Applyed Functional Analysis

应用泛函分析

薛小平　武立中　孙立民　编著

2

哈尔滨工业大学出版社

应用泛函分析

薛小平　武立中　孙立民　编著

哈尔滨工业大学出版社
·哈尔滨·

内 容 简 介

本书是为高等理工科学校非数学专业的硕士生和博士生编写的应用泛函分析课程教材，全书共分六章。前四章，系统地介绍了度量空间、赋范线性空间、内积空间的基本概念和基础理论；后两章，简要介绍了非线性泛函分析和广义函数的基本理论。

本书除作为研究生教材外，还可供需要泛函分析知识的科技人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/薛小平等编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2002.7

ISBN 7-5603-1712-X

Ⅰ.应…　Ⅱ.薛…　Ⅲ.泛函分析-研究生-教材　Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 040624 号

出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　　址	哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真	0451－6414749
印　　刷	哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本	850×1168　1/32　印张 7.375　字数 191 千字
版　　次	2002 年 7 月第 1 版　2002 年 7 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 7-5603-1712-X/O·130
印　　数	1～5 000
定　　价	15.00 元

前　言

为适应充实高层科技人才培养的需要，必然地对工程及经济科学的许多专业的数学教育提出了更高的要求。由于泛函分析在现代数学科学中有着重大的理论和应用前景而成为基础课程之一。它是综合地运用几何、代数以及分析学的方法和观点来分析处理问题而形成的数学理论，因而内容极其丰富，体系更加系统、严谨，观点也尤为深刻。已成为探讨和解决现代科学技术中众多问题的一门重要的基础知识。因此，国内外许多大学(特别是著名大学)纷纷把泛函分析这门课作为理工科硕士生和博士生的必修课。

从1996年开始，作者在哈尔滨工业大学先后三次为硕士生和博士生编写应用泛函分析方面的教材，在校内曾试用多次。本书是在2001年7月编写的校内教材基础上经过详细修改而定稿的。此外，考虑到这门课程对博士生与硕士生的教学内容衔接问题，在原有内容的基础上，又增加了两章新内容，供博士生选用。

鉴于工科各专业研究生的大学数学基础存在差异，本书给出了大学数学方面的某些必要的基础知识，可起到承上启下的作用。对于工科学生来说，学习数学的目的是应用，但前提是要掌握基本理论。理论没有学到手，就无从去谈应用。本书编写过程中作者试图做到理论与实际相结合，特别与学生熟悉的数学知识相联系。为加强对基本理论和方法的理解和认识，书中每节都配有一定数量的习

题，供学生选做。

本书前四章的内容是供硕士生用的，大约 50 学时可讲授完毕；后两章的内容是供博士生选用的，大约 20 学时可讲授完毕。

在本书的编写和出版过程中得到吴从炘、李容录、张传义、付永强、邓廷权老师的关心、帮助，还得到了哈尔滨工业大学研究生院领导的支持和帮助，也得到了有关老专家的热情鼓励和支持。作者借此机会，向他们表示深切谢意。

写出一本高质量的有鲜明特色的教材是一个相当困难的工作。虽然我们历经数年艰苦的努力，但限于学识和经验，书中难免存在疏漏和不足，希望专家同行和同学们批评指正。

作　者

2002 年 6 月于哈尔滨工业大学

目　　录

第 1 章 预备知识

泛函分析是现代数学科学中重要分支之一，其内容涉及无穷维线性空间及其上的算子的基本理论，并且综合运用代数、几何与分析等经典学科中的观点和方法。为学好泛函分析，首先介绍实数空间及其上的函数的有关理论是十分必要的。

1.1 集合的一般知识

1.1.1 集及其运算

集合是现代数学的一个基本概念，依通常的观点，把具有一定性质或满足一定条件的对象的全体叫做集合，或简称为集，其中的每个对象叫做该集合的元或元素。本书常用大写字母表示集，用小写字母表示元素。

设 A,B 是集。元 a 属于集 A，记为 $a \in A$，而记号 $b \notin A$ 表示元素 b 不属于集 A。不包含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$。如果集 A 的每个元素都属于集 B，则说 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。规定空集$\varnothing$是任何集的子集。如果 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记成 $A = B$。若 $A \subset B$，但 $A \neq B$ 时，则称 A 为 B 的真子集。

若集 A 为具有某性质π 的元素所构成时，我们常表示作 $A = \{x: x$ 具有性质 $\pi\}$，例如闭区间$[a,b] = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$。

以下介绍集的运算。

设 A,B 是两个集，由集 A 及集 B 的全体元素构成的集叫做 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x:x\in A\text{ 或 }x\in B\}。$$

所有同时属于 A 与 B 的元素组成的集叫做 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x:x\in A\text{ 且 }x\in B\}。$$

并集与交集的概念可以推广到任意个集的情形。设 $\{A_i:i\in I\}$ 是一集族，其中 I 是指标集，i 在 I 中变化，则它们的并与交分别定义为

$$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x:\exists\, i\in I,\text{有 }x\in A_i\},$$

$$\bigcap_{i\in I}A_i=\{x:\forall\, i\in I,\text{有 }x\in A_i\}。$$

不难证明并与交运算具有如下性质：

(1) $A\cup(\bigcap_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i)$，

(2) $A\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(A\cap A_i)$。

现在我们引入集合间的另一种运算：设 A,B 是两个集，由集 A 中不属于集 B 的那些元素组成的集，叫做 A 与 B 的差，记为 $A\setminus B$。特别，当 $B\subset A$ 时，常称差 $A\setminus B$ 为 B 关于 A 的余集或补集，记为 $\complement_A B$。如果我们仅考察某固定的集 A 的一些子集 B 时，则常记 $A\setminus B$ 为 B^C。以下的运算法则叫做 De Morgan 律：

(1) $(\bigcup_{i\in I}A_i)^C=\bigcap_{i\in I}A_i^C$，

(2) $(\bigcap_{i\in I}A_i)^C=\bigcup_{i\in I}A_i^C$。

它的证明留给读者去完成。这个法则为我们提供了一种对偶方法，可将集合某性质的证明转换到它的补集上去。

以下要介绍的直积概念（也叫 Cartesian 积）是集的重要运算之一。设 A,B 是给定的集，则全体有序对 (x,y) 所成之集叫做 A 与 B 的

有限个集合上去:对于集组$\{A_k: k = 1,2\cdots n\}$,它们的直积为

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_k \in A_k, k = 1,2,\cdots,n\}。$$

1.1.2 映射

自然界各个对象间的相关性是科学关注的重要内容。抽象为数学问题就是要考察集合间元素的彼此联系。其中最重要的基本概念之一是关系(这里介绍的是二元关系)。设A,B是两个集,所谓A与B的一个关系R是直积$A \times B$的一个子集,即$R \subset A \times B$,此时我们用xRy表示$(x,y) \in R$,并且说在R意义下x与y相关。而集$\{x \in A: \exists y \in B$,使$(x,y) \in R\}$与集$\{y \in B: \exists x \in A$,使$(x,y) \in R\}$分别称为$R$的定义域或值域。例如,数学分析中讲过的函数$f$就确定了数集$A$与数集$B$之间的一个关系:$\{(x,f(x)): x \in A\} \subset A \times B$。

现在我们把函数概念一般化:设A,B是两个非空集,如果依某法则T,对每个$x \in A$,在B中有惟一确定的元素y与之对应,则说T是定义在A上且取值于B内的一个映射,记为$T: A \to B$,并将x与y的关系记成$y = T(x)$。此时A为T的定义域,而值域(或象)为$\{T(x): x \in A\}$,可记成$T(A)$,一般情形,它是B的一个子集。特别$B = T(A)$时,则称T是满射或映上的,即T为由A到B上的映射。又如果对每个$y \in T(A)$惟一存在$x \in A$,有$T(x) = y$,则说T是A上一个单映射或说T是由A到$T(A)$上的一对一映射,此时我们看到T存在逆映射$T^{-1}: T(A) \to A$,有$T^{-1}(y) = x, \forall y \in T(A)$。

若映射$I_A: A \to A$满足条件:$I_A(x) = x, \forall x \in A$,则称$I_A$为$A$上的恒等映射(或单位映射),在不致引起混淆时,可简记I_A为I。

设给定两个映射$T: A \to B, S: B \to C$,则记号ST表示由A到C内的映射,为$ST(x) = S(T(x)), x \in A$,并称为T与S的乘积(或复

合)。

设 T 为由 A 到 B 内的一个映射,若 $E \subset B$,引入记号 $T^{-1}(E) = \{x \in A : T(x) \in E\}$,它称为 E 在 T 映射下的原象(或逆象)。请注意这里并不表明 T 存在逆映射 T^{-1}。不难验证以下的关系式成立。

(1) $T(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} T(A_i)$,其中 $\{A_i : i \in I\}$ 是 A 的子集族;

(2) $T^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} T^{-1}(B_i)$,其中 $\{B_i : i \in I\}$ 是 B 的子集族。

以下引入另一个重要关系是等价关系:设 A 为给定的一个集,若关系 $R \subset A \times A$ 满足如下条件:

(1) 任 $x \in A$,有 $(x, x) \in R$,即 R 有自反性;

(2) 如果 $(x, y) \in R$,则 $(y, x) \in R$ 即 R 有对称性;

(3) 若 $(x, y) \in R$,$(y, z) \in R$,则 $(x, z) \in R$,也就是说 R 具有传递性。这时,称 R 为 A 上一个等价关系,此时,若 $(x, y) \in R$,可记为 $x \sim y$。

例如任何集上的相等概念就是一个等价关系。

现在我们给出重要概念:

【定义 1】 设 A,B 是两个集合,如果存在由 A 到 B 上的一对一映射 T,则说 A 与 B 成一一对应或称 A 与 B 对等,记为 $A \sim B$。

1.1.3 可列集

自 19 世纪 70 年代以来,由德国数学家 Cantor 所开创的无穷集合理论,已成为现代数学的基础。根据两个集合所包含元素的多少程度来决定其区别,他的基本方法就是利用对等概念。以后我们常用 **N** 表示自然数集,**Q** 表示有理数集,**Z** 表示整数集,**R** 表示实数集,**C** 表示复数集。它们都是常用的无限集。

当有人抬一筐苹果到某大教室内,会提出这样一个问题:教室中学生人数与筐中的苹果数哪个大?回答很简单,只要规定每个学生从

筐中只准拿走一个苹果,就可得到正确的判断。如果每个学生都拿到了苹果,但筐中仍剩有苹果时,则说明筐中苹果比教室中学生多;如果筐中苹果已拿光,而有学生没有拿到苹果,则自然是学生人数比筐中苹果数大;若每个学生都拿到了苹果,且筐中苹果都被拿光,明显得知学生数等于苹果数。请注意,以上的回答利用了对应的方法。由一一对应的概念可知,如果两个有限集互相对等时,则它们所含元素个数必然相同。然而对于无限集利用一一对应所导致的结果却是十分有趣的。例如全体正偶数集依方式 $2n \leftrightarrow n$,则与 $\mathbf{N}$ 成一一对应,即与 $\mathbf{N}$ 是对等的。明显前者是后者的真子集,因此对无限集,元素的个数已不能说明无限集所含的元素多少程度,而须引入更一般的概念。

【定义 2】　设 A,B 是两个集,

(1) 若 A 与 B 对等,则说 A 与 B 有相同的势(或基数),记 A 的势为 $\overline{\overline{A}}$,B 的势为 $\overline{\overline{B}}$,则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$。

(2) 若 A 与 B 的某子集对等,则说 A 的势不大于 B 的势,记为 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$(或 $\overline{\overline{B}} \geqslant \overline{\overline{A}}$),又若 B 不与 A 的任一子集对等时,则说 A 的势小于 B 的势,记为 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$(或 $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}$)。

注　(1) 势是集合元素个数的一般化,当 A 为有限集时,则 $\overline{\overline{A}}$ 就是 A 中元素的个数。

(2) 任有限集不能同自己的任真子集对等,即任真子集的势小于本身的势。

但无限集具有如下特征:

【定理 1】　无限集必与它的某真子集对等。

证　设 A 为一个无限集,取出一个元素 $a_1 \in A$,因 A 为无限集,则 $A - \{a_1\} \neq \varnothing$,又从 $A - \{a_1\}$ 中取出一个元素 a_2,显然 $A - \{a_2, a_2\} \neq \varnothing$,此步骤可无限做下去,我们从 A 中取出一列元素 $\{a_1, a_2, a_3 \cdots\}$,记余集为 $B = A \setminus \{a_1, a_2, a_3 \cdots\}$,则集 $C = B \cup \{a_2, a_3, \cdots\}$

为 A 的真子集。定义映射 $T:A\to C$ 为 $T(a)=a$，当 $a\in B$ 时，$T(a_k)=a_{k+1}$ $(k=1,2,3\cdots)$，则明显看出，T 为 A 到 C 上的一对一映射，证毕。

注 无限集可定义为可与自己的某真子集对等的集。

由于自然数集 **N** 是最简单的无限集，因此特别有如下概念：

【定义 3】 凡与 **N** 对等的集称为可列集(或可数集)。

由定义，若 A 是可列集，则 A 中全体元素可表示成无穷序列的形式：$A=\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\}$。例如，整数集 $\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$ 及三角函数系 $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$ 都是可列集。

为得到更多稍为复杂的可列集的实例，先考察其某些性质。

【定理 2】 任一无限集必含有可列子集。

可用类似于定理 1 的证明得到，留给读者练习。另外，也请读者证明如下事实：可列集的子集，若不是有限集，则一定为可列集。

【定理 3】 有限或可列个可列集的并集仍是可列集；可列个有限集的并(若为无限集)，也是可列集。

证 不失一般性，对可列集族(也称集列)$\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n,\cdots\}=\{A_n:n\in N\}$，其中每个都是可列集且两两不相交，于是有

$$\begin{array}{l}
A_1=\{a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},\cdots\}\\
A_2=\{a_{21},a_{22},a_{23},a_{24},\cdots\}\\
A_3=\{a_{31},a_{32},a_{33},a_{34},\cdots\}\\
A_4=\{a_{41},a_{42},a_{43},a_{44},\cdots\}\\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots
\end{array}$$

我们依对角线原则(箭头所示)可把并 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 中全部元素排成列：

$$a_{11},a_{21},a_{12},a_{31},a_{22},a_{13},a_{41},a_{32},a_{23},a_{14},\cdots$$

故它是可列集。

由此我们可以得到一个有趣的例子：有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可列集。

事实上，因每个有理数 r 都可写成既约分数 p/q，其中 p 与 q 皆为整数，且规定 $q \in \mathbf{N}$。对每个固定的 $q \in \mathbf{N}$，$A_q = \{p/q : p \in \mathbf{Z}\}$ 是一可列集。明显 $\mathbf{Q} = \bigcup\limits_{q=1}^{\infty} A_q$ 为可列个可列集的并，故 $\mathbf{Q}$ 可列。

【定理 4】　设有一组可列集 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，则直积 $\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$ 也是可列集。

证　只须证明 $r = 2$ 情形，一般情况可由归纳法获得。设 $A_1 = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$，$A_2 = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$，则 $A_1 \times A_2 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{(x_k, y_m) : m \in \mathbf{N}\}$，为可列个可列集之并，故可列。

例 1　有理系数多项式全体成为可列集。

事实上，容易知道零次有理系数多项式即是有理数，因而其全体是有理数集 $\mathbf{Q}$，故可列。对每个固定的 $n \in \mathbf{N}$，我们证明全体次数 $\leqslant n$ 的有理系数多项式的集合可列。任取次数 $\leqslant n$ 有理系数多项式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = P_n(x)$，则其与直积集 $\prod\limits_{k=1}^{n+1} \mathbf{Q}_k$ 中元素 $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 一一对应，其中 $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}$，$(k = 1, 2, \cdots, n+1)$，故推得次数 $\leqslant n$ 有理系数全体可列。从而有理系数多项式全体

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_n : a_k \in \mathbf{Q}, k = 0, 1, 2, \cdots, n\} \text{ 是可列集。}$$

但存在不可列无限集。

【定理 5】　点集 $(0,1) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\}$ 是不可列的无限集。

证　我们证明 $(0,1)$ 不可列。假设 $(0,1)$ 可列，则其中全体实数可排成一列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$。将每个 x_k 用十进位无限小数表示，则有

$$x_1 = 0.t_{11}t_{12}t_{13}t_{14}\cdots$$
$$x_2 = 0.t_{21}t_{22}t_{23}t_{24}\cdots$$
$$x_3 = 0.t_{31}t_{32}t_{33}t_{34}\cdots$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

其中所有的 t_{ij} 都是在 $0,1,2,\cdots,9$ 中取值，并且对每个 i，数列 $\{t_{ij}: j=1,2,\cdots\}$ 应有无限个不为 0，即如小数 0.320 00… 应改写为 0.319 9…。

作十进位小数

$$x = 0.b_1b_2b_3\cdots,$$

当 $t_{ii}=1$ 时，令 $b_i=2$；而若 $t_{ii}\neq 1$，则令 $b_i=1$。明显 $x\in(0,1)$，但因对每个 n，$b_n\neq t_{nn}$，故 $x\neq x_n$，这与假设矛盾，证毕。

注 集$(0,1)$的势称为连续点集的势，并且明显$\overline{\overline{(0,1)}}$大于可列集之势。

【定理 6】 设 A 为有限集或可列集，B 是任一无限集，则 $\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{B}}$。

证 因 B 是无限集，由定理2，存在可列子集 $\{x_1,x_2,\cdots\}=C\subset B$。不失一般性，设 $A\cap B=\varnothing$。由于 $A\cup C$ 仍是可列集，就是 $A\cup C\sim C$，再注意 $B-C\sim B-C$，可推得 $A\cup B=(A\cup C)\cup(B-C)\sim C\cup(B-C)=B$。即$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{B}}$。证毕。

由公式 $y=a+(b-a)x$，可建立点集$[0,1]$与点集$[a,b]$之间的一一对应，故任意区间$[a,b]$都是连续点集的势。而由公式 $y=\tan\left(\frac{2x-1}{2}\pi\right)$，又建立了$(0,1)$与实数集 $\mathbf{R}$ 之间的一一对应，因此 $\mathbf{R}$ 的势等同$(0,1)$的势。设无理数全体为 A，由定理 6 有

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{(A\cup\mathbf{Q})}}=\overline{\overline{\mathbf{R}}},$$

故无理数集的势为连续点集的势。据此，我们可得这样的认识：无理

数要比有理数多得多。

习题 1.1

1. 设映射 $T:A\to B$,试证明以下事实

(1) 若 A_1,A_2 都是 A 的子集,则

$T(A_1\cap A_2)\subset T(A_1)\cap T(A_2)$,并举说明等号不一定成立;

(2) 若 $A_1\subset A$,则 $T(A\setminus A_1)\supset T(A)\setminus T(A_1)$,并举例说明等号未必成立;

(3) 若 $A_1\subset A$,则 $T^{-1}(T(A_1))\supset A_1$,若 $B_1\subset B$,则 $T(T^{-1}(B_1))\subset B_1$,并举例说明等号不一定成立。

2. 对任何集 A,B,C,证明以下关系式成立

$$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)。$$

3. 设 A 为可列集,B 是由 A 的全体有限子集构成的集合,证明 B 是可列集。

4. 证明可列集 A 关于任意映射 T 的象至多为可列集。

5. 证明每个区间中的无理数集都不可列。

6. 证明以有理数为中心且以有理数为半径的区间的全体是可列集。

7. 建立闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 的一一对应。

8. 建立闭区间 $[a,b]$ 与全体实数集 $\mathbf{R}$ 的一一对应。

1.2　实数集的基本结构

关于数的加、减、乘、除等运算及其性质是代数学中的基本内容,

现引入概念。

【定义1】 设 P 是一些复数组成的集合，其中含有数0与1，若 P 中任两个数(也可相同)的和、差、积、商(除数不为0)仍属于 P，即 P 关于加、减、乘、除(有意义)运算是封闭的，则称 P 为一个数域。

显然，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$ 及复数集 $\mathbf{C}$ 都是数域。关于实数域的这种代数结构，我们认为读者是熟悉的，以下研究实数集的另一种结构。

1.2.1 实数集的序关系

我们知道，实数集中两个数 x 与 y 的大小关系可用符号 $\leqslant$ 来说明，并且有如下的性质：

(1) 对任何 $x \in \mathbf{R}$，成立 $x \leqslant x$；

(2) 对 $x,y,z \in \mathbf{R}$，若 $x \leqslant y$，且 $y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$；

(3) 对 $x,y \in \mathbf{R}$，若 $x \leqslant y$，且 $y \leqslant x$，则 $x = y$。

于是在 $\mathbf{R}$ 上由 $\leqslant$ 确定了一个序关系。因对 $\mathbf{R}$ 中任何两个数都可由关系 $\leqslant$ 联系，则 $\mathbf{R}$ 为全序数域。

在 $\mathbf{R}$ 的序结构基础上，引入以下概念。

对点集 $E \subset \mathbf{R}$，若存在 $y \in \mathbf{R}$，使得对任意 $x \in E$，恒成立 $x \leqslant y$，则称 y 为 E 的一个上界(此时可知 E 的全体上界组成的集合是一个无限集)。类似地，可以定义下有界及下界。设 $E \subset \mathbf{R}$，若它上有界且下有界，则称 E 为序有界，简称为有界，此时存在 $y,z \in \mathbf{R}$，有 $z \leqslant x \leqslant y, \forall x \in E$，即有 $E \subset [z,y]$。也不难得知 $E \subset R$ 有界的充要条件是存在 $y > 0$，成立 $E \subset (-y,y)$(亦可为闭区间)。如果点集 E 存在最大数，记为 $\max E$，立知它就是 E 的一个上界，且为 E 所有上界中最小者，但一般情况点集未必都存在最大数，于是有如下概念。

【定义2】 给定非空点集 E，若存在 $\beta \in \mathbf{R}$，满足以下条件：