交通系统中等专业学校试用教材

港口起重机结构力学

（港口装卸机械专业用）

大连海运学校 陈文郁 赵本诚编

人民交通出版社

交通系统中等专业学校试用教材

港口起重机结构力学

（港口装卸机械专业用）

大连海运学校　陈文郁　赵本诚编

人民交通出版社

内 容 提 要

本书为《港口起重机结构力学》课程的教材。全书共分七章，分别叙述港口起重机结构力学的任务及结构分类和计算简图；静定桁架和刚架的机动分析、内力和结构变位计算方法；超静定结构的三种基本解法，即力法、变位法和力矩分配法；空间桁架的计算；影响线的绘制方法和应用。

为了便于加深理解书中内容，每章均编有例题和习题。

本书为交通系统中等专业学校港口装卸机械专业试用教材，亦可供有关工程技术人员参考。

交通系统中等专业学校试用教材

港口起重机结构力学

（港口装卸机械专业用）

大连海运学校 陈文郁 赵本诚编

人民交通出版社出版

（北京市安定门外和平里）

北京市书刊出版业营业许可证出字第 006 号

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

人民交通出版社印刷厂印

开本：787×1092 1/16 印张：9.25 字数：219 千

1979年7月 第1版

1979年7月 第1版 第1次印刷

印数：0001—4800册 定价：0.77元

前　　言

本书系根据1978年3月交通部教育局在北京召开的水运中等专业学校教材编写会议所确定的编、审分工以及同年6月有关学校在上海共同讨论和审定的《港口起重机结构力学》教材编写大纲编写而成。

本书为交通系统中等专业学校港口装卸机械专业的统编试用教材。根据本专业的教学计划要求，本书着重叙述本课程的基本内容，至于其他有关知识，各校可酌情自行选编专题进行讲授。

本书由大连海运学校陈文郁编写第一、二、三章，赵本诚编写第四、五、六、七章；广西航运学校陆少毅主审。

本书在编写过程中曾得到各兄弟院校和有关单位的大力支持，并对初稿提出了许多宝贵意见，谨在此表示谢意。

由于我们水平有限，时间仓卒，本书又是第一次统编教材，经验缺乏，书中错误和不妥之处在所难免，恳切希望各校师生和广大读者批评指正。

编　者

1978年12月

目　　录

第一章　绪　　论

第一节　港口起重机结构力学的内容和任务

一、港口起重机结构力学的内容

工程技术中所指的结构是由许多单元件（杆件、板或壳等）所组成的用以承受各种载荷的整体。例如提取重物的起重机、冲破巨浪的船舶、划破长空的飞机、跨越河流的桥梁以及耸入云霄的楼房等。比较具体点来说，例如图 1-1 所示的岸边集装箱起重机，它的金属结构是由两根主梁和两个支腿所组成，而主梁和支腿本身，也可以说是由杆件和板所组成的结构物；图 1-2 所示门座起重机的门架和臂架也是由杆件和板所组成的结构物。

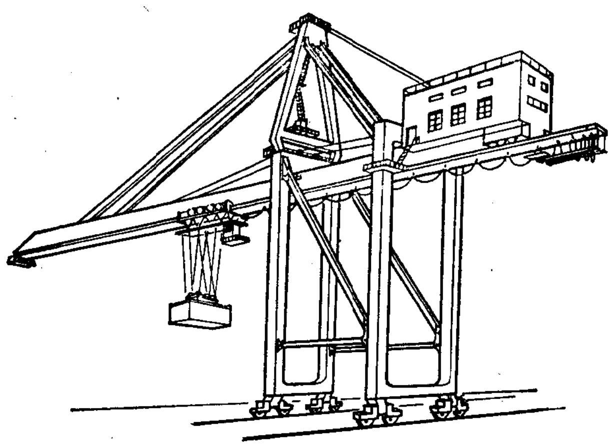

图　1-1

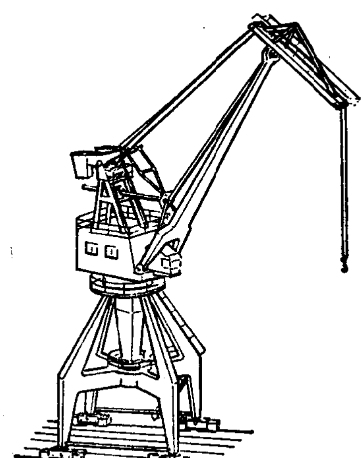

图　1-2

上述结构在工作时，由于载荷的作用或其他因素的影响，可能由于强度和稳定性不够而被毁坏，也可能由于刚度不够而产生过大的变形，致使结构容易产生振动或不能满足使用的需要。为了避免发生上述情况，需采用较大的截面尺寸和较好的材料，以保证结构的安全；但过于安全又会造成经济上的不合理。结构力学是解决这个矛盾的一门基础学科。

因此广义的结构力学的内容，是研究结构在载荷或其他因素影响下的强度、刚度和稳定性的一般原理和计算方法。广义的结构力学一般又分为四门课程，即材料力学、狭义的结构力学、弹性理论和塑性理论。材料力学研究的对象是单个的杆件，而狭义的结构力学研究的对象是由许多单元件组合而成的结构；这两门课程都用较简单的数学解决问题。而弹性理论是研究严格的准确的解答，并解决前两门课程所不能解决的问题，因而不得不采用较难的数学工具。实际上，随着科学的不断的发展，这三门课程难于严格划分。至于塑性理论，则是研究塑性体的变形和内力，但它的研究结果也常被材料力学和狭义的结构力学所采用。本书

所讲的只是狭义的结构力学。

结构力学的各个分支是由于对象即结构物的不同而形成的。例如随着建造房屋桥梁的建筑业、船舶制造业、飞机制造业等的发展，在结构力学分支中，先后出现了建筑结构力学、船舶结构力学和飞机结构力学等。不同的结构力学分支的研究对象是不同的。起重机结构力学的研究对象主要是起重机中结构计算理论问题。所以港口起重机结构力学的内容，就是研究港口起重机金属结构在载荷或其他因素影响下，内力和变形的分析与计算方法。

二、起重机结构力学的任务

为了从根本上说明起重机结构力学的任务，必须首先了解在人的实践过程中，生产是怎样向起重机结构力学提出问题的。我们知道，起重机结构力学研究的对象，是由各种不同的材料所制成并处于各种各样受力状态的工程结构；因此只有从一些工程结构的实际考察中，才能发现问题的所在，才能具体地说明问题。

首先，为了保证人民生命财产的绝对安全，对任何一个结构物的基本要求，应该是在一切可能预见的载荷作用下，在其整个使用时期，避免一切事故和灾害。因此，对于图 1-1 所示岸边集装箱起重机主梁结构来说，当它受到一系列载荷作用时，我们首先想到的，必然是内力在其中的分布以及结构各部尺寸能否安全承受此项内力的问题，也就是它的强度问题。另一方面，不管是从运用（如吊升货物），还是从避免结构本身发生危险（如引起强烈的振动）来说，结构变位的数值过大无论如何是不能容许的。这说明继强度问题之后，我们必然也要想到主梁结构的刚度问题。再看图 1-2 所示门座起重机的臂架，当吊升货物时，它受到一个轴向压力。如果吊升的货物过重，臂架的截面尺寸较小或板比较薄，则臂架原来的形状可能变化，而以一种新的曲线形式达到平衡或者折断。这种不稳定平衡状态的出现，就保证门座起重机的充分安全来说，是应该设法予以避免的。为此，在考虑一个结构物的强度和刚度的同时，就不可能不想到它的稳定性问题。所以，起重机结构力学的第一个任务，就是要解决结构的强度、刚度和稳定性问题。

以上是从避免人民生命财产的损失，保证结构物的绝对安全这一观点出发，提出起重机结构力学首要任务的，但这只是问题的一个方面。另一方面，为了节约资金，加速社会主义建设，尽早实现四个现代化，设计任何一个起重机结构物时，不仅应该保证它在整个使用时期的坚固性和持久性，同时还应考虑到它的最大经济问题。说得具体些，就是要使得结构各部分没有多余的尺寸，使得任何一部分的材料都能发挥它的最大潜力，同时还要考虑到施工工艺的方便。要做到这一点，就必须按照受力的具体情况和材料的物理力学性质，考虑工艺的经济性，为结构选择充分合理的形式和形状。因此，起重机结构力学的第二个任务，就是要从最大经济的观点出发，研究适应各种受力情况和不同材料的起重机结构的合理形式和形状，亦即研究结构物的合理化。

此外，工程结构中，除了极少数比较简单的（如独立工作的杆、梁、柱等）以外，绝大多数都是由若干构件通过一定的连接方式组合而成的一个完整体系。这个体系本身的结构如何，是我们极为关心的问题，因为这个问题直接关系着结构有无存在的价值。例如实践表明，图 1-3 所示的两个简单结构，在相同的载荷作用下会得到完全不同的结果：一个几何形状没有改变（图1-3a），而另一个则已由矩形变成了平行四边形（图1-3b）。这说明前者的结构是稳定的，后者则具有不稳定的结构。于是人们不禁要问：同样是由杆件通过铰接而成的两个杆件体系，为什么一个结构稳定、而另一个结构不稳定呢？说得明确些，结构稳定的

杆件体系究竟应具备什么样的组成规律或组成法则呢？起重机结构力学的第三个任务，就是要探寻出起重机结构几何组成的一般规律，保证它在各种不同的外力作用下，都能够处于稳定的平衡状态中。

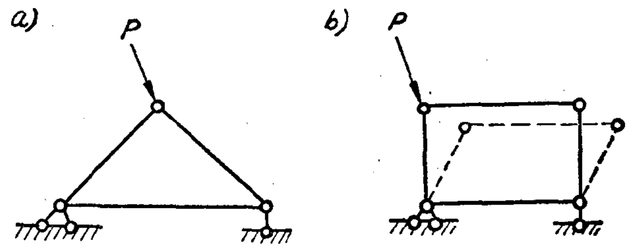

图 1-3

本书只讨论起重机杆件结构（由杆件组成的结构）的静力计算问题。对于结构的动力计算、薄壁结构（板和壳）的力学分析、有限单元法、电子数字计算机在结构力学中的应用以及其他结构力学的专门问题，本书未作讨论。至于结构构件截面的应力分析和强度设计以及构造设计，则是起重机金属结构加以研究的内容。

起重机结构力学是继理论力学、材料力学以后的一门技术基础课，它为学习起重机金属结构奠定基础。

作为一个港口机械的技术干部，首先必须了解起重机及其设备的性能，才能很好地管理、使用、保养和修理。要了解其性能，必须通晓其设计原理，其中也包括金属结构设计原理，为此学习结构力学就成为必要的了。

其次，在港口机械设备中，也会出现改建和校核的工作，更会因技术革新而出现小型的设计工作，其中包括金属结构的设计。因此，必须掌握一定的金属结构设计能力，才能适应工作的需要，而学习结构力学则更为必要。

第二节　结构分类、支座和计算简图

一、结构分类

结构的分类方法很多，其中主要的是按组成结构的单元体形状、杆件连接的情况以及外载荷与结构在空间的相互位置等三种。现分别叙述如下。

1.按单元体形状

按单元体形状可分为下列三种：

1)杆件结构（或称格式结构）　这种结构是由许多杆件组合而成，而每一杆件的特点是高度、宽度小，长度很大（B、$h \ll l$），如图1-4a)所示。杆件本身既可以是一般的型钢，也可以是薄壁结构。新近发展的箱形结构也被当作杆件计算。

2)薄壁结构　这种结构单元体的特点，是宽度、长度很大，而厚度很小（$\delta \ll B$、l），如薄板、薄壳和薄壁杆件，见图1-4b)。例如上海交通大学与立新造船厂联合设计制造的980千牛顿（100吨）门座起重机的臂架，就是用厚度为6毫米的薄钢板作成的箱形断面薄壁结构。这种结构如能在起重机金属结构中推广采用，将有十分重大的价值。

3)实体结构　这种结构的主要特点是，长、宽、高三者有同级度量的结构($B \approx h \approx l$)，例如建筑物的地基、河流上的重力坝等。这种结构在起重机金属结构中几乎没有得到采用。

2.按杆件连接的情况

按杆件连接的情况也可分为三类：

1)铰接结构　两个或多个杆件相联接的点称为结点。假定结构中所有结点都是圆柱形

理想铰接的，杆件只受轴向力，则称此种结构为铰接结构，如图1-5a)所示为29.4kN(3吨)电动浮式起重机的臂架结构。

2)刚接结构　结构的结点都是刚性的，交于结点处的杆件不能有相对位移，也不能发生相对转动，如图1-5b)所示的刚架结构，其各杆之间原来的夹角必须保持不变。因此，在外载荷作用下，刚架一般产生弯矩、剪力和轴力，其中以弯矩为主。

3)混合结构　结构的结点既有铰接，也有刚接。铰接的杆只受轴向力，刚接的杆件则同时受有弯矩、剪力和轴力的作用，如图1-5c)所示混合结构的147千牛顿(15吨)浮式起重机的臂架。

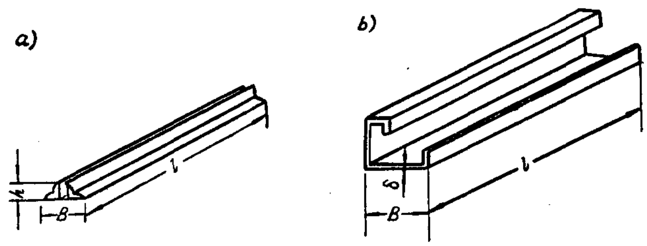

图 1-4

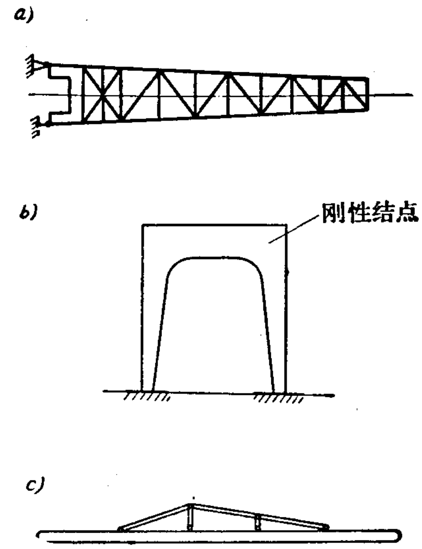

图 1-5

3.按外载荷与结构在空间的相互位置

按外载荷与结构在空间的相互位置可分为两类：

1)平面结构　如作用载荷和结构所有组成杆件的轴线均在同一平面内，即结构的分析计算只按照平面力系来进行的，则称为平面结构，例如图1-5所示均属于平面结构。

2)空间结构　如作用载荷和结构的组成杆件的轴线不在同一平面内，此时结构的分析计算要按空间力系来进行，则称为空间结构。图1-6所示为空间门架结构。

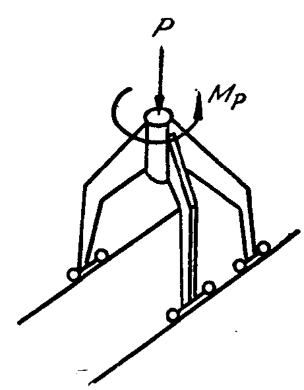

图 1-6

二、支座分类

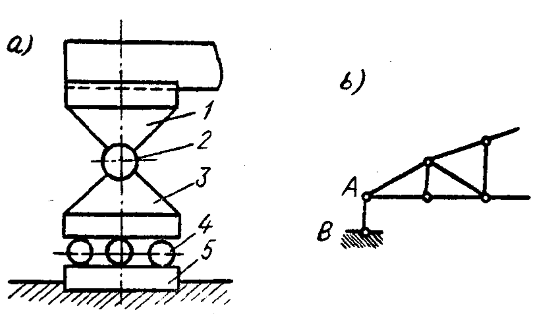

图 1-7

1-上铰臂；2-铰；3-下铰臂；4-辊轴；5-承板

任何结构都必须设置适当的支座，以保持其稳定，并把结构上的载荷传递到支承部分上去。结构与支承的连接部分称为支座，常用的支座一般可分为三类。

1.活动铰支座(简称活动铰)

如图1-7a)所示，它可以使结构绕铰回转，也可以沿承板的支承面移动。图1-7b)为其简图，它只有一个沿支承链杆方向的反力。

2.固定铰支座(简称固定铰)

如图1-8a)所示，其下铰臂是固定而不能

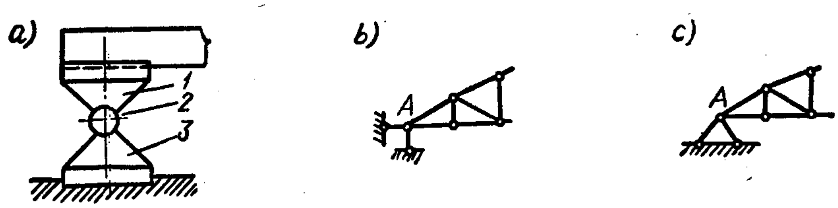

图 1-8
1-上铰臂；2-铰；3-下铰臂

移动的，只能绕铰回转。图中b)和c)为其计算简图，其反力必须通过铰点A而方向未定。图1-9所示为一重型金属柱下支承，它是固定铰的一例。

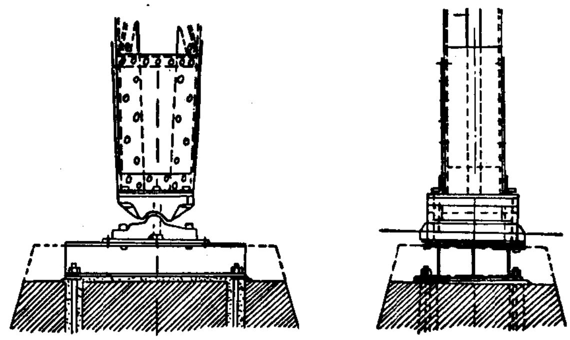

图 1-9

3.固定支座

图1-10a)所示为一常见的固定支座，它不允许有任何移动和转动，未知反力为一个反力矩和一个大小和方向未定的反力。支承简图示于图1-10b)、c)。

图1-11所示为一重型柱子的下支承的一例。

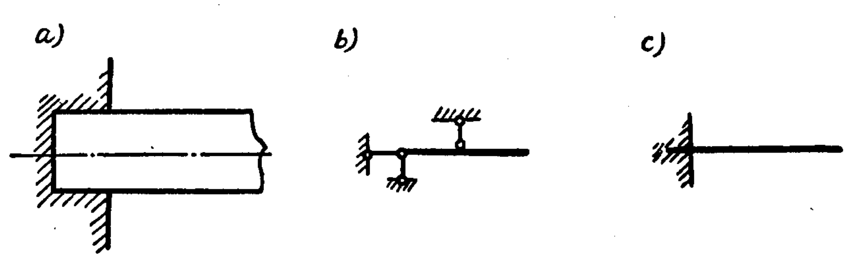

图 1-10

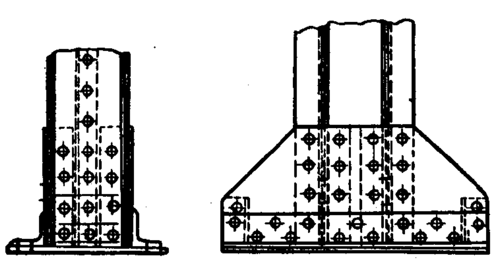

图 1-11

三、计算简图

计算简图是进行结构计算时用以代表实际结构经过简化的模型。就目前的科学水平来说，要想严格按照结构（特别是较为复杂的结构）所有各部分的相互作用进行完全精确的分析，几乎是不可能的，即使可能，其艰巨程度也将丧失工程上的实用价值。因此，对实际结构进行力学计算以前，必须先加以简化，略去不重要的细节，表现其基本特点，用一个简化的图形代替实际结构。根据抓主要矛盾的方法，确定计算简图应满足两个基本要求：

1.从结构本身的工作情况来说，在忽略一些次要因素以后，它应该能正确地反映问题的本质；

2.从计算工作量来说，应尽可能地简化。

前面已将结构的某些部分进行了简化，如杆件和支座等。又如图1-12a)所示为一桥式起

重机，而图1-12b)为其计算简图。桁架的每一根杆件，都以代表其几何轴线的直线代替，所有的轴线都认为完全在同一平面内。组成桁架结点的各杆件，认为都严格地汇集于结点。各杆件相互的连接都假定为理想铰接。右方的固定铰支座和左方的活动铰支座都认为是理想的铰结点，摩擦阻力被完全忽略不计。采取所有这些假定，就构成了图1-12b)上桥架的计算简图。

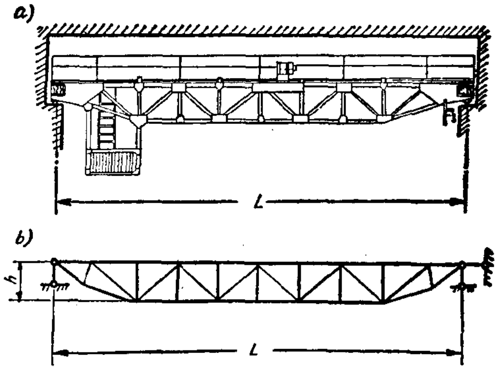

图 1-12

如果放弃这些简化办法中的任何一部分，或代以比较仔细的简化办法，则可得到比较精细确切的计算简图，可是这样就会使整个计算要复杂得多。

各种不同的结构可以选定适合于各自特点的计算简图。

四、载　荷

作用在结构上的载荷，按其性质可以作不同的分类。如果按它们在结构上的分布情况，则可分为：

1.集中载荷　如轮压。

2.分布载荷　它又可分为均布载荷和非均布载荷两种，如自重等。

如果按载荷作用随时间变化的情况，则可分为：

1.静载荷　载荷的位置、大小和方向不随时间的变化而改变。

2.动载荷　载荷的位置、大小和方向之一随时间的变化而改变。如装卸桥的小车轮压。

应该指出，除了外载荷会使结构产生内力以外，在超静定结构中，其他因素也会引起结构内力，如温度变化、支座沉陷、预加拉力等。

第二章　平面结构的机动分析

第一节　机动分析的目的

任何平面结构在外力作用下都会产生变形。这种变形有两种情况：一种是由于材料的弹性，当结构受力作用后，各杆发生伸长、缩短和弯曲的变形，从而引起整个结构尺寸和形状的改变，见图 2-1。但这种变形非常微小，并不引起结构形状显著的变化。若略去这种微小变形不计，可认为结构的几何形状是不变的，因此这种结构为几何稳定（不变）结构。另一种是由于结构中各杆件组合得不好，在外力作用下不能保持其一定的几何形状，如图 2-2 所示的结构，在外力作用下，由矩形可改变成任意的平行四边形。也就是说，即使略去材料的弹性变形不计，结构的形状也发生了显著的变化，因此称这种结构为几何不稳定（可变）结构。此外，不但结构本身的组织是几何稳定的，同时它与支承部分的联系也需要是几何稳定的，这样才能承受外载荷的作用。前者内部组织的几何不变性亦称为结构的内部稳定性；而

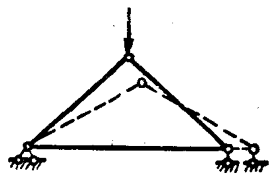

图 2-1

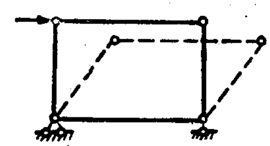

图 2-2

后者则属于结构的外部稳定性。

根据使用要求，在工程结构中仅能采用几何不变的结构；相反，机械上的运动机构应该采用可动部分组成的几何可变的机构。我们研究的工程结构当然不能是几何可变的，因为只有几何不变的结构才能作为工程结构，用静力学方法计算的结果才有实际意义。所以在研究结构的强度、刚度和稳定性以前，必须保证结构是几何不变的。判断结构是否几何不变，仅凭经验往往不可靠，而且当结构复杂时也不可能，因而需用科学的方法对结构的构造进行分析，这种分析的过程称作机动分析。分析的目的有二：1.判别一个已知结构在任何载荷作用下是否能保持其几何不变的能力；2.保证组成的新型结构物是几何不变结构。此外，通过分析还可了解结构的各个部分及其在承担载荷时所起的作用，那一部分是基本的，那一部分是附属的，从而便于进行静力分析。

在进行机动分析以前，必须弄清下述两个概念：1.盘体——一个物体或者结构的某一部分，如果能够断定是几何不变的，我们就称它为盘体。凡是结构中的杆件、结构中某一几何不变部分、整个几何不变的结构或地基，均可作为盘体。2.链杆——凡只用两铰和其他部分相联接的盘体，不论它的形状如何，都可当作链杆。被联接的其他部分，可以是两个盘体，也可以一个是盘体，另一个是地基。

第二节　平面结构的自由度

判断结构是否几何不变，首先要计算其自由度。笼统地说，平面结构的自由度就是盘体在平面内可以自由运动的程度。

结构是由许多结点和盘体所组成，因此首先研究结点和盘体在平面中的自由度。

图2-3表示平面内一点从 A 的位置改变至 A'。一点在平面内可以沿水平方向（x 轴方向）移动，又可以沿竖直方向（y 轴方向）移动。换句话说，平面内一点有两种独立运动方式(有两个独立的坐标 x、y 可以改变)，只有确定了它的两个坐标 x 和 y，才能确定它的位置，所以我们称之为有两个自由度。

图 2-4 表示平面内一个盘体由原来的位置 AB 改变到位置 $A'B'$。我们知道，一个盘体

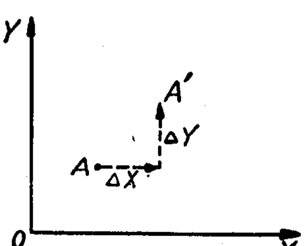

图 2-3

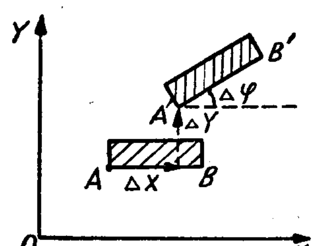

图 2-4

在平面内的任何运动，总可以分解为移动和转动。同时，任何移动又可以分解为两个互相垂直方向上的独立位移。这个盘体可以有 x 轴方向的移动(Δx)，y 轴方向的移动(Δy)，还可以有转动（$\Delta\varphi$）。因为一个盘体在平面内有三种独立的运动方式，只有确定了盘体上任一点的两个坐标 x、y 和盘体上任一直线 $A'B'$ 的倾角 $\Delta\varphi$，才能确定盘体的位置，所以该盘体有三个自由度。

一般说来，如果一个体系有 n 个独立的运动方式，我们就说这个体系有 n 个自由度。换句话说，一个体系的自由度，等于这个体系运动时可以独立改变的坐标数目。

一般工程结构都是几何不变体系，其自由度为零或小于零。凡是自由度大于零的体系都是几何可变体系。

结构中的结点和盘体是用链杆或铰联接而成，通过它们的作用可使结点和盘体的位置固定下来，从而减少结点和盘体的自由度。要想减少盘体的自由度，最简单的方法是用链杆把它与基础或别的支承体联接起来。如图 2-5 所示的盘体，若用一个链杆将它与地基（或另一个盘体）联接起来，那么盘体就失去沿着链杆方向的移动自由，而只有沿着垂直于链杆方向的移动自由和转动自由。又如图 2-6 所示的盘体，因为它既不能沿着水平方向移动，又不能沿着竖直方向移动，最后只剩下一个转动自由。可见，在二盘体间加一个链杆就能减少一个自由度，也可以说一个链杆算一个约束。

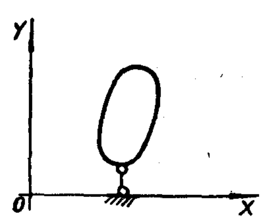

图 2-5

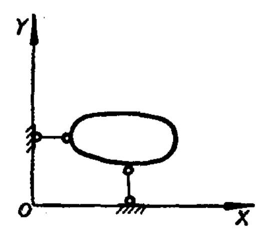

图 2-6

一个由杆件组成的结构，通常总离不开铰。图 2-7 中的盘体本有三个自由度，若用一个单铰与地基联接起来，则只剩下一个转动自由。图 2-8 所示的两个盘体Ⅰ和Ⅱ，在彼此不相关的时候，它们的自由度总数为 6 。如用一个单铰把它们联结起来，则当盘体Ⅰ保留三个自由度时，盘体Ⅱ就失去两个移动自由度，仅有一个转动自由。因此两个盘体的自由度总数变为 4 (= 6 − 2)。设有三个盘体Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ，当它们彼此分离时，其自由度总数应为 9 。如果用两个单铰把它们两两相联（图2-9），则盘体Ⅰ保留三个自由度时，盘体Ⅱ和Ⅲ就会因此失去移动自由，仅保有各自的转动自由。于是三个盘体的自由度总数变为 5 (= 9 − 2 × 2)。因此，我们不难得出一个结论：一个单铰减少盘体的两个自由度。就减少自由度的作用而言，一个单铰相当于两根链杆，算两个约束。

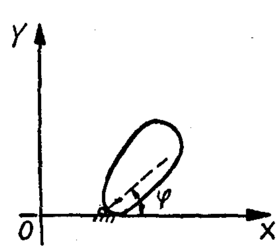

图 2-7

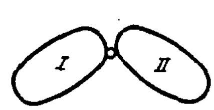

图 2-8

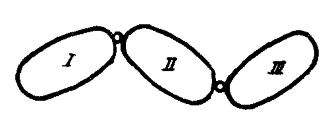

图 2-9

联接两个盘体的铰称为单铰（图2-10），联接两个以上盘体的铰称为复铰（图2-11）。计算复铰的约束数，与单铰不同，不能仅算作两个约束。如果三个盘体不像图 2-9 所示的那样用两个单铰两两相联，而用一个复铰联结在一起（图2-12），则当盘体Ⅰ保留三个自由度

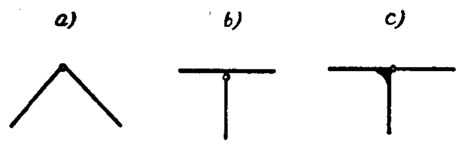

图 2-10

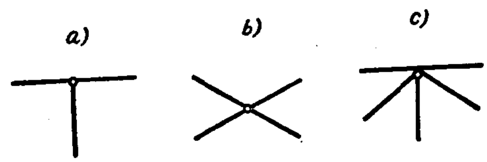

图 2-11

时，盘体Ⅱ和盘体Ⅲ就只能各有一个转动自由，因而总的自由度仍等于 $5(=9-2\times2)$,这与两个单铰的作用完全相同。再如图2-13所示的四个盘体，在彼此分离互不相关时，其自由度总数为12，但用一个复铰联接起来以后只有 6 个$(=12-3\times2)$自由度，这恰是四个盘体用三个单铰两两相联后的自由度数。由此可见，如果有一个复铰联接 G 个盘体，盘体原有 $3G$ 个自由度，用复铰联接后的自由度是 $2+G(x、y、\varphi_1、\varphi_2\cdots\cdots\varphi_g)$，即每个盘体有转动自由，联接后新盘体有移动自由，减少的自由度是 $3G-(2+G)=2G-2$ 个。一个联接 G 个盘体的复铰，相当于 $2G-2$ 个约束。一个单铰相当于两个约束，因此这个复铰折合成 $(2G-2)\div2=G-1$ 个单铰。算式中的 G 是复铰连接的盘体数。

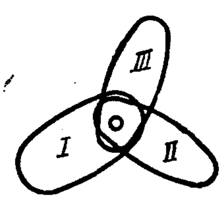

图 2-12

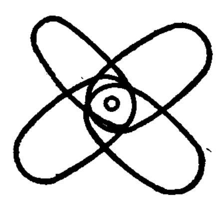

图 2-13

此外还须注意计算简图上的完全铰（图2-10a、图2-11a、b）和不完全铰（图2-10b、c、图2-11c），应正确地计算其相应单铰的数目，代入公式以计算其自由度。

综合以上所述，任何结构的自由度不难按下列方法求出：设在一个结构中含有 G 个盘体、D 个单铰和 Z 个盘体与地基连接的链杆。如果各个盘体之间毫无联系，则此结构的自由度总数为 $3G$，但因一个单铰减少两个自由度，一根链杆减少一个自由度，所以结构的自由度总数 W 应为：

$$W=3G-2D-Z \qquad (2\text{-}1)$$

式中：G——组成结构的盘体数；

D——联接各盘体的单铰数；

Z——盘体与地基间的链杆数。

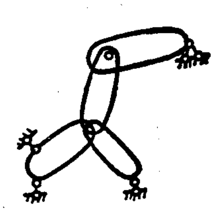

图 2-14

在计算结构的自由度时，必须先明确地定出哪些是组成结构的盘体，哪些是联接这些盘体的铰，哪些是链杆。因为将复铰换算成单铰要决定于它所联接的盘体数，而同盘体与地基间的联接链杆(Z)无关，所以计算前分清盘体和链杆十分重要。

当体系不联于基础，即支坐链杆不存在时，可把体系的自由度分为两部分：

1.结构整体运动的自由度，其数值等于3，又称外部自由度。

2.结构内部各构件的相对运动自由度，称为内部自由度，用V表示，即

$$V=3G-2D-3$$

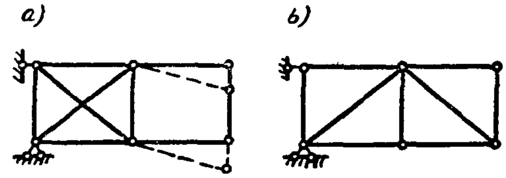

图 2-15

例题1　计算图2-14所示结构的自由度。

解：　$\because \quad G=4$

又图中有一个单铰和一个联接三个盘体的复铰。这个联接三个盘体的复铰等于$(n-1)$个单铰，即(3-1)个单铰。于是

$$D=1+(3-1)=3$$

有五个盘体与地基相连的链杆，即

$$Z=5$$

$$\therefore \quad W=3G-2D-Z=3\times4-2\times3-5=1>0$$

也就是说，结构有一个自由度，还需要一个约束才能确定其位置，因而结构是几何可变的。我们还可以用另一种观点来分析：由于链杆也是盘体，因此可把结构看作是由包括链杆在内的盘体所组成，而结构与基础间是用铰联接（一个铰相当于两个链杆）。现按这一观点来计算此结构的自由度。

$$\because \quad G=9,\ D=4+2(3-1)=8,\ Z=5\times2=10$$

$$\therefore \quad W=3G-2D-Z=3\times9-2\times8-10=1$$

可见，按这种观点的计算结果与按前一种观点所计算的结果完全相同。

例题2　计算图2-15a)所示结构的自由度。

解：　$\because \quad G=9,\ D=12,\ Z=3$

$$\therefore \quad W=3\times9-2\times12-3=0$$

结构的自由度为零，也就是说，结构已有足够的约束；但却不能肯定结构是否几何不变，因为从图2-15a)中可明显地看出桁架的右面部分是几何可变的。若将桁架左面部分的中间某一链杆调整到右面部分（图2-15b)，结构就成为几何不变了。

由以上二例可知，当$W>0$时，约束就不够，可以肯定几何可变；当$W\leqslant0$时，只说明对整个结构来说有了足够或者多余的约束，但还不知道结构的约束安排得是否合理，因此仍不能肯定结构是否几何不变，还得作进一步的分析。

第三节　几何不变结构的组成规律

从前节例题的讨论中可知，如果结构中的杆件因为安排不恰当，使得一部分结构具有多余的约束而另一部分却不够，则结构仍然是几何可变的，因而不能承受载荷。所以$W\leqslant0$只是几何不变的必要条件，并不一定是充分条件，还须进一步研究结构的几何组成规律。下面叙述三种简单的也是基本的组成规律。

一、两个盘体联结的方式

图2-16a)示出一梁，用AB、CD两个链杆联于基础。由于链杆的约束，A点的微小位移与AB垂直，C点的微小位移与CD垂直。以O表示AB与CD的交点。显然，梁可以发生

以 O 为中心的微小转动。O 点成为瞬时转动中心，其作用相当于一个铰。随着梁的转动，转动中心 O 的位置也在改变。总之，这个体系是几何可变的。

如图2-16b)所示，如果再加一个链杆 EF，它不通过 O 点，由于这个链杆的约束，E 点的微小位移必须与 EF 垂直，这就不合绕 O 点转动的条件，从而消除了梁绕 O 点转动的可能性。这样梁的位置就完全固定了，体系是几何不变的。

图2-16c)示出三个链杆同交于一点的情况。梁可以绕交点 O 有微小的转动，一般说来，转动发生后，三杆将不再交于一点。因此，图2-16c)所示的情况属于瞬变体系。

图2-16d)示出三链杆互相平行的情况。梁可以有水平位移，体系是几何可变的。

在图 2-16e)中，1、2、4 三个链杆已经足以把梁的位置完全固定，因此体系是几何不变的，链杆 3 是多余的联系。

在图2-16中，梁和地基代表两个盘体，由此，我们得到的规律如下：

规律 1　两个盘体用不平行也不相交于一点的三个链杆联结在一起，就成为几何不变的盘体，并且没有多余的联系。

如图2-17a)所示，Ⅰ、Ⅱ两个盘体由铰 C 和链杆 AB 联结，就形成几何不变的盘体而没有多余的联系。铰 C 实际上相当于交点在 C 的两个相交的链杆，见图 2-17b)。所以上述规律也可以这样说：

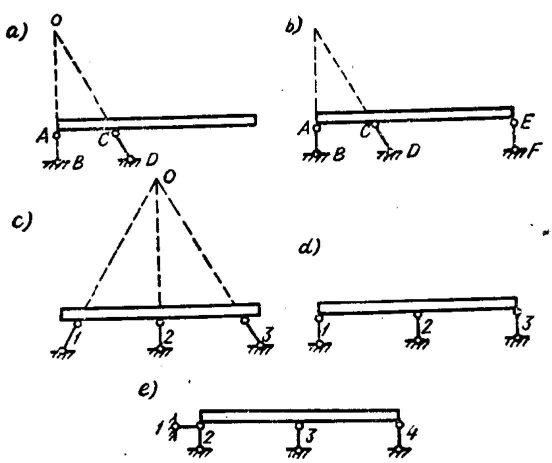

图　2-16

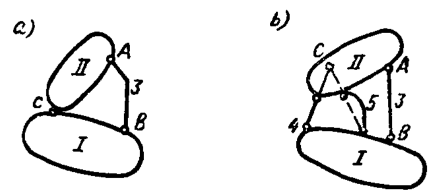

图　2-17

规律 2　两个盘体用一个铰和轴线不通过此铰的一个链杆联结，就成为几何不变的盘体，并且没有多余的联系。

二、三盘体联结的方式

在图2-17a)中，我们可以把链杆 AB 看成盘体Ⅲ。由此可知，三个盘体Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ用不在同一直线上的三个铰 A、B、C 相联结，就成为几何不变的盘体。又从几何学知道，一定长度的直线 AB、BC、CA 可组成一个唯一的，也就是几何不变的三角形，见图 2-18。这样，由上述规律可以得到下述规律：

规律 3　三个盘体用不在同一直线上的三个铰互相联结，就组成几何不变的盘体，并且没有多余的联系。

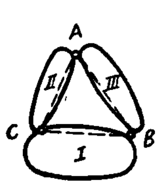

图　2-18

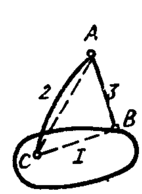

图　2-19