SHUXUEFENXISHUXUEFENXISHU

XUEFENXI

〔苏〕 A．П．卡尔塔谢夫
Б．Л．罗吉斯特维斯基 著

数学分析

曹之江 倪星堂 译

内蒙古大学出版社

数学分析

[苏] A.П 卡尔塔谢夫

内蒙古大学出版社

高等学校教学参考书

数 学 分 析

[苏]А. П. 卡尔塔谢夫
Б. Л. 罗吉斯特维斯基 著
曹之江 倪星棠 译

*

内蒙古大学出版社出版发行
内蒙古新华书店经销
内蒙古蒙文印刷厂印刷

*

开本 850×1168/32 印张 15.875 字数 288 千
1991 年 7 月第 1 版 1991 年 8 月第 1 次印刷
印数 1—1000 册
ISBN 7—81015—225—4/O·18
定价：6.80 元

本书系根据苏联科学出版社(Издательство《Наука》)出版的阿·波·卡尔塔谢夫，伯·勒·罗吉斯特维斯基(Картанев А. П., Рождественский Б. Л)所著《数学分析》(Матемтический анализ)1984年第一版译出．可供我国高等院校理工科师生参考．

译者前言

本书系经北京大学黄敦教授及国家教委理科高等数学教材编审组组长冷生明教授的推荐而组译的。它是本书作者在莫斯科大学物理系、莫斯科工程物理学院及莫斯科物理技术学院多年执教的基础上总结写成，出版后受到了苏联高教界的普遍推崇，被认为是当前崭现的供苏联理工院校使用的一册有较高水平和鲜明特色的优秀教材。

苏联的理工大学对基础理论教育的重视有悠久的历史和传统，这是人所共知的。它的高等数学课程教材所具有的系统性、严谨性与学术上的先进性在国际学术界持有很高的声誉，许多教材被译成多种文字，受到各国教师和学生的欢迎。我国读者在五十年代，对苏联的大学数学教材，也曾十分熟悉，并从中获取了很大教益。但近三十年来，我们在这方面同苏联的交流很少，然而正是在这段时间里，苏联各类高等数学教材，有了长足的发展，这是国内读者所鲜知、但无疑也是关心和感兴趣的。

本书译出的目的，就是想为国内从事理工科高等数学教学的广大师生与读者，介绍一册当今有代表性的优秀苏联教材。综读全书，我们确实感到本书不仅具有苏联教材的系统、严谨、先进、简明等传统优点，而且在课程结构、内容取舍、教学方法、讲授风格等方面，均不尽同于传统的教材，表现出自己鲜明的特色与优点，从而具有较大的参考价值。因此，本译书的问世，相信能使国内综合大学理科及工科的广大师生与读者有所获益，在高等数学的教学、教学改革与教材建设方面起到借鉴作用。

由于译者水平所限，译文中不当与差错之处在所难免，尚望各界读者不吝批评指正。译者对于高教出版社郑洪深同志及内蒙

古工学院王忠同志分别在译文及清样的校阅上给予的帮助，表示衷心的感谢。

1991.11.

序

本书是为高等工业院校的大学生编写的教学用书，书中阐述了这类院校的学生应当学习的关于数学分析的全部课题。

作者在本书的编写中，依据了自己在莫斯科大学物理系，莫斯科工程物理学院和莫斯科物理技术学院多年教学的经验．本教材同时也继承和发扬了罗吉斯特维斯基的《数学分析讲义》(莫斯科，科学出版社，1972 年)一书中的教学方法。

作者在编写中力图作到叙述简明，使广大读者易于接受。本书对于数学分析课程的结构、讲述的风格及材料的安排等方面，在编写上不尽同于传统的教材。例如：序列的理论与级数的理论并列讲述；同步地引入了导数、定积分与不定积分等概念，并对它们的性质综合起来讲述；引进并论述了两类定积分—牛顿积分(原函数的增量)和黎曼积分；在多元函数部分，讲述也采用了若干新方式。这些与传统不同的作法之所以可取，在于：首先，它使得全书的叙述具有更强的逻辑上的严整性，并避免了重复；第二，它使得大学生能够较早地获得在物理学与许多工程学科的学习中必须用到的数学分析知识；最后，这样的叙述方式还极大地简缩了教材的篇幅。

在教学中及本书的编写过程中，作者有幸能与许多同事和朋友就数学分析中的种种问题进行了深入的切磋，并得到他们许多宝贵的建议。作者首先对莫斯科工程物理学院应用数学物理和高等数学教研室的同事们表示衷心的感谢，作者同时也对苏联科学院凯尔迪什工程数学研究所的同事们表示同样的感谢。

作者特别要感谢瓦西里柯夫教授在本书编写中所提供的许多宝贵的建议和帮助。

А. П. 卡尔塔谢夫

Б. Л. 罗吉斯特维斯基

目　录

第一章　集合论基础

§1. 集合概念及其最基本的运算

集合概念在数学中是基本的概念，它不可能再通过其它更简单的概念来加以定义。

所谓**集合**是指某些对象的总体，这些对象按照确定的特征集结在一起。

例 1　不超过整数 N 的正整数集合，即数 $1,2,\cdots,N-1,N$。

例 2　所有的正整数 $1,2,\cdots,n,n+1,\cdots$ 组成自然数集合（自然数列）。

例 3　这个教室里的学生的集合。

例 4　这个教室里的人员的集合。

集合由元素组成。元素 x 属于集合 A 记为 $x \in A$；否则就记为 $x \notin A$ 或 $x \overline{\in} A$。

定义　若集合 A 的所有元素均属于集合 B，则称为 A 为 B 的**子集**。

这时我们就记为 $A \subset B$。

若 $A \subset B$，并存在元素 $x \in B$ 但 $x \overline{\in} A$，则称 A 是集合 B 的**真子集**。

因此，一个集合的真子集必不等于集合本身。

我们把不包含任一元素的集称为**空集**，常以符号 $\varnothing$ 表示之。

约定空集包含于任何集合 A：$\varnothing \subset A$。

定义　集合 S 称为集合 $A_k(k=1,\cdots,n)$ 的**并**（或**和**），若任何 $x \in S$，必至少属于 A_k 中之一。

因此，S 是由所有这样的元素组成，它们都至少属于集合 $A_k(k=1,\cdots,n)$ 中的一个。

集合 $A_1,\cdots,A_n$ 的并用如下符号表示：

$$S=\bigcup_{k=1}^{n}A_k.$$

集合的并的概念对于无限多个集合，如 $A_k(k=1,2,\cdots,n\cdots)$ 仍有意义，无限多个集合 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 的并的表示式为

$$S=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

集合 S 是由所有这样的元素组成，它们都至少属于 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 中的一个。

定义 集合 P 称为集合 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 的**交**（或**积**），若它由所有如下的元素 x 组成：$x\in A_k$ 对一切 $k=1,2,\cdots$ 成立。

换言之，交集 P 是由诸集合 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 的所有公共元素所组成。

集合的交，当集合的个数为有限时，表示为

$$P=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$$

当集合的个数为无限时，表示为

$$P=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$$

例 令 A_1 表示女大学生集合，A_2 为男大学生集合，则并集 $\bigcup_{k=1}^{2}A_k=A_1\cup A_2$ 为大学生（男和女）集合，交集 $\bigcap_{l=1}^{2}A_k=A_1\cap A_2=\varnothing$ 为空集。

如上引进的集合运算具有下列性质：

$$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A \qquad \text{(交换律)};$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \qquad \text{(结合律)};$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \qquad \text{(分配律)};$$

$$A \subset A \cup B; B \subset A \cup B; A \cap B \subset A; A \cap B \subset B;$$
若 $A \subset B$,则 $A \cup B = B, A \cap B = A$。

这些性质的正确性读者不难自行证明。

§2. 集合的映射

设 A、B 为两给定的集合,并设每一个元素 $x \in A$ 都对应确定的元素 $y \in B$,我们用字母 f 来表示对应本身,而用记号 $y = f(x)$ 来表示元素 $x \in A$ 在这个对应之下变为元素 $y \in B$。

所考虑的对应 f 称为集合 A 到集合 B 的**映射**,或由集合 A 到集合 B 的**函数*** 集合 A 称为函数 $y = f(x)$ 的**定义域**。

例 令 $A = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 为自然数列,B 为由 0,1 两个数组成的集合:$B = \{0, 1\}$。我们借助于以下公式建立集合 A 到 B 的映射(或由集合 A 到 B 的函数):

$$y = f(x) = \frac{1 - (-1)^x}{2} = \begin{cases} 0, & 若\ x\ 为偶数, \\ 1, & 若\ x\ 为奇数. \end{cases} \tag{1}$$

设函数 $f(x)$ 定义于集合 A 上且映 A 到集合 B。符号 $f(A)$ 表示所有 B 上的那些为 $x \in A$ 的函数值 $f(x)$ 的元素组成的集。我们称 $f(A)$ 为函数 $f(x)$ 在集合 A 上的**值域**。显然,$f(A) \subset B$。

如果 $f(A) = B$,即集合 B 的任何元素都是函数 $f(x)$ 在某点 $x \in A$ 的值,则我们说函数 $f(x)$ **映 A 到 B 上**。

若 $f(A) = B$ 且对任何 $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则集合 A 到 B 上的映射 f 称为是**双方单值**的。在此情形我们可以在集合 $B = f(A)$ 上定义函数 $x = \varphi(y)$:对于每一个元素 $y \in B$,规定它对应于 A 中满足 $f(x) = y$ 的那个元素 x。这个函数称为(相对于 $f(x)$ 的)**反函数**,并常表示为 $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$。此时函数

* 上面所述的不是函数概念的定义,这里我们仅仅是对照其它等价的概念,如对应、规则等等,来叙述这个概念。

$y=f(x)$ 和 $x=\varphi(y)$ 称为是**互反的**。

例 自然数列到集合 $B=\{0,1\}$ 上的映射(1) 不是互为单值的;但若 $A=\{1,2\}$,则函数(1) 互为单值地映集合 A 到集合 $B=\{0,1\}$ 上。

定义 若存在集合 A 到 B 上的双方单值的映射,则集合 A 和 B 就称为是等价的。

集合 A 和 B 等价常表示为 $A\sim B$。

显然可有:$A\sim A$(自反性);若 $A\sim B$,则 $B\sim A$(对称性);若 $A\sim B$,$B\sim C$,则 $A\sim C$(传递性)。

例 令 $A=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 为自然数列,$B=\{0,+1,-1,+2,-2,\cdots,+N,-N,\cdots\}$ 为整数集。显然 $A\subset B$,令在集合 A 与 B 之间规定一个双方单值的映射如下:A 中的奇数 $2k+1$ 对应到 B 中的数 k;A 中的偶数 $2m$ 对应到 B 中的数 $-m$,于是函数

$$f(x)=\begin{cases}+k,\text{当 } x=2k+1 & (k=0,1,2,\cdots),\\ -m,\text{当 } x=2m & (m=1,2,\cdots),\end{cases}$$

即为一个映 A 到 B 上的双方单值的映射,因此 $A\sim B$。

§3. 可数集

令 I_n 表示数 $1,2,\cdots,n$ 所组成的集;I 表示自然数列 $1,2,\cdots$。

定义 若存在号码 n,使得集合 $A\sim I_n$,则 A 称为**有限集**,否则称为**无限集**。若 $A\sim I$,则称为**可数集**。若 A 是无限集但不是可数集,则称为**不可数集**。若 A 是有限集或可数集,就称 A 是不大于可数的集。

定义 定义于自然数集合 I 上并在某集合 A 上取值的函数称为**序列**。

令 $n\in I$,我们将以 $x_n(x_n\in A)$ 表示对应的序列的值。序列 $x_1,x_2,\cdots$ 将简记为 $\{x_n\}$。

定理 1.1 可数集 A 的任何无限子集 E 为可数集。

证明 因集合 A 可数,因此在它的元素 x 与自然数 $I=\{1,2,\cdots\}$ 之间可以建立起双方单值的对应,也就是说集合 A 的元素可排成序列,因此 $A=\{x_n\}$,令 n_1 是最小的自然数,使得 $x_{n_1}\in E$;再令 n_2 是最小的满足 $n_2>n_1$ 的自然数,使得 $x_{n_2}\in E$ 等等,于是 $E=\{x_{n_k}\}$,$k=1,2,\cdots$。因为集合 E 按定理条件是无限集,从而 $E\sim I$。事实上,函数 $f(k)=x_{n_k}$ 建立了 I 与 E 之间的双方单值的对应。定理证毕。

定理 1.2 令 $\{A_k\}$ 是一可数集的序列,则集合

$$S=\bigcup_{k-1}^{\infty}A_K$$

为可数,即可数集的可数并集为可数。

证明 因为每一 A_k 是可数集,因此它的元素可以排成序列

$$A_k=\{x_1^k,x_2^k,x_3^k,\cdots\}.$$

将集合 A_k 的元素逐行排列为下表:

$$\begin{array}{cccccc}
A_1: & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & x_4^1 & \cdots \\
A_2: & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

现若将表中所有元素按照箭头所示方向依次列出,即可排列成序列形式:

$$x_1^1,x_1^2,x_2^1,x_1^3,x_2^2,x_3^1,x_1^4,x_2^3,x_3^2,x_4^1,\cdots$$

由于表中每一个元素都可在此序列中指出确定的位置(号码),因此表中所列的元素的集合是可数的。然而从这个序列去构造集合 S 时,尚须删去所有那些重复出现的元素 x_n^k,因此 S 是可数集的无限子集,据定理 1.1,它是可数集,定理证毕。

定理 1.3 有理数集合可数。

证明 任何一个正有理数 $r=p/q$(p、q 为自然数)至少包含

于下列数集 $A_k(k=1,2,\cdots)$ 中之一个，这里

$$A_1=\{1,2,3,\cdots\},$$

$$A_2=\{\frac{1}{2},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\cdots\},$$

$$A_3=\{\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{3},\cdots\},$$

…………………

依据上一个定理即知正有理数集 $S=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_K$ 是可数的。

因为全部有理数的集是由正有理数、负有理数和零组成，因此它是可数的。定理证毕。

定义 前面带有"+"号或"-"号的整数序列 $a_0,a_1a_2\cdots$ 称为无穷小数，其中 $0\leqslant a_i\leqslant 9,i=1,2,\cdots,a_0$ 为任一非负整数。

这里我们约定用逗号将第一个数同其它的数分开。若无穷小数前带有"-"号，则称它为是负的，否则称为是非负的("+"号通常略写)。

定理 1.4 所有无穷小数组成的集不可数。

证明 我们仅须证明正无穷小数集不可数。设不然，若正无穷小数集 A 可数，这意味着所有正无穷小数可以排列成序列：

$$x_1=a_0^{(1)},a_1^{(1)}a_2^{(1)}\cdots,$$

$$x_2=a_0^{(2)},a_1^{(2)}a_2^{(2)}\cdots,$$

…………………………

但我们可以列举出无穷小数 $x=b_0,b_1b_2\cdots$ 不包含在上面的序列之内。事实上，若 b_0 任选，其它的 $b_i(0\leqslant b_i\leqslant 9)$ 选得满足 $b_1\neq a_1^{(1)},b_2\neq a_2^{(2)},\cdots,b_n\neq a_n^{(n)}$ 等等，则如上所作出的无穷小数就不包含在所列的序列之中(因为对任何 $n=1,2,\cdots,b_n\neq a_n^{(n)}$)。这就与所有无穷小数可排列成序列的假设矛盾。这个矛盾就完成了定理的证明。