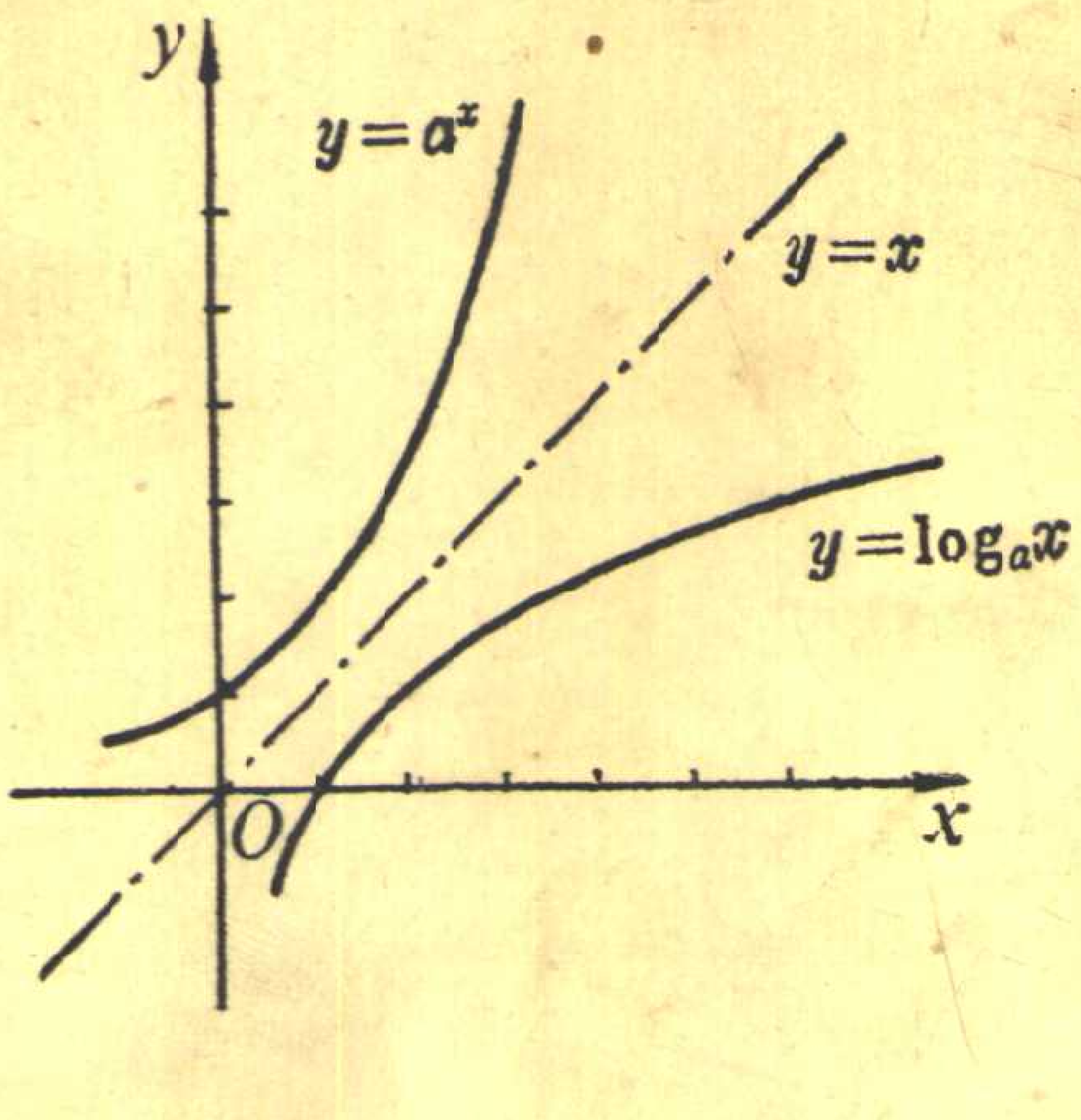
高级中学课本

代数

第一册

（甲种本）



人民教育出版社

高级中学课本

（试　用）

代　　数

第　一　册

（甲　种　本）

人民教育出版社中小学数学编辑室编

*

人民教育出版社出版

北京出版社重印

北京市新华书店发行

北京新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 7.25　字数 122,00

1983 年 10 月第 1 版　　1991 年 6 月第 6 次印

印数 176,001—183,900

ISBN 7-107-00312-7

G·515　（课）　定价 0.68 元

说　　明

一、本书供六年制中学高中一年级选用，每周授课3课时.

二、本书内容包括：幂函数、指数函数和对数函数，三角函数，两角和与差的三角函数. 此外，计划安排在初中教学的近似计算法则和换底公式这两项内容，作为本书附录，可以安排在有关章节中进行教学.

三、本书的习题共分三类：练习，习题，复习参考题.

1. 练习　主要供课堂练习用.

2. 习题　主要供课内课外作业用.

3. 复习参考题　在每章之后配备 A，B 两组复习参考题. A 组题主要供复习本章知识时使用；B 组题综合性、灵活性较大，仅供学有余力的学生参考使用.

为了因材施教，使教学更有针对性和灵活性，本书配备的习题和复习参考题 A 组数量较多，便于教学时根据实际情况选用.

四、本书在编写过程中，曾参考了中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校高中课本(试用本)《数学》第一册，大部分章、节是以该书为基础编写的. 初稿编出后，曾向各省、市、自治区的教研部门、部分师范院校和中学教师征求意见，有的省、市还进行了试教，他们都提出了宝贵的意见.

五、本书由人民教育出版社中小学数学编辑室编写．参加编写工作的有贾云山、蔡上鹤、饶汉昌、李琳等．全书由吕学礼校订。

目 录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一　集合

1.1　集合

考察下面几组对象:

(1) 1, 2, 3, 4, 5;

(2) 与一个角的两边距离相等的所有的点;

(3) 所有的直角三角形;

(4) $x^2, 3x+2, 5y^3-x, x^2+y^2$;

(5) 某农场所有的拖拉机.

它们分别是由一些数、一些点、一些图形、一些整式、一些物体组成的. 我们说,每一组对象的全体形成一个**集合**(有时也简称**集**). 集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**. 例如,(1) 是由数 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合,其中的对象 1, 2, 3, 4, 5 都是这个集合的元素.

含有有限个元素的集合叫做**有限集**,上面(1), (4), (5)这三个集合都是有限集;含有无限个元素的集合叫做**无限集**,上面(2), (3)这两个集合都是无限集.

对于一个给定的集合,集合中的元素是确定的. 这就是说,任何一个对象或者是这个给定集合的元素,或者不是它的元素. 例如,对于由所有的直角三角形组成的集合,内角分别

为 30°, 60°, 90° 的三角形，是这个集合的元素，而内角分别为 50°, 60°, 70° 的三角形，就不是这个集合的元素.

对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的. 这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素. 因此，集合中的元素是没有重复现象的.

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法.

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**列举法**.

例如，由数 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合，可以表示为

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

又如，由整式 x^2, $3x+2$, $5y^3-x$, x^2+y^2 组成的集合，可以表示为

$$\{x^2, 3x+2, 5y^3-x, x^2+y^2\}.$$

用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序. 例如由四个元素 $-3, 0, 2, 5$ 组成的集合，可以表示为 $\{-3, 0, 2, 5\}$，也可以表示为 $\{0, 2, -3, 5\}$，等等.

应该注意，a 与 $\{a\}$ 是不同的：a 表示一个元素；$\{a\}$ 表示一个集合，这个集合只有一个元素 a.

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**描述法**. 这时往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性.

例如：

由不等式 $x-3>2$ 的所有的解组成的集合（即 $x-3>2$

的解集)，可以表示为

$$\{x \mid x-3>2\};$$ ❶

由抛物线 $y=x^2+1$ 上所有的点的坐标组成的集合，可以表示为

$$\{(x, y) \mid y=x^2+1\}.$$

在不引起混淆的情况下，为了简便，有些集合用描述法表示时，可以省去竖线及其左边的部分．例如，由所有的直角三角形组成的集合，可以表示为

{直角三角形}；

由所有的小于 6 的正整数组成的集合，可以表示为

{小于 6 的正整数}．

集合通常用大写的拉丁字母表示，集合的元素用小写的拉丁字母表示．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a **属于**集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a **不属于** A，记作 $a\notin A$(或 $a\overline{\in} A$)．例如，设 B 表示集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$，则

$$5\in B, \qquad \frac{3}{2}\notin B.$$

全体自然数的集合通常简称**自然数集**，记作 N；

全体整数的集合通常简称**整数集**，记作 Z；

全体有理数的集合通常简称**有理数集**，记作 Q；

全体实数的集合通常简称**实数集**，记作 R．

为了方便起见，有时我们还用 Q^+ 表示正有理数集，用 R^- 表示负实数集，等等．

---

❶ 有的书上用冒号或分号代替竖线，如 $\{x: x-3>2\}$ 或 $\{x; x-3>2\}$．

练　习

（口答）下面集合里的元素是什么（第 1～5 题）？

1. {大于 3 小于 11 的偶数}.
2. {平方后等于 1 的数}.
3. {平方后仍等于原数的数}.
4. {比 2 大 3 的数}.
5. {一年中有 31 天的月份}.

在下列各题中，分别指出了一个集合的所有元素，用适当的方法把这个集合表示出来，然后说出它是有限集还是无限集（第 6～10 题）：

6. 水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星.
7. 周长等于 20 厘米的三角形.
8. 长江、黄河、珠江、黑龙江.
9. 不等式 $x^2+5x+6>0$ 的解.
10. 大于 0 的偶数.

把下列集合用另一种方法表示出来（第 11～13 题）：

11. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.
12. {目前世界乒乓球锦标赛的七个比赛项目}.
13. {中国古代四大发明}.
14. 用符号 $\in$ 或 $\notin$ 填空：

$1\_N, 0\_N, -3\_N, 0.5\_N, \sqrt{2}\_N;$

$1\_Z, 0\_Z, -3\_Z, 0.5\_Z, \sqrt{2}\_Z;$

$1\_Q, 0\_Q, -3\_Q, 0.5\_Q, \sqrt{2}\_Q;$

$1\_R, 0\_R, -3\_R, 0.5\_R, \sqrt{2}\_R.$

1.2 子集、交集、并集、补集

1. 子集

我们知道，任何一个自然数都是一个整数，就是说，自然数集 N 的任何一个元素都是整数集 Z 的一个元素．同样，自然数集 N 的任何一个元素都是有理数集 Q 的一个元素．

对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的**子集**，记作

$$A \subseteq B \text{（或 } B \supseteq A\text{）},$$

读作"A 包含于 B"（或"B 包含 A"）．例如

$$N \subseteq Z,\quad N \subseteq Q,\quad R \supseteq Z,\quad R \supseteq Q.$$

当 A 不是 B 的子集时，我们可以记作

$$A \nsubseteq B \text{（或 } B \nsupseteq A\text{）},$$

读作"A 不包含于 B"（或"B 不包含 A"）．

对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A 本身，所以

$$A \subseteq A,$$

也就是说，**任何一个集合是它本身的子集**．

为了方便起见，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作 $\varnothing$．例如：

$$\{x \mid x+1=x+3\}=\varnothing,$$

$$\{\text{小于零的正整数}\}=\varnothing,$$

$$\{\text{两边之和小于第三边的三角形}\}=\varnothing.$$

我们规定**空集是任何集合的子集**．也就是说，对于任何集合 A，有

$$\varnothing \subseteq A.$$

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作

$$A \subset B(\text{或 } B \supset A).$$

当 A 不是 B 的真子集时，我们可以记作

$$A \not\subset B(\text{或 } B \not\supset A).$$

例如，自然数集 N 是 N 的子集，但不是 N 的真子集，所以 $N \subseteq N$，但 $N \not\subset N$；N 是实数集 R 的子集，也是 R 的真子集，所以 $N \subset R$.

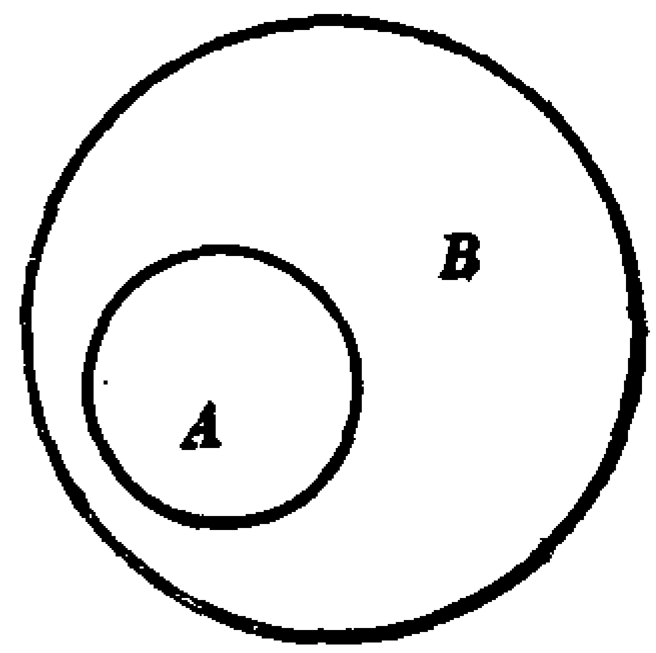


图 1-1

集合 B 同它的真子集 A 之间的关系，可以用图 1-1 中 B 同 A 的关系来说明，其中 A，B 两个圈的内部分别表示集合 A, B.

显然，空集是任何非空集合的真子集.

容易知道，**对于集合 A, B, C，如果 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$，那么 $A \subseteq C$.** 事实上，设 x 是集合 A 的任意一个元素，因为 $A \subseteq B$，所以 $x \in B$，又因为 $B \subseteq C$，所以 $x \in C$. 从而 $A \subseteq C$.

同样可知，**对于集合 A, B, C，如果 $A \subset B$, $B \subset C$，那么 $A \subset C$.**

对于两个集合 A 与 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，我们就说这两个**集合相等**，记作

$$A = B,$$

读作“A 等于 B”.

例如，$A = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$，$B = \{-1, -2\}$，则

$$A = B.$$

例 1 写出集合 $\{a, b\}$ 的所有的子集及真子集.

解: 集合$\{a, b\}$的所有的子集是$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, 其中$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$是真子集.

例 2 写出不等式$x-3>2$的解集并进行化简(即化成直接表明未知数本身的取值范围的解集).

解: 不等式$x-3>2$的解集是

$$\{x \mid x-3>2\}=\{x \mid x>5\}.$$

2. 交集

已知 6 的正约数的集合为

$$A=\{1, 2, 3, 6\},$$

10 的正约数的集合为

$$B=\{1, 2, 5, 10\},$$

那么 6 与 10 的正公约数的集合为

$$\{1, 2\}.$$

容易看出, 集合$\{1, 2\}$是由所有属于A且属于B的元素(即A, B的公共元素)所组成的.

一般地, 由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合, 叫做A, B的**交集**, 记作$A \cap B$(可读作"A交B"), 即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A, \text{ 且 } x \in B\}.$$

这样, 6 与 10 的正公约数的集合, 可以从求 6 的正约数的集合与 10 的正约数的集合的交集而得到, 即

$$\{1, 2, 3, 6\} \cap \{1, 2, 5, 10\}$$
$$=\{1, 2\}.$$

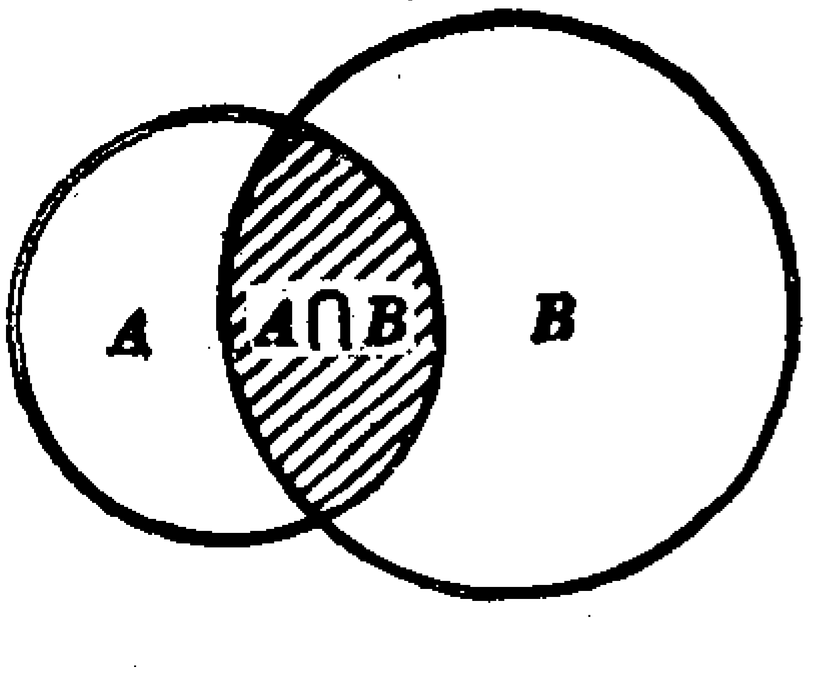


图 1-2

图 1-2 中的阴影部分，表示集合 A，B 的交集 $A\cap B$.

由交集定义容易推出，对于任何集合 A，B，有

$$\boldsymbol{A\cap A=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing,}$$

$$\boldsymbol{A\cap B=B\cap A.}$$

例 3 设 $A=\{x|x>-2\}$，$B=\{x|x<3\}$，求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=\{x|x>-2\}\cap\{x|x<3\}$

$=\{x|-2<x<3\}$.

例 4 设 $A=\{(x,\ y)|4x+y=6\}$，$B=\{(x,\ y)|3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=\{(x,y)|4x+y=6\}\cap\{(x,y)|3x+2y=7\}$

$$=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}4x+y=6,\\3x+2y=7\end{cases}\right\}$$

$=\{(1,2)\}$.

例 5 设 $A=\{$等腰三角形$\}$，$B=\{$直角三角形$\}$，求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=\{$等腰三角形$\}\cap\{$直角三角形$\}$

$=\{$有两边相等且有一个角是直角的三角形$\}$

$=\{$等腰直角三角形$\}$.

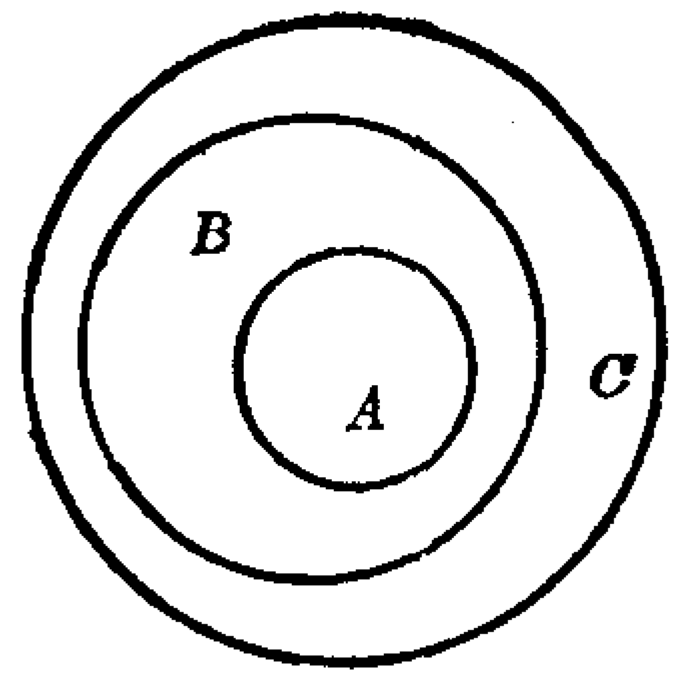
形如 $2n(n\in Z)$ 的整数叫做**偶数**，形如 $2n+1(n\in Z)$ 的整数叫做**奇数**. 全体奇数的集合简称**奇数集**，全体偶数的集合简称**偶数集**. 我们再看一个例子.

例 6 已知 A 为奇数集，B 为偶数集，Z 为整数集，求 $A\cap Z$, $B\cap Z$, $A\cap B$.

解: $A\cap Z=\{$奇数$\}\cap\{$整数$\}=\{$奇数$\}=A$,

$B\cap Z=\{$偶数$\}\cap\{$整数$\}=\{$偶数$\}=B$,

$$A\cap B=\{\text{奇数}\}\cap\{\text{偶数}\}=\varnothing.$$



（第 1 题）

练　习

1. 图中 A, B, C 表示集合，说明它们之间有什么包含关系.
2. 写出集合 $\{a,\ b,\ c\}$ 的所有子集及真子集.
3. 用适当的符号 $(\in, \notin, =, \supset, \subset)$ 填空：

   (1) a__$\{a\}$;　　(2) a__$\{a, b, c\}$;

   (3) d__$\{a, b, c\}$;　　(4) $\{a\}$__$\{a, b, c\}$;

   (5) $\{a, b\}$__$\{b, a\}$;　　(6) $\{3, 5\}$__$\{1, 3, 5, 7\}$;

   (7) $\{2, 4, 6, 8\}$__$\{2, 8\}$;　　(8) $\varnothing$__$\{1, 2, 3\}$.
4. 写出方程 $x+3=\frac{x}{2}-5$ 的解集并进行化简.
5. 写出方程组

$$\begin{cases}2x+3y=1,\\3x-2y=3\end{cases}$$

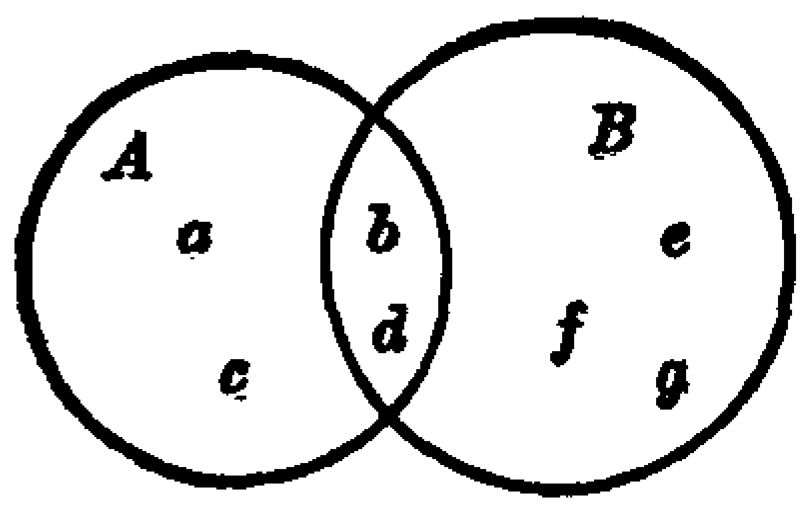
   的解集并进行化简.
6. 写出不等式 $3x+2<4x-1$ 的解集并进行化简.
7. 如图，设 $A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{b, d, e, f, g\}$.

   (1) 求 $A\cap B$，$B\cap A$;

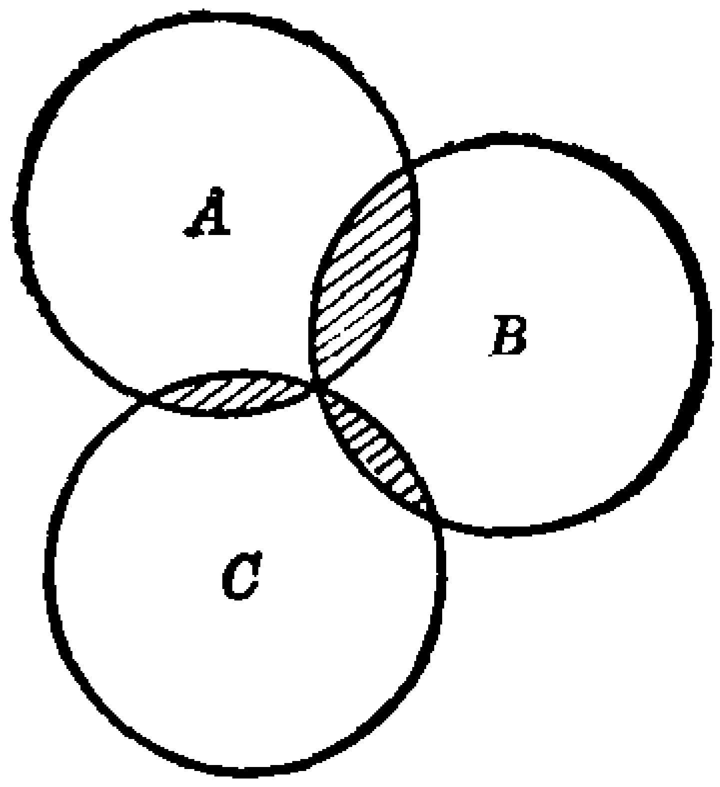
   (2) 用适当的符号 $(\supset, \subset, =)$ 填空：

   $A\cap B$__A,　　$A\cap B$__$B\cap A$,

   B__$A\cap B$,　　$\varnothing$__$B\cap A$.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 图中 A, B, C 表示集合，把各个阴影部分所表示的集合分别标出来，并用适当的符号表示它们同 A, B, C 之间的包含关系。

9. 设 $A=\{x|x<5\}, B=\{x|x\geqslant 0\}$，求 $A\cap B$.

10. 设 $A=\{(x, y)|\ 3x+2y=1\}$，$B=\{(x, y)|\ x-y=2\}$，$C=\{(x, y)|2x-2y=3\}$，$D=\{(x, y)|6x+4y=2\}$，求 $A\cap B, B\cap C, A\cap D$.

11. 设 $A=\{$锐角三角形$\}, B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A\cap B$.

12. 设 $A=\{x|x=2k,\quad k\in Z\}$，$B=\{x|x=2k+1,\quad k\in Z\}$，$C=\{x|x=2(k+1),\quad k\in Z\}$，$D=\{x|x=2k-1,\quad k\in Z\}$。问 A, B, C, D 中哪些集合相等，哪些集合的交集是空集.

3. 并集

已知方程 $x^2-4=0$ 的解集为

$$A=\{2, -2\},$$

方程 $x^2-1=0$ 的解集为

$$B=\{1, -1\},$$

那么方程

$$(x^2-4)(x^2-1)=0$$

的解集为

$$\{1, -1, 2, -2\}.$$

容易看出，集合 $\{1, -1, 2, -2\}$ 是由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的.

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A, B 的**并集**，记作 $A \cup B$（可读作"A 并 B"），即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A, \text{ 或 } x \in B\}.$$

这样，方程 $(x^2-4)(x^2-1)=0$ 的解集，可以从求方程 $x^2-4=0$ 的解集与方程 $x^2-1=0$ 的解集的并集而得到，即

$$\{2, -2\} \cup \{1, -1\}=\{1, -1, 2, -2\}.$$

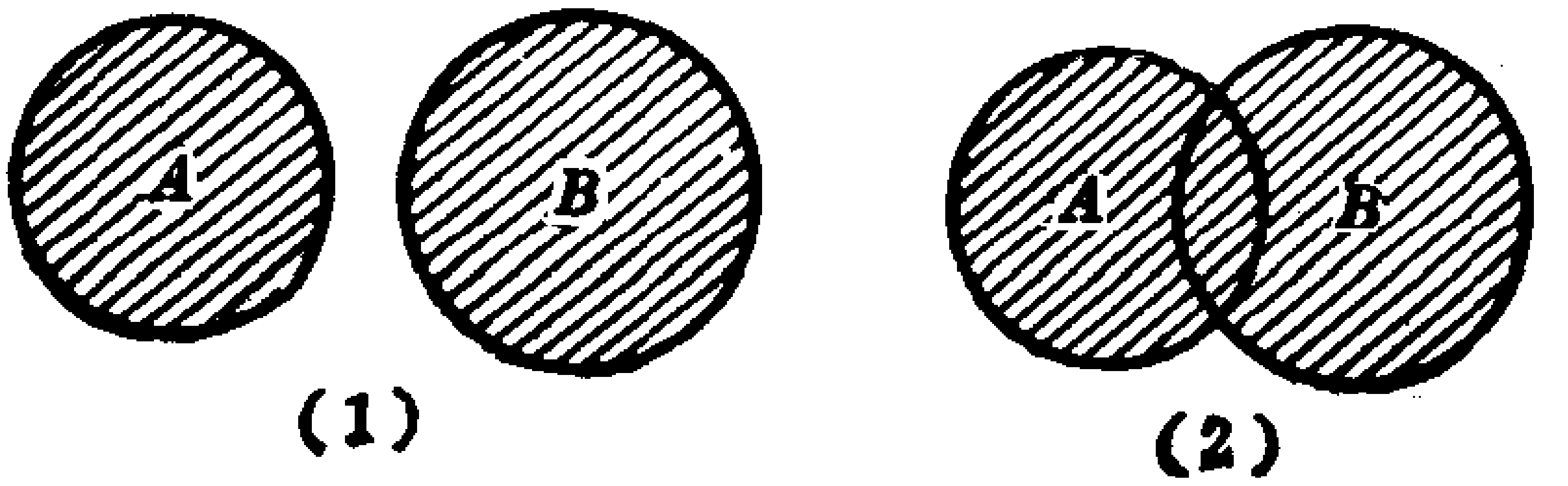


图 1-3

图 1-3 中的阴影部分，表示集合 A, B 的并集 $A \cup B$.

注意：我们已经知道，集合中的元素是没有重复现象的. 因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次. 例如，设 $A=\{3, 5, 6, 8\}$，$B=\{4, 5, 7, 8\}$，则 $A \cup B$ 应是 $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，而不是 $\{3, 5, 6, 8, 4, 5, 7, 8\}$.

由并集定义容易知道，对于任何集合 A, B，有

$$\boldsymbol{A \cup A=A, \quad A \cup \varnothing=A,}$$

$$\boldsymbol{A \cup B=B \cup A.}$$

例 7 设 $A=\{x|-1<x<2\}$, $B=\{x|1<x<3\}$，求 $A\cup B$。

解: $A\cup B=\{x|-1<x<2\}\cup\{x|1<x<3\}$

$=\{x|-1<x<3\}$.

例 8 设 $A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A\cup B$.

解: $A\cup B=\{$锐角三角形$\}\cup\{$钝角三角形$\}$

$=\{$锐角三角形，或钝角三角形$\}$

$=\{$斜三角形$\}$.

例 9 写出不等式 $x^2+x-6\geqslant0$ 的解集并进行化简.

解: 不等式 $x^2+x-6\geqslant0$ 的解集是

$$\{x|x^2+x-6\geqslant0\}=\{x|x\leqslant-3\}\cup\{x|x\geqslant2\}$$

$$=\{x|x\leqslant-3,\text{ 或 }x\geqslant2\}.$$

例 10 设 $A=\left\{x\middle|-4<x<-\frac{1}{2}\right\}$, $B=\{x|x\leqslant-4\}$,求 $A\cup B$, $A\cap B$.

解: $A\cup B=\left\{x\middle|-4<x<-\frac{1}{2}\right\}\cup\{x|x\leqslant-4\}$

$=\left\{x\middle|x<-\frac{1}{2}\right\}$,

$A\cap B=\left\{x\middle|-4<x<-\frac{1}{2}\right\}\cap\{x|x\leqslant-4\}$

$=\varnothing$.

例 11 已知 Q 为有理数集，Z 为整数集，求 $Q\cup Z$, $Q\cap Z$.

解: $Q\cup Z=\{$有理数$\}\cup\{$整数$\}=\{$有理数$\}=Q$,