到底考什么
到底考什么

2003年中考
最后几题

中考热点题及压轴题归类解析

中考命题研究组编写

数学

中国少年儿童出版社

北京中考命题研究组

中考热点题及压轴题归类解析

数　学

丛书主编　方运加　彭　林　江兴代

本册主编　彭　林

本册编者　彭　林　江兴代

任大益　欧阳秋

中国少年儿童出版社

图书在版编目(C I P)数据

中考热点题及压轴题归类解析.数学/方运加主编.—北京:中国少年儿童出版社,2002.10

ISBN 7-5007-6179-1

Ⅰ.中... Ⅱ.方... Ⅲ.数学课—初中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 077779 号

中考热点题及压轴题归类解析

— 内容概要 —

做一套老题,不如做一道热点题;练十道普通题,不如练一道压轴题。《中高考热点题压轴题归类解析》是由众多特、高级教师通过对当前考试热点的分析和对多年教学经验的综合,精心打造出的一艘题书巨舰,全书题型多样、层次分明、归类清晰、讲解细致,对学生的解题能力进行了非常高效的训练,迅速提高学生举一反三的能力,开拓解题思路,让学生做最少、最精的题,取得最大的进步。

谁能笑傲题海,惟我压轴一卷!

中考热点题及压轴题归类解析·数学

ZHONG KAO RE DIAN TI JI YA ZHOU TI GUI LEI JIE XI·SHU XUE

出版发行:中国少年儿童出版社
出 版 人:

主持编辑:陈效师　　装帧设计:徐徐一枝
责任编辑:陈　克　　封面设计:徐徐一枝
责任校对:陈凤鸣　　责任印务:栾永生

社　　址:北京东四十二条二十一号　　邮政编码:100708
电　　话:010-65956688　　传　　真:010-65952676
24 小时销售咨询服务热线:010-65302007

印　　刷:合肥杏花印务股份有限公司　　经　　销:新华书店

开　　本:787×1092　1/16　　印　　张:12.375
2002 年 10 月北京第 1 版　　2003 年 1 月合肥第 1 次印刷
字　　数:284 千字　　印　　数:1-10000 册

ISBN 7-5007-6179-1/G·4924
语、数、英、物、化全套(五册)总定价:60.00 元

目　录

敬告考生：考前做题不必太多，关键是把握中考的变化与走向——解析中考热点，破译典型新题。弄明白：今年到底考什么，最后几题考什么？应用了本书，就能够在有限的时间内（考前 10 周～12 周），取得应考状态的新飞跃。从热点聚焦、领悟捷径到激活热点，必将使同学们茅塞顿开，在轻松愉快的心境下，信心百倍地去迎接中考的到来。

第六章 开放探索性问题

热点聚焦→领悟捷径→激活热点

第七章 阅读理解性问题

热点聚焦→领悟捷径→激活热点

第八章 图表信息问题

热点聚焦→领悟捷径→激活热点

第九章 操作设计性问题

热点聚焦→领悟捷径→激活热点

第一章 方程型综合问题

一、与一元二次方程根的判别式、根与系数的关系有关的问题

【热点聚焦】

这类题是中考试卷上常见的中档题，主要以一元二次方程根的判别式、根与系数的关系为背景，结合代数式的恒等变形、解方程(组)、解不等式(组)、函数等知识. 其基本形式有：求代数式的值；求参数的值或取值范围；与方程有关的代数证明题.

【领悟捷径】

例1 已知关于 x 的方程 $x^2-2(k+1)x+k^2+2k-1=0$. ①

(1)求证：对于任意实数 k，方程①总有两个不相等的实数根；

(2)如果 a 是关于 y 的方程

$$y^2-(x_1+x_2-2k)y+(x_1-k)(x_2-k)=0 \quad ②$$

的根，其中 x_1，x_2 为方程①的两个实数根，求代数式 $\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a+1}\right)\div\frac{4}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a}$ 的值.

解题点拨：(1)运用一元二次方程根的判别式即可得到结论；(2)由一元二次方程根与系数的关系可得到关于 y 的方程为 $y^2-2y-1=0$，根据方程根的意义可得等式 $a^2=2a+1$，再由代数式恒等变形可得所求代数式的值.

解：(1)$\Delta=4(k+1)^2-4(k^2+2k-1)$

$=4k^2+8k+4-4k^2-8k+4$

$=8>0$，

∴ 对于任意实数 k，方程①总有两个不相等的实数根.

(2)∵ x_1，x_2 是方程①的两个实数根，

∴ $x_1+x_2=2(k+1)$，$x_1x_2=k^2+2k-1$，

∴ $x_1+x_2-2k=2(k+1)-2k=2$，

$(x_1-k)(x_2-k)=x_1x_2-k(x_1+x_2)+k^2$

$=k^2+2k-1-2k(k+1)+k^2$

$=-1$，

∴ 方程②为 $y^2-2y-1=0$.

∵ a 是方程②的根，

∴ $a^2-2a-1=0$，∴ $a^2=2a+1$.

∴ $\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a+1}\right)\div\frac{4}{a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a}=\frac{a+1-a^2}{a(a+1)}\cdot\frac{a+1}{4}\cdot\frac{a^2-1}{a}$

$=\dfrac{(a+1-a^2)(a^2-1)}{4a^2}$

$=\dfrac{[a+1-(2a+1)](2a+1-1)}{4a^2}$

$=-\dfrac{1}{2}$.

例 2 已知：关于 x 的方程 $x^2-3x+2k-1=0$ 的两个实数根的平方和不小于这两个根的积，且反比例函数 $y=\dfrac{1+2k}{x}$ 的图象的两个分支在各自象限内 y 随 x 的增大而减小，求满足上述条件的 k 的整数值.

解：$\because$ 关于 x 的方程 $x^2-3x+2k-1=0$ 有两个实数根，

$\therefore$ $\Delta=(-3)^2-4(2k-1)\geqslant 0$，$\therefore$ $k\leqslant\dfrac{13}{8}$.

设方程 $x^2-3x+2k-1=0$ 的两个根分别为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=3$，$x_1x_2=2k-1$.

$\because$ $x_1^2+x_2^2\geqslant x_1x_2$，$\therefore$ $(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\geqslant 0$，

$\therefore$ $9-3(2k-1)\geqslant 0$，$\therefore$ $k\leqslant 2$.

$\because$ 反比例函数 $y=\dfrac{1+2k}{x}$ 的图象的两个分支在各自象限内 y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ $1+2k>0$，$\therefore$ $k>-\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ 满足上述条件的 k 的范围是 $-\dfrac{1}{2}<k\leqslant\dfrac{13}{8}$.

$\therefore$ k 的整数值是 0、1.

解题反思：要想求出 k 的整数值，必须先求出满足题设条件 k 的范围. 最容易被忽略的是，已知一元二次方程有实根这个隐含条件，其判别式 $\Delta\geqslant 0$.

例 3 已知关于 x 的方程

$$kx^2+(2k-1)x+k-1=0 \quad ①$$

只有整数根，且关于 y 的一元二次方程

$$(k-1)y^2-3y+m=0 \quad ②$$

有两个实数根 y_1 和 y_2.

(1)当 k 为整数时，确定 k 的值；

(2)在(1)的条件下，若 $m>-2$，用关于 m 的代数式表示 $y_1^2+y_2^2$.

解题点拨：解答本题时要根据整数的性质，结合方程有实数根的条件来确定 k 值.

解：(1)当 $k=0$ 时，方程①化为 $-x-1=0$，方程有整数根 $x=-1$.

当 $k\neq 0$ 时，解得 $x_1=-1$，$x_2=\dfrac{-k+1}{k}=-1+\dfrac{1}{k}$.

$\because$ 方程①的根是整数，

$\therefore$ k 是整数的倒数.

而 k 是整数，$\therefore$ $k=\pm 1$.

此时，$\Delta=(2k-1)^2-4k(k-1)=1>0$.

但当 $k=1$ 时，$(k-1)y^2-3y+m=0$ 不是一元二次方程，

$\therefore$ $k=1$ 舍去，故 $k=0$，$k=-1$.

(2)当 $k=0$ 时，方程②化为 $-y^2-3y+m=0$.

∵ 方程②有两个实数根，

∴ $\Delta=9+4m\geqslant 0$，即 $m\geqslant -\frac{9}{4}$，又 $m>-2$，

∴ 当 $m>-2$ 时，$y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=9+2m$.

当 $k=-1$ 时，方程②化为 $-2y^2-3y+m=0$.

∵ 方程②有两个实数根，

∴ $\Delta=9+8m\geqslant 0$，即 $m\geqslant -\frac{9}{8}$，

又 $m>-2$，

∴ 当 $m\geqslant -\frac{9}{8}$时，有 $y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\frac{9}{4}+m$.

【激活热点】

1. 关于 x 的方程 $m^2x^2+(2m+3)x+1=0$ 有两个乘积为 1 的实数根；$x^2+2(a+m)x+2a-m^2+6m-4=0$有大于 0 且小于 2 的实根，求 a 的整数值.

2. 关于 x 的方程 $x^2-mx-\frac{3}{4}m-1=0$①与 $2x^2-(m+6)x-m^2+4=0$②，若方程①的两个实数根的平方和等于方程②的一个整数根，求 m 的值.

3. 已知关于 x 的一元二次方程 $5x^2-2\sqrt{6}px+5q=0(p\neq 0)$有两个相等的实数根.
求证：(1)方程 $x^2+px+q=0$ 有两个不相等的实数根；
(2)设方程 $x^2+px+q=0$ 有两个实数根 x_1、x_2，若$|x_1|<|x_2|$，则$\frac{x_1}{x_2}=\frac{2}{3}$.

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2mx-3m^2+8m-4=0$.
(1)求证：当 $m>2$ 时，原方程永远有两个实数根；
(2)若原方程的两个实数根一个小于 5，另一个大于 2，求 m 的取值范围.

5. 已知：关于 x 的方程 $x^2+3x+a=0$①的两个实数根的倒数和等于 3，关于 x 的方程$(k-1)x^2+3x-2a=0$②有实数根且 k 为正整数，求代数式$\frac{k-1}{k-2}$的值.

二、方程与几何相结合型综合问题

【热点聚焦】

以几何量为一元二次方程的根或系数构成了这类综合题的基本类型. 解决这类问题的关键，是把一元二次方程的知识与几何图形的性质以及计算与证明有机融合起来.

【领悟捷径】

例 1 已知：A、B 是 Rt$\triangle ABC$ 的两个锐角，且 tg$A$、tg$B$ 是方程 $x^2-3x+m=0$ 的两个根.

(1)求 m 的值；

(2)求作一个一元二次方程，使它的两个根是($\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B$)和($\mathrm{tg}^2A+\mathrm{tg}^2B$).

解题点拨：由已知 A、B 互为余角，且 $m=\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B$，于是可以求出 m 的值．欲求作一元二次方程，关键是求出($\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B$)和($\mathrm{tg}^2A+\mathrm{tg}^2B$)的值，而这由根与系数关系不难办到.

解：(1)设 Rt$\triangle ABC$ 的两个锐角 A 与 B 的对边为 a、b.

由三角函数定义可知：$\mathrm{tg}A=\dfrac{a}{b}$，$\mathrm{tg}B=\dfrac{b}{a}$.

∴　$\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B=1$.

∵　$\mathrm{tg}A$ 与 $\mathrm{tg}B$ 是方程 $x^2-3x+m=0$ 的两个根，

∴　$m=\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B=1$.

(2)设所求方程的两个根为 y_1 和 y_2，则 $y_1=\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B$，$y_2=\mathrm{tg}^2A+\mathrm{tg}^2B$.

由(1)知，$\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B=3$，$\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B=1$.

∴　$y_1=3$，

$$y_2=(\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B)^2-2\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B$$
$$=3^2-2\times1=7.$$

∴　$y_1+y_2=10$，$y_1y_2=21$.

故所求方程是 $y^2-10y+21=0$.

解题反思：若 A、B 为 Rt$\triangle ABC$ 的两个锐角，则 $A+B=90°$，$\mathrm{tg}B=\mathrm{tg}(90°-A)=\mathrm{ctg}A$，所以 $\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B=\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{ctg}A=1$．而在上述解法中是通过三角函数定义推出这个结论的.

例 2 如图 1-1，菱形 $ABCD$ 的对角线交于 O 点，且 AO、BO 的长分别是关于 x 的方程 $x^2-(2m-1)x+4(m-1)=0$ 的两个根，又知菱形 $ABCD$ 的周长为 20，求 m 的值.

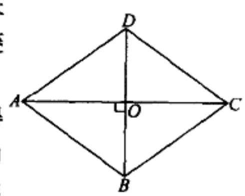

图 1-1

解题点拨：由已知，根据一元二次方程根与系数的关系，可以得到关于 AO、BO 和 m 的两个方程．显然 $AB=5$，在 Rt$\triangle AOB$ 中，由勾股定理又可得到一个关于 AO、BO 的方程，联系上述方程即可求出 m 的值.

解：∵　AO、BO 是方程 $x^2-)2m-1)x+4(m-1)=0$ 的两个根，

∴　$AO+BO=2m-1$，$AO\cdot BO=4(m-1)$.

∵　四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴　$AC\perp BD$.

由于菱形周长为 20，且四边长相等，

∴　$AB=5$.

由勾股定理，得 $AO^2+BO^2=AB^2$，

即 $AO^2+BO^2=25$，

∴　$(AO+BO)^2-2AO\cdot BO=25$，

∴　$(2m-1)^2-2\times4(m-1)=25$.

$$m^2-3m-4=0.$$

解得　$m=4$ 或 $m=-1$.

当 $m=-1$ 时，$AO\cdot BO=4(m-1)=-8$ 不符合题意，故舍去.

∴　所求 m 的值为 4.

解题反思：该例中因为已知方程的两根是线段的长，所以不仅要求方程有实数根，即

$\Delta \geqslant 0$，而且要求方程有两个正根，即 $2m-1>0$，且 $4(m-1)>0$. 解题时要注意挖掘和利用这些隐含条件，才能保证结论的正确.

例 3 如图 1-2，a、b、c 是△ABC 中∠A、∠B、∠C 的对边，关于 x 的一元二次方程 $x^2+(a+b)^2x-2a\left(b+\dfrac{c^2}{2a}\right)=0$ 的两根的和与两根的积相等，E 是 AB 上一点，$EF/\!/AC$ 交 BC 于 F，$FD\perp AB$ 于 D.

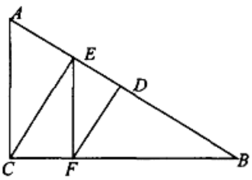

图 1-2

(1)判断△ABC 的形状；

(2)若 $ED=4$，$BE=10$，$\dfrac{CF}{CE}=\dfrac{2}{3}$，求 CF 的长.

解题点拨：利用一元二次方程根与系数的关系可将已知条件"方程两根的和与两根的积相等"转化为关于△ABC 三边 a、b、c 的关系式，由此来判断三角形的形状.

解：(1)设方程的两个根是 x_1，x_2，依题意，$x_1+x_2=x_1x_2$.

由根与系数的关系得：$-(a+b)^2=-2a\left(b+\dfrac{c^2}{2a}\right)$.

化简得 $a^2+b^2=c^2$.

∴ △ABC 是直角三角形.

(2)∵ $EF/\!/AC$ 交 BC 于 F，$\angle ACB=90°$，

∴ $\angle EFB=90°$.

又 $FD\perp AB$ 于 D，

∴ Rt△EFD∽Rt△EBF，

∴ $EF^2=ED\cdot EB=4\times10=40$.

∵ $\dfrac{CF}{CE}=\dfrac{2}{3}$，∴ $CE=\dfrac{3}{2}CF$.

在 Rt△EFC 中，$CF^2-CF^2=EF^2$，

∴ $\left(\dfrac{3}{2}CF\right)^2-CF^2=40$，∴ $CF=4\sqrt{2}$.

解题反思：该例属递进式综合题，即前一问的结论将影响后一问的解答. 在判定△ACB 为直角三角形的基础上，进一步判定△EFC 为直角三角形，于是可用勾股定理来求出 CF. 解答递进式综合题，要注意把审题贯彻始终.

例 4 △ABC 中，$AB=10$，外接圆 O 的面积为 25π，$\sin A$、$\sin B$ 是方程 $(m+5)x^2-(2m-5)x+12=0$ 的两个根，其中 $m\neq-5$.

(1)求 m 的值；

(2)求△ABC 的内切圆的半径.

解题点拨：显然，AB 是⊙O 直径，△ABC 为直角三角形. 由一元二次方程根与系数的关系可得关于 $\sin A$、$\sin B$ 和 m 的方程组，注意到 $\sin B=\cos A$，$\sin^2A+\cos^2A=1$，不难求出 m 的值.

解：(1)设△ABC 外接圆 O 的半径为 R，内切圆的半径为 r.

∵ $\pi R^2=25\pi$，∴ $R=5$.

由于⊙O 的内接△ABC 的边 $AB=10=2R$，所以 AB 是⊙O 的直径，且∠$ACB=90°$，则△ABC 是直角三角形，从而 $A+B=90°$，于是 $\sin B=\cos A$.

∵ $\sin A$、$\sin B$ 是一元二次方程 $(m+5)x^2-(2m-5)x+12=0$ 的两个根，

∴ $\begin{cases}\sin A+\sin B=\sin A+\cos A=\dfrac{2m-5}{m+5}, & ①\\ \sin A\cdot\sin B=\sin A\cdot\cos A=\dfrac{12}{m+5}, & ②\end{cases}$

$①^2-2\times②$，消去 $\sin A$ 和 $\cos A$，得 $m^2-18m-40=0$.

解得 $m=20$ 或 $m=-2$.

(2)当 $m=20$ 时，方程化为 $25x^2-35x+12=0$.

解得 $x=\dfrac{3}{5}$ 或 $x=\dfrac{4}{5}$.

则 $\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\sin B=\dfrac{4}{5}$ 或 $\sin A=\dfrac{4}{5}$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$.

即 $AC=AB\cdot\sin B=10\times\dfrac{4}{5}=8$，

$BC=AB\cdot\sin A=10\times\dfrac{3}{5}=6$；

或 $AC=6$，$BC=8$.

于是内切圆半径 $r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{8+6-10}{2}=2$.

当 $m=-2$ 时，方程化为 $x^2+3x+4=0$，

此方程无实根，所以 $m=-2$ 应舍去.

故 $m=20$，$r=2$.

解题反思：该例的难点在于求 m 值时要从方程组中消去锐角三角函数. 对此，要注意直角三角形两锐角的三角函数关系，即 $\sin B=\cos A$，以及三角函数的平方和关系：$\sin^2A+\cos^2A=1$ 等隐含条件的运用.

例 5 如图 1-3，已知 AB 为⊙O 直径，C 为⊙O 上一点，过 A 作⊙O 的切线与 OC 延长线交于 D 点，BC 延长线交 AD 于 E 点. $AE\cdot AD=27$，DC 和 AB 是方程 $x^2+2mx+m^2-9=0$ 的两根，$DC<AB$. 求 EC 的长.

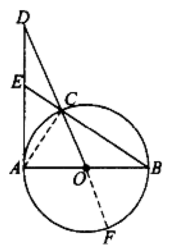

图 1-3

解题点拨：连结 AC，由已知并结合图形不难发现 Rt△ACE∽Rt△BCA∽Rt△BAE，以及△ACD∽△CED.

延长 CO 交⊙O 于 F，则由切割线定理得 $AD^2=DC\cdot DF=DC(DC+AB)$.

因为方程 $x^2+2mx+m^2-9=0$ 的两根为 $x_1=-m-3$，$x_2=-m+3$，所以 $DC=-m-3$，$AB=-m+3$.

怎样利用已知条件 $AE\cdot AD=27$ 呢？此时可从寻求 AE、AD 的关系入手. 由 Rt△ACE∽Rt△BCA，得

$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AC}{BC}$，即 $AE=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}$；

由△ACD∽△CED，得

$\dfrac{DC}{AD}=\dfrac{CE}{AC}$，即 $AD=\dfrac{AC\cdot DC}{CE}$.

$\therefore\quad AE\cdot AD=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}\cdot\dfrac{AC\cdot DC}{CE}=\dfrac{AC^2\cdot AB\cdot DC}{CE\cdot BC}.$

$\because$ 在 Rt$\triangle BAE$ 中，$AC\perp BE$，

$\therefore\quad AC^2=CE\cdot BC.$

$\therefore\quad AE\cdot AD=AB\cdot DC$

再由一元二次方程根与系数的关系，得

$27=m^2-9$，$m=-6$.

$\therefore\quad DC=3$，$AB=9$.

$\therefore\quad AD^2=3\times(3+9)=36$，$AD=6$.

$\therefore\quad AE=\dfrac{27}{AD}=\dfrac{9}{2}.$

欲求 EC 的长，只须求出 AC. 而 $AC\cdot BE=AE\cdot AB$，故只须求出 BE.

$\therefore\quad BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=\sqrt{\dfrac{81}{4}+81}=\dfrac{9}{2}\sqrt{5}$，

$\therefore\quad AC=\dfrac{AE\cdot AB}{BE}=\dfrac{\dfrac{9}{2}\times 9}{\dfrac{9}{2}\sqrt{5}}=\dfrac{9}{5}\sqrt{5}.$

$\therefore\quad EC=\sqrt{AE^2-AC^2}=\sqrt{\dfrac{81}{4}-\dfrac{81}{5}}=\dfrac{9}{10}\sqrt{5}.$

解：略.

解题反思：该例探索解题思路的方法是典型的综合分析法. 对已知条件的逐步深入地分析，以至得出 $AE\cdot AD=AB\cdot DC$ 的结论，这是解题的关键. 为求 EC，而依次要求 AC，BE，AE，AD. 而当 DC 和 AB 为已知时，问题也就解决了.

对于含参数的一元二次方程，当判别式完全平方时，必存在有理根，此时用十字相乘法可十分方便地求出方根的有理根. 求出方程的有理根对优化解题过程有重要的意义.

【激活热点】

1. 选择题

(1)如果两个圆的半径的长分别是方程 $x^2-5x+6=0$ 的两个实数根，且圆心距为 5，那么这两个圆的位置关系是(　　).

(A)外离　　(B)相交　　(C)外切　　(D)内切

(2)已知等腰三角形三边的长为 a、b、c，且 $a=c$. 若关于 x 的一元二次方程 $ax^2-\sqrt{2}bx+c=0$的两根之差为$\sqrt{2}$，则等腰三角形的一个底角是(　　).

(A)15°　　(B)30°　　(C)45°　　(D)60°

2. 如图 1-4，$\odot O$ 的内接正五边形 $ABCDE$ 的对角线 AD 与 BE 相交于点 M.

(1)请你仔细观察图形，并直接写出图中所有的等腰三角形；

(2)求证：$BM^2=BE\cdot ME$；

(3)设 BE、ME 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2\sqrt{5}x+k=0$ 的两个根，试求 k 的值，并求出正五边形 $ABCDE$ 的边长.

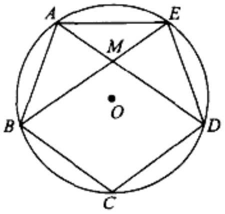

图 1-4

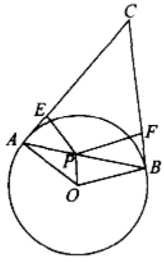

图 1-5

3. 如图 1-5，已知⊙O 的半径是 2，弦 AB 所对的圆心角$\angle AOB=120°$，P 是 AB 上一点，$OP=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，⊙O 的两条切线 AC 和 BC 交于 C，$PE\perp AC$ 于 E，$PF\perp BC$ 于 F，设 $PE=a$，$PF=b$，求以 a、b 为根的一元二次方程.

4. 已知关于 x 的方程 $x^2-(2k+1)x+4(k-\frac{1}{2})=0$.

(1)求证：无论 k 取什么实数值，这个方程总有实数根；

(2)若等腰三角形 ABC 的一边长 $a=4$，另两边的长 b、c 恰好是这个方程的两个根，求$\triangle ABC$ 的周长.

5. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，斜边 $AB=10$，直角边 AC、BC 的长是关于 x 的方程 $x^2-mx+3m+6=0$ 的两个实数根.

(1)求 m 的值；

(2)计算 $\sin A+\sin B+\sin A\cdot\sin B$.

6. 已知：如图 1-6，⊙O 的半径为 r，CE 切⊙O 于 C，且与弦 AB 的延长线交于点 E，$CD\perp AB$ 于 D. 如果 $CE=2BE$，且 AC、BC 的长是关于 x 的方程 $x^2-3(r-2)x+r^2-4=0$ 的两个实数根.

求：(1) AC、BC 的长；

(2) CD 的长.

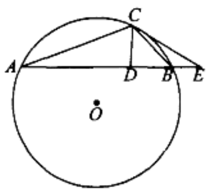

图 1-6

第二章 函数型综合问题

一、方程与函数相结合型综合问题

【热点聚焦】

方程与函数相结合型综合问题，历来是各地中考试题中的热点题型. 主要是以函数为主线，建立函数的图象及性质、方程的有关理论的综合. 解题时要注意函数的图象信息与方程的代数信息的相互转化. 例如函数图象与 x 轴交点的横坐标即为相应方程的根；点在函数图象上即点的坐标满足函数的解析式等.

【领悟捷径】

例 1 已知 $P(m, n)$ 是一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 图象上的一个点，关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 的两实根的平方和等于 1. 求 P 点的坐标.

解题点拨： 由 $P(m, n)$ 是一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 图象上的一个点，可得 $n=-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}$；由 $x_1^2+x_2^2=1$，$x_1+x_2=-m$，$x_1 \cdot x_2=n$ 转化为关于 m，n 的另一个方程. 从而解关于 m，n 的二元一次方程组求得 m，n 的值，最后求得 P 点坐标.

解： ∵ $P(m, n)$ 是一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 图象上的一个点，

∴ $n=-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}$. ①

设关于 x 的方程 $x^2+mx+n=0$ 的两根为 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=-m$，$x_1x_2=n$.

∵ $x_1^2+x_2^2=1$，

∴ $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1$，

∴ $(-m)^2-2n=1$，

即 $m^2-2n=1$. ②

由①、②解得 $\begin{cases} m_1=-2, \\ n_1=\frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} m_2=1, \\ n_2=0. \end{cases}$

当 $m_1=-2$，$n_1=\frac{3}{2}$ 时，方程 $x^2+mx+n=0$ 为 $x^2-2x+\frac{3}{2}=0$，

∵ $\Delta=(-2)^2-4\times\frac{3}{2}=-2<0$，

∴ 此方程无实根，舍去.

当 $m_2=1$，$n_2=0$ 时，方程 $x^2+mx+n=0$ 为 $x^2+x=0$，

∵ $\Delta=1^2-4\times0>0$,

∴ $m=1$, $n=0$ 符合题意.

∴ P 点坐标为 $P(1, 0)$.

解题反思: 当得到一元二次方程后，一定要注意用根的判别式对根的情况进行判断. 由于题目中已给出方程有两个实根，那就要将方程无实根的予以舍去. 这一点是很容易被忽略的，应予以注意.

例 2 如图 2-1，已知点 $M(m, n)$是第二象限内一点，且 m、n 是方程 $t^2+2t+p=0$ 的两个根，M 点与原点的距离为 $2\sqrt{5}$. 平移直线 $y=-x$，使它过点 M，交 y 轴于 B.

(1)求 p 的值；

(2)求直线 MB 的解析式.

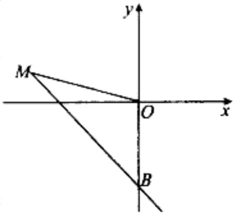

图 2-1

解题点拨: 本题也是一道涉及一元二次方程、一次函数知识的综合题. 解题时要充分注意运用一元二次方程的根与系数的关系，寻求简捷的解题途径.

解: (1)∵ m、n 是方程 $t^2+2t+p=0$ 的两个根，

∴ $m+n=-2$, $mn=p$.

∵ $OM=\sqrt{m^2+n^2}=2\sqrt{5}$,

∴ $m^2+n^2=20$.

又 $m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$,

∴ $(m+n)^2-2mn=20$.

∴ $(-2)^2-2p=20$.

∴ $p=-8$.

(2)∵ 直线 MB 平行于直线 $y=-x$,

∴ 设直线 MB 的解析式为 $y=-x+b$.

∵ $p=-8$,

∴ 方程 $t^2+2t-8=0$ 的两根为 $t_1=-4$, $t_2=2$.

∵ 点 $M(m, n)$在第二象限，

∴ $m<0$, $n>0$.

∴ $m=-4$, $n=2$.

∴ 点 M 的坐标为$(-4, 2)$.

∴ $-(-4)+b=2$, ∴ $b=-2$.

∴ 直线 MB 的解析式为 $y=-x-2$.

【激活热点】

1. 如果一个二次函数的图象经过点 $A(6, 10)$，与 x 轴交于 B、C 两点，点 B、C 的横坐标为 x_1、x_2，且 $x_1+x_2=6$, $x_1\cdot x_2=5$，求这个二次函数的解析式.

2. 已知关于 x 的方程 $x^2+(2m+1)x+m^2+2=0$ 有两个不相等的实数根，试判断直线 $y=(2m-3)x-4m+7$ 能否通过点 $A(-2, 4)$，并说明理由.

3. 已知抛物线 $y=(9-m^2)x^2-2(m-3)x+3m$ 的顶点 D 在双曲线 $y=-\frac{5}{x}$上，直线 $y=$

$kx+c$ 过点 D 和点 $C(a, b)$，且使 y 随 x 的增大而减小，a、b 满足方程组 $\begin{cases} a^2-b^2-3=0, \\ 2a^2-5ab+2b^2=0. \end{cases}$ 求这条直线的解析式.

4. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $P(-2, 2)$，且与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B. 点 A 的横坐标方程 $\frac{4}{x}-\frac{1}{x-1}=1$ 的根，点 B 的纵坐标是不等式组 $\begin{cases} 2x-1\geqslant 0 \\ 4-3x>0 \end{cases}$ 的整数解，求抛物线的解析式.

二、函数图象与图形面积相结合型综合问题

【热点聚焦】

以面积为纽带，以函数图象为背景，结合常见的平面几何图形而产生的函数图象与图形面积相结合型综合问题是近年中考综合题中的一个热点问题. 解这类综合题的关键是把图形中相关线段的长用恰当的点的坐标表示.

【领悟捷径】

例 1 如图 2-2，已知直线 PA 是一次函数 $y=x+n(n>0)$ 的图象，直线 PB 是一次函数 $y=-2x+m(m>n)$ 的图象.

(1)用 m、n 表示出 A、B、P 点的坐标；

(2)若点 Q 是 PA 与 y 轴的交点，且四边形 $PQOB$ 的面积是 $\frac{5}{6}$，$AB=2$，试求 P 点的坐标，并写出直线 PA 与 PB 的解析式.

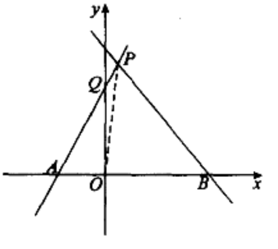

图 2-2

解题点拨：由(1)得 P 点坐标为 $\left(\frac{m-n}{3}, \frac{m+2n}{3}\right)$，要求 P 点坐标，需求出 m、n 的值，关键是将四边形 $PQOB$ 的面积、AB 的长用 m、n 的代数式表示. 四边形 $PQOB$ 是一般四边形，其面积可通过三角形面积的和差表示，这是解这类问题的基本策略.

解：(1) $A(-n, 0)$，$B\left(\frac{m}{2}, 0\right)$，$P\left(\frac{m-n}{3}, \frac{m+2n}{3}\right)$.

(2)连结 PO，则

$$S_{\triangle POB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{m+2n}{3}=\frac{m^2+2mn}{12},$$

$$S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}\cdot n\cdot\frac{m-n}{3}=\frac{mn-n^2}{6}.$$

$$\because\quad S_{四边形PQOB}=S_{\triangle POB}+S_{\triangle POQ}=\frac{5}{6},\ AB=2,$$

$$\therefore\quad \begin{cases} \frac{m^2+2mn}{12}+\frac{mn-n^2}{6}=\frac{5}{6}, \\ \frac{m}{2}+n=2. \end{cases}$$

解得 $m=2$，$n=1$.

故 P 点坐标为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$，直线 PA 的解析式是 $y=x+1$，直线 PB 的解析式是 $y=-2x+2$.

例 2 已知：如图 2-3，直线 l 经过 $A(4, 0)$ 和 $B(0, 4)$ 两点，它与抛物线 $y=ax^2$ 在第一象限内交于点 P，又知△AOP 的面积为 $\frac{9}{2}$，求 a 的值.

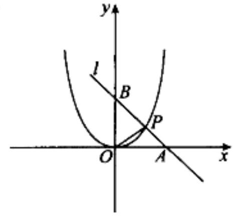

图 2-3

解题点拨： 欲求 a 的值，需求出二次函数的图象与直线 l 的交点 P 的坐标，为此，先求直线 l 的解析式. 由△AOP 的面积是 $\frac{9}{2}$，且 $OA=4$，故可求出 P 点的纵坐标，代入到直线的解析式中，则横坐标也可求出. 由于点 P 在 $y=ax^2$ 的图象上，代入到 $y=ax^2$ 可求 a 值.

解： 设直线的解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases} b=4, \\ 4k+b=0. \end{cases}$

解得 $k=-1$，$b=4$.

$\therefore$ 直线 l 的解析式是 $y=-x+4$.

设 P 点的坐标为 (m, n).

$\because$ $S_{\triangle AOP}=\frac{9}{2}$，$OA=4$，

$\therefore$ $\frac{1}{2}\times 4\times n=\frac{9}{2}$，$\therefore$ $n=\frac{9}{4}$.

$\because$ 点 P 在直线 l 上，

$\therefore$ 将 $n=\frac{9}{4}$ 代入到 $y=-x+4$ 中，得 $m=\frac{7}{4}$.

故 P 点的坐标为 $\left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

$\because$ P 点在抛物线上，

$\therefore$ 将 $m=\frac{7}{4}$，$n=\frac{9}{4}$ 代入到 $y=ax^2$，得

$\frac{9}{4}=a\times\left(\frac{7}{4}\right)^2$，$\therefore$ $a=\frac{36}{49}$.

解题反思： 如果题目中有三角形的面积，要注意结合图形观察顶点的横坐标与纵坐标. 对于此题来说，由于△AOP 的底边 OA 的长已知，因此 P 点的纵坐标即为△AOP 中 OA 边上的高.

例 3 如图 2-4，直线 AB 过 x 轴上的 $A(2, 0)$ 点，且与抛物线 $y=ax^2$ 相交于 B、C 两点，已知 B 点坐标是 $(1, 1)$.

(1) 求直线和抛物线所表示的函数的解析式；

(2) 如果抛物线上有一点 D，使得 $S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBC}$，求这时 D 点坐标.

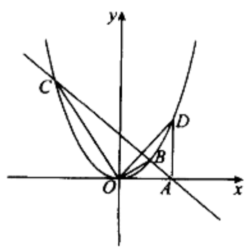

图 2-4

解题点拨： (1) 由题意知，直线 AB 经过 $A(2, 0)$、$B(1, 1)$ 两点，由此可以确定直线 AB 所表示的函数解析式. 又知 B 是直线与抛物线的交点，即 $B(1, 1)$ 在抛物线 $y=ax^2$ 上，所以 B 点坐标满足 $y=ax^2$，