参考文献	59
第二章 量子力学的理论结构	60
§ 6 量子力学的基本原理	60

§ 6-1 引言	60
§ 6-2 基本原理	61
§ 6-3 关于状态叠加原理	65
§ 6-4 算符的构成	67
§ 6-5 矢量算符的代数运算	74
§ 6-6 不确定关系	78
§ 6-7 本节小结和若干说明	80
§ 7 位置表象和动量表象	82
§ 7-1 本征值谱和本征矢量	82
§ 7-2 位置表象和动量表象	84
§ 7-3 位置表象的函数形式	88
§ 7-4 xyz 表象和 $r\theta\varphi$ 表象	90
§ 7-5 函数空间的性质	94
§ 8 角动量算符和角动量表象	96
§ 8-1 几种角动量算符	96
§ 8-2 轨道角动量和方向算符	99
§ 8-3 量子数 l 的升降算符	102
§ 8-4 球谐函数	104
§ 8-5 lm 表象和 $\theta\varphi$ 表象	109
§ 8-6 自旋和自旋表象	111
§ 9 定态薛定谔方程	114
§ 9-1 概述	114
§ 9-2 一维谐振子	118
§ 9-3 氢原子	126
§ 9-4 氢分子离子的基态	135
§ 10 定态微扰法	140
§ 10-1 无简并情况	140
§ 10-2 简并情况	142
§ 10-3 例: 二次 Stark 效应	150
§ 11 运动方程	155
§ 11-1 薛定谔方程	155
§ 11-2 演化算符	157
§ 11-3 绘景变换 薛定谔绘景	159
§ 11-4 海森伯绘景	160

§ 11-5 连续性方程	164
§ 11-6 相互作用绘景	166
§ 12 例: 受微扰的谐振子	169
§ 12-1 薛定谔绘景	170
§ 12-2 相互作用绘景	172
§ 12-3 海森伯绘景	174
§ 13 谐振子的相干态	179
§ 13-1 定义	179
§ 13-2 相干态的性质	182
§ 13-3 幅值算符和相位算符	184
§ 13-4 相干态集合的性质	187
§ 13-5 相干态表象	189
§ 14 密度矩阵	192
§ 14-1 纯态和混合态	192
§ 14-2 密度算符和密度矩阵	194
§ 14-3 例	200
第二章参考文献	205
第三章 狄拉克方程	206
§ 15 电子的相对论运动方程	206
§ 15-1 概述	206
§ 15-2 克莱因-高登方程和狄拉克方程	207
§ 15-3 自旋算符	211
§ 16 γ 矩阵	213
§ 16-1 γ 矩阵的维数	213
§ 16-2 γ 矩阵的各种表示	216
§ 17 狄拉克方程的两个严格解	222
§ 17-1 自由电子	222
§ 17-2 氢原子的严格解	227
§ 17-3 径向方程的解	232
§ 18 狄拉克方程的低能极限	237
§ 18-1 概述	237
§ 18-2 Foldy - Wouthuysen 变换	239
§ 18-3 低能极限	244
第三章参考文献	246

第四章 对称性理论	247
§ 19 空间对称性和守恒定律	247
§ 19-1 概述	247
§ 19-2 空间对称变换	247
§ 19-3 空间反演	250
§ 19-4 空间平移	252
§ 19-5 空间转动	253
§ 19-6 空间变换对称性和守恒定律	256
§ 20 哈密顿算符的对称性群	258
§ 20-1 群表示论中的若干结果	258
§ 20-2 对称性群	261
§ 20-3 微扰对能级简并的影响	263
§ 20-4 动力学对称性	265
§ 21 时间平移和时间反演	270
§ 21-1 时间平移	270
§ 21-2 时间反演	272
§ 21-3 实表示和复表示	278
§ 21-4 时间反演引起的附加简并	282
第四章参考文献	288
第五章 角动量理论	289
§ 22 角动量和转动群	289
§ 22-1 本章概述	289
§ 22-2 空间转动	289
§ 22-3 正当转动群	294
§ 22-4 正当转动与角动量	305
§ 23 角动量的耦合	308
§ 23-1 两个角动量的耦合	308
§ 23-2 CG 系数的计算	310
§ 23-3 CG 系数和转动矩阵	314
§ 23-4 CG 系数和 $3j$ 符号	316
§ 23-5 三个角动量的耦合	321
§ 23-6 $6j$ 符号和 $9j$ 符号	324
§ 23-7 LS 耦合和 jj 耦合	326
§ 24 不可约张量算符	328

§ 24-1 张量和张量算符	328
§ 24-2 不可约张量算符的定义和性质	333
§ 24-3 Wigner-Eckart 定理	335
§ 25 应用例: 磁场中的氢原子	341
§ 25-1 哈密顿算符	341
§ 25-2 $B=0$ 的情况 能级的精细结构	342
§ 25-3 B 为任意值的情况	343
§ 25-4 B 取值的两种极端情况	348
§ 26 应用例: 能级的超精细结构	351
§ 26-1 概述	351
§ 26-2 核磁偶极矩的影响	351
§ 26-3 核电四极矩的影响	358
第五章参考文献	364
第六章 散射理论	365
§ 27 定态散射理论	365
§ 27-1 基本概念	365
§ 27-2 格林函数	368
§ 27-3 李普曼-史温格方程	372
§ 27-4 T 算符和 S 算符	375
§ 27-5 散射截面和玻恩近似	378
§ 28 含时散射理论	382
§ 28-1 概述	382
§ 28-2 含时格林算符	383
§ 28-3 摩勒算符和 S 算符(薛定谔绘景)	387
§ 28-4 摩勒算符和 S 算符(相互作用绘景)	391
§ 28-5 S 矩阵的物理意义	394
§ 28-6 散射截面	397
§ 29 角动量表象	399
§ 29-1 分波展开	399
§ 29-2 考虑自旋轨道相互作用的电子散射	405
§ 29-3 电子在氢原子上的散射	408
第六章参考文献	413
第七章 二次量子化	414
§ 30 全同粒子系统的希尔伯特空间	414

§ 30-1 对称化的基矢	414
§ 30-2 正交归一化关系和完全性关系	417
§ 30-3 应用例: 转动算符矩阵元的直接计算	420
§ 31 产生算符和消灭算符	423
§ 31-1 定义	423
§ 31-2 占有数密度算符和总粒子数算符	426
§ 31-3 位置表象和表象变换	427
§ 31-4 算符的二次量子化形式	430
§ 31-5 巨希尔伯特空间	433
§ 32 离散本征值情况	434
§ 32-1 基矢	434
§ 32-2 产生算符和消灭算符	437
§ 32-3 占有数算符	439
§ 32-4 算符的二次量子化形式	440
§ 32-5 例: 反对称的自旋态	441
§ 33 例: 电子气	444
§ 33-1 模型	444
§ 33-2 整个系统的哈密顿	444
§ 33-3 系统的基态	447
§ 33-4 基态能量	448
§ 34 哈特利-福克方法	450
§ 34-1 概述	450
§ 34-2 哈密顿的期望值	451
§ 34-3 哈特利-福克方程	452
§ 34-4 位置表象中的哈特利-福克方程	454
§ 34-5 例: 电子气	455
§ 35 占有数表象	459
§ 35-1 态函数	459
§ 35-2 产生算符和消灭算符	460
§ 35-3 算符两种形式的比较	463
§ 36 全同粒子系统的运动方程	465
§ 36-1 巨希尔伯特空间中的运动方程	465
§ 36-2 算符随时间的变化	466
§ 36-3 “二次量子化”一词的来源	468

§ 36-4 波粒二象性与场的量子化	471
第七章参考文献	472
第八章 辐射的量子理论	473
§ 37 自由电磁场的量子化	473
§ 37-1 概述	473
§ 37-2 自由电磁场	474
§ 37-3 量子化	476
§ 37-4 薛定谔绘景	479
§ 38 辐射场和电子的相互作用	480
§ 38-1 系统和哈密顿	480
§ 38-2 跃迁概率	481
§ 38-3 原子对光的发射和吸收	484
§ 38-4 普朗克的黑体辐射公式	487
§ 38-5 康普顿散射	488
第八章参考文献	499
一般参考书目	500
索引	501

第一章 希尔伯特空间

本章讨论量子力学的主要数学工具——希尔伯特空间,即满足一定要求的多维矢量空间.我们在讨论中尽可能与物理的需要相结合,强调逻辑推理的严格性,但对数学严格性则不作过多要求.

§ 1 矢量空间

§ 1-1 定义

我们讨论的对象是很广泛的,可以是实数或复数,可以是有序的一组数,可以有方向的线段,也可以是一种抽象的东西.我们把这些通称之为**数学对象**.同类的许多数学对象满足下面所述的一系列要求时,就构成一个**矢量空间**;每一个对象称为空间的一个**元**,或称为**矢量**.

我们考虑无穷多个同类的数学对象的集合 $\{\psi, \varphi, \chi, \dots\}$,在它们之间规定加法、数乘和内积三种运算.

加法 集合中任意两个矢量相加,都能得到集合中另一矢量.即规定一种加法规则,使得集合中任意给定两个矢量 ψ 和 φ ,总有一个确定的矢量 χ 与之对应,记成

$$\chi = \psi + \varphi$$

加法规则视不同对象可以不同,但一定要满足下列四个条件:

条件(1) $\psi + \varphi = \varphi + \psi$ (交换律)

条件(2) $\psi + (\varphi + \chi) = (\psi + \varphi) + \chi$ (结合律)

条件(3) 集合中有零矢量 O 存在,对任意矢量 ψ 满足
 $\psi + O = \psi$ (加法单位元存在)

条件(4) 对集合中任意矢量 ψ ,都有矢量 φ 存在,满足
 $\psi + \varphi = O$ (加法逆元存在)

我们把满足条件(4)的 φ 记为

$$\varphi = -\psi$$

同时把 $\chi + (-\psi)$ 记为

$$\chi - \psi$$

数乘 集合内任一矢量可以与数(实数或复数)相乘,得出集合内另一矢

量. 即规定一种数乘规则, 使任意矢量 ψ 和一个数 a , 在集合内总有一个矢量 φ 与之对应, 记为

$$\varphi = \psi a = a \psi$$

φ 称为 ψ 与 a 的乘积. 数乘与次序无关. 我们推荐把数写在矢量后面, 这样在量子力学中特别方便. 数乘要满足下列四个条件:

$$\text{条件(5)} \quad \psi 1 = \psi$$

$$\text{条件(6)} \quad (\psi a) b = \psi (a b) \quad (\text{结合律})$$

$$\text{条件(7)} \quad \psi (a + b) = \psi a + \psi b \quad (\text{第一分配律})$$

$$\text{条件(8)} \quad (\psi + \varphi) a = \psi a + \varphi a \quad (\text{第二分配律})$$

a 是实数时, 空间称为在实数域上的矢量空间; a 是复数时, 则称为在复数域上的矢量空间.

内积 两个矢量可以作内积, 得出一个数. 即规定一种内积规则, 按一定次序任取两个矢量 ψ 和 φ , 总有一个数 c 与之相对应, 记作

$$(\psi, \varphi) = c$$

在实数域(复数域)上的矢量空间中的内积, 所得的也是实数(复数). 内积与两个因子的次序有关, 内积规则要满足下列四个条件:

$$\text{条件(9)} \quad (\psi, \varphi) = (\varphi, \psi)^* \quad (c^* \text{表示 } c \text{ 的复共轭})$$

$$\text{条件(10)} \quad (\psi, \varphi + \chi) = (\psi, \varphi) + (\psi, \chi) \quad (\text{分配律})$$

$$\text{条件(11)} \quad (\psi, \varphi a) = (\psi, \varphi) a$$

$$\text{条件(12)} \quad (\psi, \psi) \geq 0 \text{ 对任意 } \psi \text{ 成立; 若 } (\psi, \psi) = 0, \text{ 则必有}$$

$$\psi = 0$$

具有加法与数乘两种运算并满足条件(1)~(8)的集合称为**矢量空间**或**线性空间**. 具有加法, 数乘和内积三种运算的空间称为**内积空间**, 而完全的内积空间称为**希尔伯特空间**. 在本章中, 矢量空间一词通常指在复数域上的内积空间.

空间的完全性的意义为空间中任何在 Cauchy 意义下收敛的序列 $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$ 的极限也必须在本空间中. Cauchy 意义下收敛的意思是: 对给定任意小的实数 $\varepsilon > 0$, 有数 N 存在, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$(\psi_m - \psi_n, \psi_m - \psi_n) < \varepsilon$$

在量子力学中所用到的空间, 就是复数域上的希尔伯特空间.

下面我们举出矢量空间的一些简单性质.

(1) 在矢量空间中, 零矢量是唯一的.

证明 设在空间中有 O_1 和 O_2 , 对所有矢量 ψ 都满足

$$\psi + O_1 = \psi, \quad \psi + O_2 = \psi$$

取第一式中的 ψ 为 O_2 , 第二式中的 ψ 为 O_1 , 分别得