151

高 等 学 校 教 材

线性代数学习指导

秦新强　赵凤群　编

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据工科院校“线性代数”教学大纲编写的，可作为“线性代数”主教材的学习指导书。内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、特征值与特征向量及二次型六部分。每一部分均在系统总结其内容的基础上，通过对典型例题的分析，介绍“线性代数”的解题思路、方法与技巧。每一部分后附有练习题及练习题的答案与提示。

本书可供工科全日制大学本科、专科学生使用，也可作为考研的复习资料，还可用作有关工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导/秦新强，赵凤群编 .—北京：机械工业出版社，2002.1
高等学校教材
ISBN 7-111-09732-7

Ⅰ.线…　Ⅱ.①秦…②赵…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 097337 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
责任编辑：曹俊玲　版式设计：霍永明　责任校对：唐海燕
封面设计：鞠　杨　责任印制：付方敏
北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2002 年 3 月第 1 版·第 1 次印刷
1000mm×1400mm B5·4.5 印张·172 千字
0 001—5 000 册
定价：12.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、68326677－2527

前　　言

“线性代数”是工科各专业学生的一门必修基础课。为了加深对“线性代数”课程内容的理解，提高学生综合分析和灵活运用知识的能力，以进一步提高教学质量，我们编写了《线性代数学习指导》一书。本书依照教育部颁布的“线性代数教学大纲”的要求，分六章编写，每章包括五部分内容：基本要求、内容提要、例题分析、练习题、练习题答案与提示。

内容提要是对每章内容的总结和归类，便于读者系统掌握该部分知识。例题分析是本书的重点内容，首先将各章所涉及到的题型进行归类，然后就各类题型给出解题思路、方法和步骤，有些题目给出多种解法，并对一些常见错误进行分析指正。例题中既有强调基础知识的基本题型，也有提高综合知识运用能力的综合题型，部分题目选自历届研究生入学考试试题。练习题以选择、填空、计算和证明题的形式给出，基本上是例题分析中所介绍的方法和技巧的运用。练习题的答案与提示对读者进一步掌握解题要领和方法将起到启迪作用。

由于水平有限，书中难免有疏误之处，恳请读者批评指正。

编　者

2001 年 10 月

目　　录

第一章　行列式及其计算

一、基本要求

1. 理解 n 阶行列式的定义。

2. 熟练掌握行列式的性质及计算方法。

3. 掌握求解线性方程组的克莱姆(Cramer) 法则。

二、内容提要

1. 全排列及逆序数

(1) 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 构成的一个有序数组 $p_1p_2\cdots p_n$ 称为一个 n 级排列。

(2) 在一个排列中,如果较大的数字排在较小数字的左边,则称这两个数字构成一个逆序。

(3) 一个 n 级排列的所有逆序之和,称为该排列的逆序数,记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$。

(4) 若一个 n 级排列的逆序数为偶数(或奇数),则称该排列为偶排列(或奇排列)。

(5) 交换排列中的任何两个数字,则改变排列的奇偶性。

2. 行列式的定义、性质及其按行按列展开

(1) n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$= \sum_{q_1q_2\cdots q_n} (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$$

式中,$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$,$\sum\limits_{q_1q_2\cdots q_n}$ 均表示为对所有 n 级排列的求和。行列式的展开式中共有 $n!$ 项,每项都是由取自不同行不同列的元素乘积构成,其符号取决于排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 或 $q_1q_2\cdots q_n$ 的奇偶性。

(2) 行列式的性质

性质 1　行列式转置,不改变行列式的值。

性质 2　用一个数乘行列式的某一行(列),等于用该数乘此行列式。

性质 3　互换行列式的两行(列),行列式改变符号。

性质 4　如果行列式两行(列)对应成比例,则此行列式为零。

性质 5　如果行列式中的某一行(列)是两组数的和,则这个行列式等于两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6　把行列式的某一行(列)的 k 倍加到另一行(列)上,行列式的值不变。

(3) 行列式按行按列展开

1) 余子式及代数余子式。将 n 阶行列式中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素划掉,剩余的元素按原位置次序所构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},并称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式。

2) 行列式按某一行(列)展开

n 阶行列式等于它任意一行(列)的所有元素与它们的对应的代数余子式的乘积之和。

n 阶行列式中某一行(列)的某个元素与另一行(列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零。

设 n 阶行列式为 D,则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

或者

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

3. 克莱姆(Cramer)法则

(1) 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则这个方程组有惟一解,并可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中,$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 j 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,其余各列均不变的行列式。

(2)如果齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则这个方程组只有零解。

三、例题分析

关于 n 阶行列式的计算,可以总结出以下基本计算方法。

1. 用 n 阶行列式定义直接计算(用定义计算相当麻烦,只有在特殊情形下才使用)

例 1-1 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a_1&0\\0&0&\cdots&a_2&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\0&a_{n-2}&\cdots&0&0&0\\a_{n-1}&0&\cdots&0&0&0\\0&0&\cdots&0&0&a_n\end{vmatrix}\quad 其中\ a_i\neq0(i=1,2,\cdots,n)$$

解 按 n 阶行列式的定义

$$\begin{aligned}D_n&=(-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots2\cdot1n)}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\\&=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n\end{aligned}$$

2. 化为三角行列式进行计算

例 1-2 计算

$$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

解 对于这种用数字表示的没有任何规律的行列式,一般应将其化为三角行列式。

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_5} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = 40$$

例 1-3　计算$(n+1)$阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \text{其中 } a_i \neq 0 (i = 1,2,\cdots,n)$$

解　根据题设可分别从第二列至第 n 列分别提出 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，再用第一列减去其他各列。

$$D_{n+1} = a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} a_0 & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} a_j \begin{vmatrix} a_0 - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a_0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}) \prod_{j=1}^{n} a_j$$

例 1-4　计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, \text{其中 } x_i \neq a_i (i = 1,2,\cdots,n)$$

解　由行列式的性质进行化简，先由其他各行减去第一行，再分别从第一至

第 n 列提出因子 $(x_1-a_1),(x_2-a_2),\cdots,(x_n-a_n)$

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1-x_1 & x_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1-x_1 & 0 & x_3-a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(x_1-a_1)(x_2-a_2)\cdots(x_n-a_n)\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{x_1-a_1} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \dfrac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各列加到第 1 列}}\prod_{j=1}^{n}(x_j-a_j)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i}{x_i-a_i} & \dfrac{a_2}{x_2-a_2} & \dfrac{a_3}{x_3-a_3} & \cdots & \dfrac{a_n}{x_n-a_n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)\prod_{j=1}^{n}(x_j-a_j)$$

例 1-5　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix},\text{其中 } a_1a_2\cdots a_n\neq 0$$

解　由第 1 列至第 n 列分别提出 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，再将各列加到第 1 列

$$D_n=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} 1+\dfrac{1}{a_1} & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n} \\ \dfrac{1}{a_1} & 1+\dfrac{1}{a_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_1} & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & 1+\dfrac{1}{a_n} \end{vmatrix}$$

$$
= a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n} \\ 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & 1+\dfrac{1}{a_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & 1+\dfrac{1}{a_n} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n} \\ 1 & 1+\dfrac{1}{a_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \dfrac{1}{a_2} & & 1+\dfrac{1}{a_n} \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{\text{各行减去第 1 行}} a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{a_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= a_1 a_2 \cdots a_n \left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)
$$

3. n 阶行列式按行(或列)展开

例 1-6 计算 n 阶行列式

$$
D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}
$$

解 D_n 中第 1 列只有两个非零元素,故可以按第 1 列展开

$$
D_n = x \begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}
$$

$$
= x^n + (-1)^{n+1} y^n
$$

例 1-7 计算行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\-a_1&x_1&0&0&0\\0&-a_2&x_2&0&0\\0&0&-a_3&x_3&0\\0&0&0&-a_4&x_4\end{vmatrix}$$

解　按第 1 列展开可以得到一个递推式,依次进行计算

$$D_5=\begin{vmatrix}x_1&0&0&0\\-a_2&x_2&0&0\\0&-a_3&x_3&0\\0&0&-a_4&x_4\end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix}1&1&1&1\\-a_2&x_2&0&0\\0&-a_3&x_3&0\\0&0&-a_4&x_4\end{vmatrix}$$

$$=x_1x_2x_3x_4+a_1\begin{vmatrix}x_2&0&0\\-a_3&x_3&0\\0&-a_4&x_4\end{vmatrix}+a_1a_2\begin{vmatrix}1&1&1\\-a_3&x_3&0\\0&-a_4&x_4\end{vmatrix}$$

$$=x_1x_2x_3x_4+a_1x_2x_3x_4+a_1a_2\begin{vmatrix}x_3&0\\-a_4&x_4\end{vmatrix}+a_1a_2a_3\begin{vmatrix}1&1\\-a_4&x_4\end{vmatrix}$$

$$=x_1x_2x_3x_4+a_1x_2x_3x_4+a_1a_2x_3x_4+a_1a_2a_3x_4$$

4．拆行(列)法计算行列式

例 1-8　证明

$$\begin{vmatrix}b+c&c+a&a+b\\q+r&r+p&p+q\\y+z&z+x&x+y\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\p&q&r\\x&y&z\end{vmatrix}$$

证明　对于左端利用行列式的性质,将第 1 列拆开得到两个行列式:

$$左端=\begin{vmatrix}b&c+a&a+b\\q&r+p&p+q\\y&z+x&x+y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&c+a&a+b\\r&r+p&p+q\\z&z+x&x+y\end{vmatrix}$$

在第一个行列式中用第 3 列减去第 1 列,在第二个行列式中用第 2 列减去第 1 列

$$左端=\begin{vmatrix}b&c+a&a\\q&r+p&p\\y&z+x&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&a+b\\r&p&p+q\\z&x&x+y\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}b&c&a\\q&r&p\\y&z&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}c&a&b\\r&p&q\\z&x&y\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a&b&c\\p&q&r\\x&y&z\end{vmatrix}=右端$$

例 1-9　计算 n 阶行列式($n\geqslant 3$)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

解　将第 1 列拆开可得结果如下

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_2 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_2 & \cdots & b_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= 0 + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} = 0$$

5. 利用范德蒙行列式的结论计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

例 1-10　计算

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解　依次将第 1 行换到第 $n+1$ 行得

$$D_{n+1}=(-1)^n\begin{vmatrix} a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

依次类推再作交换可得标准的范德蒙行列式如下

$$D_{n+1}=(-1)^{n+(n-1)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}[(a-j)-(a-i)]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}[-(j-i)]$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(j-i)$$

例 1-11 设 $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$，用克莱姆法则证明，若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根，则 $f(x)$ 是零多项式。

证明 设 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是 $f(x)$ 的 $n+1$ 个不同的根，则有

$$f(a_i)=0 \qquad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

可得

$$\begin{cases} c_0+c_1a_0+c_2a_0^2+\cdots+c_na_0^n=0 \\ c_0+c_1a_1+c_2a_1^2+\cdots+c_na_1^n=0 \\ \qquad\vdots \\ c_0+c_1a_n+c_2a_n^2+\cdots+c_na_n^n=0 \end{cases}$$

这个关于 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 为未知量的齐次线性方程组的系数行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}=\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\neq 0$$

所以由克莱姆规则可知，方程组只有零解，即

$$c_0=c_1=\cdots=c_n=0$$

故　$f(x)\equiv 0$

关于行列式的计算，要视具体情况具体分析，除了以上总结的基本计算方法以外，还有更多针对不同题型的不同方法，要善于观察，善于总结，在计算时注重将行列式的性质与按行(列)展开结合起来使用，将会简化计算过程。

四、练习题

1．填空题

(1) 方程组$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \\ x+y+az=3 \end{cases}$ 有惟一解时 $a=$______。

(2) 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}。$$

(3) 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}。$$

(4) n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}。$$

(5) 记 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-2 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$

则 $f(x)=0$ 根的个数为______个。

2．单项选择题

(1) 排列 134782695 的逆序数是(　)。

(a)9　(b)10　(c)11　(d)12

(2) 行列式$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是(　)。

(a)$k\neq -1$　(b)$k\neq 3$　(c)$k\neq -1$ 且 $k\neq 3$　(d)$k\neq -1$ 或 $k\neq 3$

(3) 方程个数和未知量个数相等的线性方程组中，下面说法正确的是(　)。

(a) 系数行列式 $D \neq 0$,方程组一定有解

(b) 系数行列式 $D \neq 0$,方程组一定无解

(c) 系数行列式 $D = 0$,方程组一定无解

(d) 方程组有解,则系数行列式一定不等于零

(4) 方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有惟一解,则 λ 满足(　)。

(a)$\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$　　(b)$\lambda \neq -1, \lambda \neq 2$

(c)$\lambda \neq 1, \lambda \neq -2$　　(d)$\lambda \neq 1, \lambda \neq 2$

(5) 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$,则 $\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix} =$ ________。

(a) $-D$　　(b)$(-1)^n D$　　(c)D　　(d)D^{-1}

(6)4 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于________。

(a)$a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　(b)$a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

(c)$(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$　　(d)$(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

3. 计算题

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$　$(xy \neq 0)$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \end{vmatrix}$　　(4) $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \cdots & x \\ x & a_2 & x & \cdots & x \\ x & x & a_3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$ $(x \neq a_i; i = 1,2,\cdots,n)$

(5) $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

$$(6)D_n = \begin{vmatrix} x_1 - a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix}$$

$$(7)D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 2x_1^2 - 1 & 2x_2^2 - 1 & 2x_3^2 - 1 & 2x_4^2 - 1 \\ 4x_1^3 - 3x_1 & 4x_2^3 - 3x_2 & 4x_3^3 - 3x_3 & 4x_4^3 - 3x_4 \end{vmatrix}$$

4．证明题

$$(1)\begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(2)D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

$$(3)D_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta},(\alpha \neq \beta)$$

$$(4)D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = n + 1$$

五、练习题答案与提示

1．(1) 由系数行列式不等于零，可解出 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$。

(2)x^4　(3)-3　(4)$n+1$　(5)2

2．(1)(b)　(2)(c)　(3)(a)　(4)(c)　(5)(b)　(6)(d)

3．(1)1　(2)x^2y^2　(3)-72

(4) 用其他各行减去第 1 行得