全国工程硕士研究生入学考试

数学学习指导

黄金坤　主编

化学工业出版社

全国工程硕士研究生入学考试
数学学习指导

黄金坤　主编

化学工业出版社
·北　京·

(京)新登字039号

图书在版编目（CIP）数据

全国工程硕士研究生入学考试数学学习指导/黄金坤主编．—北京：化学工业出版社，2002.3
ISBN 7-5025-3635-3

Ⅰ.全…　Ⅱ.黄…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第008863号

全国工程硕士研究生入学考试
数学学习指导
黄金坤　主编
责任编辑：唐旭华
责任校对：蒋　宇
封面设计：蒋艳君
*
化学工业出版社出版发行
（北京市朝阳区惠新里3号　邮政编码100029）
发行电话：(010)64982530
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市前程装订厂装订
开本850×1168毫米 1/32　印张11　字数299千字
2002年4月第1版　　2002年4月北京第1次印刷
ISBN 7-5025-3635-3/G·976
定　价：22.00元

前　言

经国家教育部和国务院学位委员会批准，1997 年在全国开始进行工程硕士专业学位的试点招生，2000 年制订全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲并编写数学考前辅导教材，2001 年开始全国工程硕士数学统考。几年来参加考试人数不断增加，迫切需要一本复习与应试的参考书，为了满足广大应试者的要求，我们特组织北京高校参加过考前辅导的几位经验丰富的教师，编写了这本学习指导书。此书对收集的 600 多道习题，其中有数学考前辅导教材中的全部习题，还有我们精心选取的补充习题，进行了比较详细的分析与解答。这些习题类型全面多样，具有典型性与综合性，对考生掌握基本内容，提高分析与解题能力会有很大帮助。本书还提供了四套模拟试题（含解答）及 2001 年全国工程硕士研究生入学考试数学甲、乙两套试题（含参考解答）供考生应试练习参考。书后还附有全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲（节录）。

本书可作为工程硕士研究生入学考试应试者复习与备考的学习指导，也可作为广大本科生学习数学的参考资料。

在编写过程中主要参考了《全国工程硕士研究生入学考试数学考试大纲及考前辅导教材》（全国工程硕士专业学位教育指导委员会编）一书，并得到了化学工业出版社的大力支持，这里一并表示衷心的感谢。

参加本书编写的有：黄金坤、侍子云、刘达民、刘延滨，并由黄金坤教授担任主编。由于我们水平有限，时间仓促，缺点与错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2002 年 1 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

一、习题与解答

1. 下述函数 $f(x)$，$g(x)$是否相等，为什么？

(1) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(2) $f(x)=\sin(\arcsin x)$，$g(x)=\arcsin(\sin x)$.

解　(1) $f(x)\neq g(x)$，因为 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不同，$f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，$g(x)$的定义域是$[0,+\infty)$.

(2) $f(x)\neq g(x)$，因为 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不同，$f(x)$的定义域是$[-1,1]$，而 $g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $f(1)$，$f(-2)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

解　$f(1)=0$，$f(-2)=0$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 作下列函数图形.

(1) $y=|\sin x+\cos x|$；　　(2) $y=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ x^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$

解　(1) $y=|\sin x+\cos x|$的图形如图 1.1.

(2) $y=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ x^{-1}, & |x|>1\end{cases}$的图形如图 1.2.

4. 已知 $f(x)$是线性函数，即 $f(x)=ax+b$，且 $f(-1)=2$，$f(2)=-3$，求 $f(5)$.

解　因为 $f(x)=ax+b$，$f(-1)=2$，$f(2)=-3$，

所以　$a(-1)+b=2$，$2a+b=-3$，

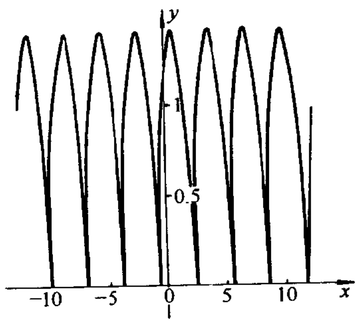

图 1.1

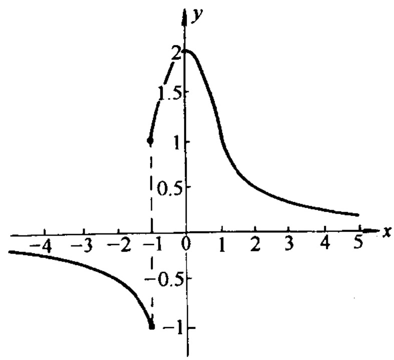

图 1.2

所以　$a=-\dfrac{5}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$.

故　$f(5)=\left(-\dfrac{5}{3}\right)\times 5+\dfrac{1}{3}=-8$.

5. 求下列函数定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$；　　(2) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；

(3) $y=\sqrt{x^2-x}\arcsin x$；　(4) $y=\arccos\sqrt{\lg(x^2-1)}$.

解　(1) 欲使函数 y 有意义，只需 $|x|-x\neq 0$，即 $x<0$. 所以函数的定义域为 $(-\infty, 0)$.

(2) 若 $\sqrt{\sin x}$，$\sqrt{16-x^2}$ 都有意义，必须 $\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ 16-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant \pi+2k\pi,\\ |x|\leqslant 4,\end{cases}$ 也即 $-4\leqslant x\leqslant -\pi$ 或 $0\leqslant x\leqslant \pi$. 因此函数的定义域为 $[-4, -\pi]\cup[0, \pi]$.

(3) 由不等式组 $\begin{cases}x^2-x\geqslant 0,\\ |x|\leqslant 1\end{cases}$ 得 $x=1$ 或 $-1\leqslant x<0$. 故函数的定义域为 $[-1, 0)$ 和 $x=1$.

(4) 由不等式组 $\begin{cases}\sqrt{\lg(x^2-1)}\leqslant 1,\\ \lg(x^2-1)\geqslant 0,\\ x^2-1>0\end{cases}$ 得 $\sqrt{2}\leqslant |x|\leqslant \sqrt{11}$，故

函数的定义域为$[-\sqrt{11},\ -\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\ \sqrt{11}]$.

6. 若函数$f(x)$的定义域为$[0,1]$,分别求$f(\ln x)$和$f(x+a)+f(x-a)\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$的定义域.

解 先求$f(\ln x)$的定义域.

因为函数$f(x)$的定义域为$[0,\ 1]$,所以$f(\ln x)$的定义域为满足条件$0\leqslant\ln x\leqslant 1$的$x$的全体. 即$1\leqslant x\leqslant e$.

再求$f(x+a)+f(x-a)$的定义域:

由不等式组$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$可得$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\ a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$

因为$0<a<\frac{1}{2}$,所以$a\leqslant x\leqslant 1-a$.

故$f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$[a,\ 1-a]$.

7. 建立函数关系.

(1) 在一个半径为r的球内,嵌入一内接圆柱,试求圆柱体的体积V与圆柱高h的函数关系,并求出此函数的定义域.

(2) 在底$AC=b$,高$BD=h$的三角形ABC中(图 1.3),内接矩形$KLMN$,其高记为x,将矩形周长p和面积S表为x的函数.

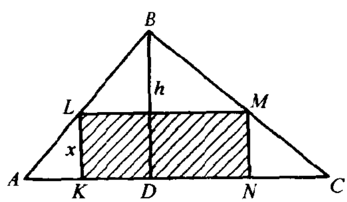

图 1.3

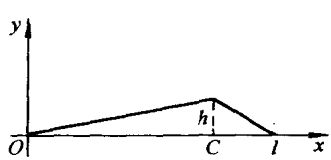

图 1.4

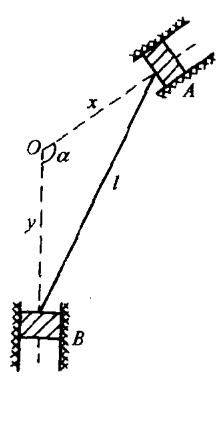

图 1.5

(3) 长为 l 的弦，两端固定，在点 C 处将弦提高 h 后呈图 1.4 形状，设提高时弦上各点仅沿着垂直于两端点连线方向移动，以 x 表示弦上点的原来位置，y 表示 x 点处升高的高度，建立 x 与 y 间的函数关系.

(4) 图 1.5 是机械中常用的一种既可改变运动方向又可调整运动速度的滑块机构. 现设滑块 A、B 与 O 点的距离分别为 x 与 y，$\angle AOB=\alpha$(定值)，连接滑块 A 与 B 的杆长为 l(定值)，试建立 x 与 y 之间的函数关系.

(5) 某运输公司规定货物的吨公里运价为:在 a 公里以内每公里 k 元；超过 a 公里时，超过的部分每公里为 $0.8k$ 元，求运价 m 和里程 x 的函数关系.

解 (1) 设内接圆柱的底面半径为 R，则

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(2r)^2-h^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-h^2}.$$

圆柱体的体积 V 与圆柱高 h 的函数关系为

$$V=\pi h\left[r^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]\quad(0<h<2r).$$

(2) 由图中关系可知： $\dfrac{LM}{AC}=\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{h-x}{h}.$

故
$$LM=\frac{h-x}{h}b.$$

因此矩形的周长 $p=2\left(x+\dfrac{h-x}{h}b\right).$

即
$$p=\frac{2}{h}[hb+(h-b)x]\quad(0<x<h).$$

矩形的面积 $S=\dfrac{b}{h}(h-x)x\quad(0<x<h).$

(3) 由图中关系可知 x 与 y 间的函数关系为

$$y=\begin{cases}\dfrac{h}{c}x, & 0\leqslant x\leqslant c\\[2ex] \dfrac{h}{c-l}(x-l), & c<x\leqslant l.\end{cases}$$

(4) 由余弦定理得 x 与 y 的函数关系为

$$x^2+y^2-2xy\cos\alpha=l^2.$$

(5) 由题设条件运价 m 和里程 x 的函数关系为

$$m=\begin{cases}kx, & 0<x\leqslant a,\\ ka+0.8k(x-a), & x>a.\end{cases}$$

8. 指出下列函数中的奇偶函数和周期函数.

(1) $y=|\sin x|$； (2) $y=2+\tan \pi x$；

(3) $y=3^{-x}(1+3^x)^2$.

解 (1) 因为 $y(-x)=|\sin(-x)|=|\sin x|=y(x)$，且 $y(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=y(x)$，所以 $y=|\sin x|$ 是偶函数，且为周期函数，周期是 π.

(2) 因为 $y(x+1)=2+\tan\pi(x+1)=y(x)$，所以 $y=2+\tan\pi x$ 为周期函数，周期是 1，但既不是偶函数也不是奇函数.

(3) 因为 $y(-x)=3^x(1+3^{-x})^2=3^{-x}(3^x+1)^2=y(x)$，所以 $y=3^{-x}(1+3^x)^2$ 是偶函数，但非周期函数.

9. 指出下列函数的单调区间及有界性.

(1) $y=\dfrac{1}{x}$； (2) $y=\arctan x$；

(3) $y=\ln(1+x)$； (4) $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

解 (1) $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上单调下降且无界.

(2) $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调上升且有界.

(3) $y=\ln(1+x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调上升且无界.

(4) $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 在 $[-a,0]$ 上单调上升，在 $[0,a]$ 上单调下降，且在其定义域内有界.

10. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$； (2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 (1) 由 $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$ 可以得到

$$y+y2^x=2^x$$

由此可解出 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，将式中的 x 换成 y，y 换成 x 可

得反函数为

$$y=\log_2 \frac{x}{1-x} \qquad (0<x<1).$$

(2) 由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 得 $x+\sqrt{x^2+1}=e^y$ ①

又 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

所以 $\sqrt{x^2+1}-x=e^{-y}$ ②

由①②两式联立可得 $x=\dfrac{1}{2}(e^y-e^{-y})$

故 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为

$$y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \qquad (-\infty,\ +\infty).$$

11. 设 $y=f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，当 $-\pi\leqslant x<\pi$ 时，$f(x)=x$，求函数 $f(x)$.

解 因为 $f(x)$ 以 2π 为周期，且当 $-\pi\leqslant x<\pi$ 时，$f(x)=x$，

所以当 $2k\pi-\pi\leqslant x<2k\pi+\pi$ 即 $-\pi\leqslant x-2k\pi<\pi$ 时，

$$f(x)=f(x-2k\pi)=x-2k\pi.$$

故 $f(x)=x-2k\pi$，当 $(2k-1)\pi\leqslant x<(2k+1)\pi$ 时，$k\in Z$.

12. 设 $f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x+x^2$，求 $f(x)$.

解 当 $x<0$ 时，$-x>0$，

因为 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(x)=-f(-x)=-[-x+(-x)^2]=x-x^2$，

所以 $f(x)=\begin{cases} x-x^2, & x<0, \\ x+x^2, & x>0. \end{cases}$

13. 下列函数是由哪些基本初等函数复合的？

(1) $y=\sin^3 \dfrac{1}{x}$； (2) $y=2^{\arcsin x^2}$；

(3) $y=\lg\lg\lg \sqrt{x}$； (4) $y=\arctan e^{\cos x}$.

解 (1) $y=\sin^3\dfrac{1}{x}$ 是由 $y=u^3$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成.

(2) $y=2^{\arcsin x^2}$ 是由 $y=2^u$，$u=\arcsin v$，$v=x^2$ 复合而成.

(3) $y=\lg\lg\lg\sqrt{x}$是由$y=\lg u$，$u=\lg v$，$v=\lg w$，$w=\sqrt{x}$复合而成.

(4) $y=\arctan \mathrm{e}^{\cos x}$是由$y=\arctan u$，$u=\mathrm{e}^{v}$，$v=\cos x$复合而成.

14. 设$f(x)=\sin x$，$f(\varphi(x))=1-x^2$，求$\varphi(x)$及其定义域.

解 由已知条件$f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$可得

$$f(\varphi(x))=\sin \varphi(x)=1-x^2.$$

所以
$$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

令$|1-x^2|\leqslant 1$，可得$|x|\leqslant\sqrt{2}$. 故$\varphi(x)$的定义域为$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

15. 已知$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$，求$f(x)$.

解 由已知$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$可得

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}.$$

所以
$$f(x)=\frac{1}{x^2-2}.$$

16. 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 4,\\ \mathrm{e}^x, & x>4,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}1+x, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0.\end{cases}$ 求$\varphi(f(x))$.

解
$$\varphi(f(x))=\begin{cases}1+f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ \ln f(x), & f(x)>0.\end{cases}$$

1) 当$f(x)\leqslant 0$时，

或$x\leqslant 4$，$f(x)=x^2\leqslant 0$，可得$x=0$.

或$x>4$，$f(x)=\mathrm{e}^x\leqslant 0$，无解.

2) 当$f(x)>0$时，

或$x\leqslant 4$，$f(x)=x^2>0$，可得$x\leqslant 4$且$x\neq 0$.

或$x>4$，$f(x)=\mathrm{e}^x>0$，即$x>4$.

综上所述

$$\varphi(f(x))=\begin{cases}\ln x^2, & x\leqslant 4,\ x\neq 0,\\ 1, & x=0,\\ x, & x>4.\end{cases}$$

17. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$; (2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$; (4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$; (6) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})]$ $(|x|<1)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}=\dfrac{(-1)^2+2\times(-1)+5}{(-1)^2+1}=2.$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h)=2x.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$

(4) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-1.$$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$

(6) $$\lim_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to -8}\frac{1-x-9}{(\sqrt{1-x}+3)(2+\sqrt[3]{x})}$$
$$=\lim_{x\to -8}\frac{-(2+\sqrt[3]{x})(4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt{1-x}+3)(2+\sqrt[3]{x})}$$
$$=-2.$$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$$

因为当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2^{n+1}}=0$，

所以原极限 $=\dfrac{1}{1-x}$.

18. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=0$，求常数 a，b.

解 由
$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=0$$
得
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0.$$
所以 $\begin{cases}1-a=0.\\ a+b=0.\end{cases}$ 故 $a=1$，$b=-1$.

19. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$；　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}=\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{(-1)^n\sin(x-n\pi)}{x-n\pi}=(-1)^n.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})=4\sqrt{2}.$

(4)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\frac{\pi}{3}-\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$=2\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=2\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-3x)^{\frac{1}{-3x}}\right]^{-3}=e^{-3}.$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}\right]^{\frac{1}{\cos x}}=e.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{1}{e}.$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\right)^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}\right]^{\frac{2nx+x^2}{-2n}}$$

$$=e^{-x}.$$

20. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=9$，求常数 a.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=e^{2a}$,

所以 $e^{2a}=9$.

故 $a=\ln 3$.

21. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}]$，$0<\alpha<1$.

解 (1) 因为$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$$<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

且 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1 \quad \text{(夹逼准则)}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}]=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\cdot\frac{1}{n}\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha\cdot n^{\alpha-1}$$

$$=0\qquad(0<\alpha<1).$$

22. 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，…，$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 先证$\{x_n\}$为单调增加的数列，由于

$$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}>x_1,$$

设 当 $n=k$ 时，$x_k>x_{k-1}$，则有

$$2+x_k>2+x_{k-1}.$$

故 $\sqrt{2+x_k}>\sqrt{2+x_{k-1}}$，即 $x_{k+1}>x_k$，

由数学归纳法知$\{x_n\}$为单调增加的数列.

再证$\{x_n\}$有界.

显然 $x_1=\sqrt{2}<2$，

设 $n=k$ 时，$x_k<2$，则当 $n=k+1$ 时，

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2.$$

可知$\{x_n\}$有界，根据单调有界准则，当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$的极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_{n-1}}，即\quad a=\sqrt{2+a}.$$

因此 $a=2$ （$a=-1$ 舍去）.

故 $$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

23. 若 $x_1=a>0$，$y_1=b>0(a<b)$，且 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证 因为 $x_1=a>0$，$y_1=b>0$，且 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=$