几何教学

〔法〕古斯塔夫·肖盖　曹元聚 译　史树中 校

北京师范大学出版社

几 何 教 学

〔法〕古斯塔夫·肖盖
曹元聚 译
史树中 校

北京师范大学出版社

几 何 教 学

〔法〕古斯塔夫·肖盖
曹元聚　译
史树中　校

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
国 营 五 二 三 厂 印 刷

开本：787×1092　1/32　印张：6.125　字数：124 千
1984 年 6 月第 1 版　1984 年 6 月第 1 次印刷
印数：1—12,500
统一书号：7243·181　定价：0.56 元

告 读 者

本书对象系中学数学教师和预备师资，以及所有几何学爱好者。另外，在教师指导下，十五岁至十八岁的学生亦可从中获益。

欧几里得原把平面几何建立在三角形全等的基础上。两千三百年后，数学家们把平面定义为具有纯量积的二维仿射空间。我认为，我们的青少年需要这样一种几何课本，既象欧几里得几何那样，以从感性世界引出的概念为起点，同时又能使青少年很快地运用灵活多样的代数方法。

因此，本书所介绍的几何公理体系既基于平行、垂直和距离等概念，又在形式上自然而迅速地导致平面和空间的代数结构。

再者，本书用几章的篇幅来阐明一些往往被人认为是很棘手的问题，譬如平移、角与角的度量、定向等等。

本书在很大程度上应归功于作者跟国内外的许多数学家及教师所进行的讨论。这里，我需要特别感谢安德烈·雷乌兹（André Révuz）先生，他对拙作颇多指正，本人受益非浅。

古斯塔夫·肖盖
(Gustave Choquet)

目　录

引　言

作者在这里并非要讨论几何教学的必要性，而仅仅是探讨这种教学的方法。

而今，在所有的国家里，人们对以下两个原则的看法是相当一致的：

(1) 对青少年来说，几何教学不能纯粹演绎，而是应该基于观察，目的在于从实际经验中得出各种基本概念。

(2) 对数学家来说，给平面（或空间）下定义的最完美、最透彻、最迅速的方式是将其定义为 R 上赋有纯量积的二维（或三维）向量空间，这里纯量积是一个双线性对称形式 $u \cdot v$，它对于任意向量 $u \neq 0$，有 $u \cdot u > 0$。这种定义也最适于各种各样的推广（R^n，C^n 空间，希尔伯特空间等等）。

不少中学教师的经验证明，对于学过纯量积的十七岁的学生（高中毕业班）来说，采用这个定义是颇为有益的。在该年级使用此方法可以少费思索，自然而然地引出得法的证明。同时它对物理教师也提供了极可贵的帮助，因它能使该课教师给功、重心、力的合成等概念下定义，并进行确切的探讨。

对年龄在十三至十六岁之间的学生来说，问题则不那么简单，因为他们开始懂得什么是证明，有些人甚至产生了对逻辑的真正渴求，表明其认真地从事演绎推理的时刻到了。

因此，这时应该让学生自己来确定演绎推理的各个步骤，并注意使他们始终明确各步推理的前提。

这样，负责这些学生的教师就必须掌握一套完整的互相联系的公理体系。何况，各种经验还表明，某些青少年对精确的公理体系很感兴趣，对于他们来说，数学象是一种规则严格的游戏，准确地进行这种游戏具有莫大的乐趣。因此，我们必须找到一套**简明**的公理体系，其公理一方面应该很**强**，即能很快地导出那些不是一目了然的定理，另一方面又应该很**直观**，即能反映我们周围的空间所具有的容易验证的性质。

至于这些公理之间不独立，那倒无甚紧要。不过有些教师主张从一开始就学很多公理，我认为大可不必，因为数学游戏规则过多，势必显得过于复杂、虚空和令人难以捉摸。

事实证明，欧几里得公理体系已经不符合我们的逻辑要求，数学课本中的其它公理体系概亦如此，尽管近年来出版的教材在这方面进行过很大的努力。

众所周知，希尔伯特修整和完善了欧几里得公理，使之成为在逻辑上令人满意的体系。希尔伯特的主要注意力并不在初等教学上，因而其公理体系给出的初等形式的展开（可参阅哈尔斯蒂德（Halsted）的《理性几何》）与教学很不适应。

欧几里得-希尔伯特公理体系基于长度、角和三角形等概念，它奇妙地掩盖了空间的向量结构，致使许多世纪以来人们忽视了向量概念。三角形乃平行四边形之半这一事实无碍于人们在二十多个世纪中把重点放在钻研三角形的高、中线、垂直平分线和角平分线，三角形的全等以及三角形的度

量关系上。过去，人们只看到三角形，而不重视可能引出向量概念的平行四边形。

当然，三角形仍将保持其引人关注的地位，因为它是最简单的平面多边形，以及一个三角形能且仅能确定一个平面。然而，必须有力地遏制导致对三角形的所有重点以及度量关系的过多的兴趣，因为这些关系常常华而不实。

我们则应偏重于这样一些方法，即基于数学在两千年中得出的如下基本概念：集合概念、序关系与等价关系、代数法则、向量空间、对称、变换等。这些方法不仅能使人很早就运用简单而有效和便于思索的代数工具，而且由于它们基于这些基本概念，将能丰富学生的思维结构，并为未来的课程作好准备。

建立一个良好公理体系的指南

如何建立一个能满足我们要求的公理体系呢？我们希望该体系易于引出空间的向量结构和纯量积的存在及其性质。

因此，情况是这样的：尽管我们熟知有一条引入“向量空间和纯量积”等概念的大道，但这些概念不能毫无准备地“空降”，尤其是当读者还处在未能很好地掌握代数运算的年龄。

然而，这些概念可以作为我们的指导思想。我们将试图给一个完善的，但对学生来说过于抽象的逻辑骨架穿上朴素的衣裳，使它平易近人。

兹将基础概念简析如下：

(a) 向量空间概念本质上建立在加法概念上，这里包括直线上的加法和向量加法，后者还可归结为平行概念或两点之中点的概念。

(b) 纯量积是一个双线性对称函数；人们将首先看到加法的作用，然后是另一个新概念，即我们不可回避的对称概念的作用。

(c) 纯量积是一个正量，即对任意 $u\neq 0$ 有 $u\cdot u>0$。

因此，我们必须在直线的**加法结构**、**平行**和**对称**等基础上建立我们的公理体系。

所有教科书都使用对称概念（这是不可免的），但很少有人在公理中提及这个概念；因而，他们所阐明的公理体系是不能令人满意的，并缺乏一个有力的工具。

许多教师认为对称是个难处理的概念，因而宁愿让学生习惯于系统地利用三角形全等的条件，甚至在明显的对称能够即刻提供一个答案的情况下也是如此。我们应该坚决克服这种在对称上的恐惧症，而要从一开始就给其以应有的重视。

还要在我们的公理体系中反映纯量积的**正值性**，此特性提出了纯量域上的序关系，后者将通过直线的顺序公理表现出来。同时，这个特性也能用来定义空间上的一个范数，以至还有一个满足三角不等式的距离。所以我们将引进这个三角形不等式，如果其它公理不足以做到这点的话。

这里，我想介绍一个根据这些原则建立的公理体系。

在此公理体系中，度量概念与仿射概念明显是分开的，而且关于前者的公理对平面或空间的向量结构已足以进行全面研究①。

---

①这个公理体系于 1959 年在 Royaumont 召开的 O.E.C. E. 讨论会上首次得到阐述。我在附录里勾勒了第二个公理体系的轮廓，其中强调了平面的度量特性和轴对称。

关联公理Ⅰ和顺序公理Ⅱ似乎都应在平面的任一合理的公理体系中出现。我提醒诸位注意关联公理Ⅰ$_b$，它肯定通过任何一点有且仅有一条直线与一已知直线平行。欧几里得公设肯定了其唯一性，因其存在性可通过其它公理来证明。我认为，在同一条公理中存在性和唯一性的归并大大简化了几何学的展开；另一方面，十六岁以下的青少年很少会有人觉察到对存在性的证明，这种存在性对他们来说至少跟唯一性同样具有经验性。

我先来阐述平面的公理体系，然后再补充几条公理，以至非常简单地确立空间仿射结构和度量结构。

平面的公理体系是根据这样一种模式建立的，即平面是一个集合，而所有直线都是它的某些子集。每条直线均赋有序结构和代数结构。对每条直线来说，这两个结构都由几条相容性公理联系在一起。另外，不同直线的结构亦由一些相应的公理来沟通。

相反，关联公理Ⅰ没有提出关于直线的任何结构，而只是简单地明确直线和平行线对的多少，读者将会看到，仅从公理Ⅰ和Ⅱ中已经显出了许多特性，而人们在习惯上总认为这些特性是与平面的仿射或度量结构相联系的。

几何中数的作用

古希腊人在很长时期中只认识到有理数，乃至在他们令人难忘地发现$\sqrt{2}$的无理性之后，也未能得出数的一般概念，对他们来说，这一概念一直与几何联在一起。欧几里得的后继者曾试图通过建立“线段演算”来充实他的著作，这种演算能根据平面几何求得数集的域结构，但非常艰难。我们无

论如何不能陷入这种谬误，而要使青少年们尽早地把实数集 R 理解为全序交换域，即是说，他们在计算时应该意识到自己只利用加法和乘法的少数性质，数学家们称这些性质为全序交换域公理。

而后，他们将按着需要来使用阿基米德公理（例如，任何数都比某一个整数小）或更强的连续性公理（例如，R 上任一个有上界的子集都有一个最小上确界）。

当然，运算的代数结构教学可借助于直线来图解，但这并不涉及平面几何。我们应该避免的是那种采用平面几何中平行、相交甚至垂直等固有概念的线段演算。

第一章　关联公理及顺序公理

第一节　直线与平行线

1. 集合的模式

平面是一个集合，记为 Π，它通过给定平面 Π 上称为**直线**的子集的集合 $\mathscr{D}$ 而赋有一种结构．每条直线本身也赋有一种由公理确定的结构，不同直线的结构由一些可称之为过渡公理的另一些公理联系起来．

为简化叙述，我们从一开始就提出如下公理：

公理 0　平面至少包含两条直线；任一直线至少包含两点．

我们把本公理编为 0 号，原因是它将由公理 I_a 和公理 IV_a 得出．公理 I_a 是：任一直线至少包含两点；公理 IV_a 是：平面至少包含两条直线．因此，公理 0 是公理 I_a 和公理 IV_a 的推论．但是，如果从一开始就使用公理 0，文字叙述就比较醒目．

为更方便地陈述下面的公理，先引进如下定义．

定义 1.1　设 A、B 为平面 Π 的两条直线，若 $A=B$ 或 $A\cap B=\varnothing$，则称 A、B 为平行线，记为 $A\parallel B$．

许多教科书只用条件 $A\cap B=\varnothing$ 给平行概念以较狭窄的定义；这样会引起语言上的混乱，并会掩盖我们即将要遇到