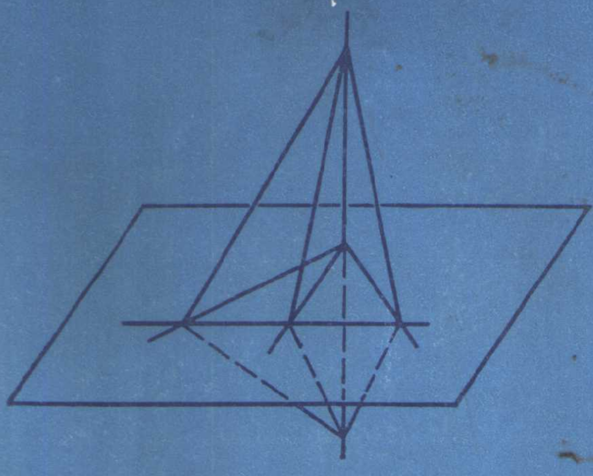
高级中学课本

立体几何

LITIJIHE

（乙种本）

全一册



人民教育出版社

高级中学课本（试用）
立体几何
全一册（乙种本）
人民教育出版社数学室编
*
人民教育出版社出版
天津教育出版社重印
天津市新华书店发行
天津新华印刷二厂印刷
*
开本787×1092 1/32 印张3.75 字数80,000
1983年12月第1版 1985年5月第1次印刷
印数1—58,000
书号 K7012·0539 定价 0.32元

引　言

在初中，我们学了平面几何，研究过一些平面图形（由同一个平面内的点、线所构成的图形）的形状、大小和位置关系，还有平面图形的画法和计算，以及它们的应用．可是，在解决实际问题中，只知道这些几何知识还是不够用的．例如，建造厂房、制造机器、修筑堤坝等，都需要进一步研究空间图形的问题．

空间图形是由空间的点、线、面所构成，也可以看成是空间点的集合．以前我们学过的长方体、圆柱、圆锥等，都属于空间图形．平面图形是空间图形的一部分．

立体几何的研究对象是空间图形．我们将在平面几何知识的基础上，来研究空间图形的性质、画法、计算，以及它们的应用．

说　　明

一、这套高中用的数学课本(乙种本)是根据教育部颁发的《高中数学教学纲要(草案)》中的基本要求内容编写的，共分四册:《代数》上、下册、《立体几何》全一册、《解析几何(平面)》全一册，供二年制或三年制高中选用.

二、本书内容包括：直线和平面、多面体和旋转体两章，全书的公式列表作为附录.

三、本书习题共分四类:练习、习题、复习参考题及总复习参考题.

1. 练习　供课堂练习用;

2. 习题　供课内、外作业用;

3. 复习参考题与总复习参考题　复习参考题供复习本章知识时使用;总复习参考题供复习全书知识时使用.

习题及复习参考题、总复习参考题的题量多于通常所需题量，供教学时根据情况选用.

四、本书由人民教育出版社数学室编写．参加编写的有鲍珑、李慧君、孙福元等，全书由孙福元校订。

目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　直线和平面

一　平　　面

1.1　平面

常见的桌面、黑板面、平静的水面以及纸板等，都给我们以平面的形象．几何里所说的平面就是从这样的一些物体抽象出来的．但是，几何里的平面是无限延展的．

当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们都很象平行四边形．因此，在立体几何中，通常画平行四边形来表示平面（图 1-1）．当平面是水平放置的时侯，通常把平行四边形的锐角画成 45°，横边画成等于邻边的两倍．当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画（图 1-2）．这样，看起来立体感强一些．

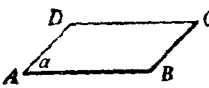


图　1-1

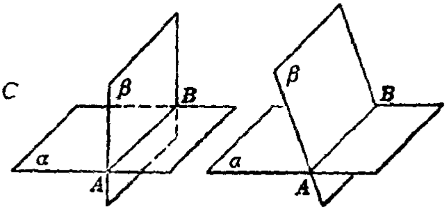


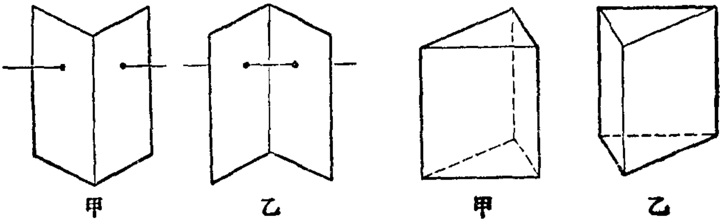
图　1-2

平面通常用一个希腊字母 α、β、γ 等来表示，如平面 α、平面 β、平面 γ 等，也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC（图 1-1）．

练　习

1. 能不能说一个平面长 4 米，宽 2 米？为什么？

2. 观察(1)、(2)中甲、乙两个图形，用模型来说明它们的位置有什么不同．并用字母来表示各平面。



(第 2 题)

1.2　平面的基本性质

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质．我们把它们当作公理，作为进一步推理的基础．

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内(图 1-3)．

这时我们说直线在平面内，或者说平面经过直线．

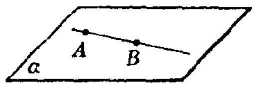


图　1-3

例如，把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上．

点 A 在直线 a 上，记作 $A\in a$；点 A 在直线 a 外，记作 $A\notin a$；点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$，点 A 在平面 α 外，记作 $A\notin\alpha$；直线 a 在平面 α 内，记作 $a\subset\alpha$．

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线(图 1-4)。

例如，教室内相邻的墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线.

如果两个平面α和β有一条公共直线 a，就说平面 α 和β 相交，交线是 a，记作 $\alpha\cap\beta=a$.

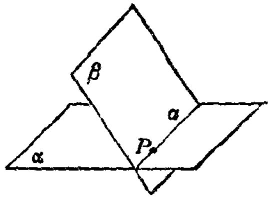


图 1-4

公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面(图 1-5).

例如，一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了.

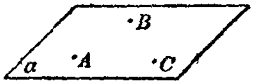
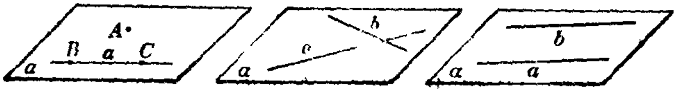


图 1-5

过 A、B、C 三点的平面又可记作“平面 ABC”.

根据上述公理，可以得出下面的推论.

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面(图 1-6甲).



甲　　　乙　　　丙

图 1-6

A 是直线 a 外的一点，在 a 上任取两点 B、C. 根据公理 3，经过不共线的三点 A、B、C 有一个平面 α. 因为点 B、C 都在平面 α 内，所以根据公理 1，直线 a 在平面 α 内. 即平面 α 是经过直线 a 和点 A 的平面.

因为点 B、C在直线 a 上，所以经过直线 a 和点 A 的平面一定经过点 A、B、C. 又根据公理 3 经过不共线的三点 A、B、

C 的平面只有一个，所以经过直线 a 和点 A 的平面只有一个.

类似地，可以得出下面两个推论:

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面(图1-6乙).

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面(图 1-6丙).

"有且只有一个平面"，我们也说"确定一个平面".

注意: 在立体几何里，平面几何中的定义、公理、定理等，对于同一个平面内的图形仍然成立.

例　两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一个平面内.

已知: 直线 AB、BC、CA 两两相交，交点分别为 A、B、C (图 1-7).

求证: 直线 AB、BC、CA 共面*.

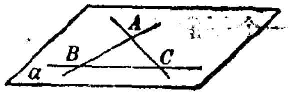


图　1-7

证明: ∵　直线 AB 和 AC 相交于点 A,

∴　直线 AB 和 AC 确定一个平面 α (推论 2).

∵　$B \in AB$,　$C \in AC$,

∴　$B \in \alpha$,　$C \in \alpha$.

∴　$BC \subset \alpha$(公理 1).

因此，直线 AB、BC、CA 都在平面 α 内，即它们共面.

---

*　空间的几个点和几条直线，如果都在同一个平面内，可以简单地说它们"共面"，否则说它们"不共面".

练　习

1. 填空：

(1) ______________的三点确定一个平面；

(2) 两条____或____直线确定一个平面；

(3) 有一个公共点的两个平面交于________的一条直线.

2. 用符号表示下列语句：

(1) 点 A 在平面 α 内，但在平面 β 外；

(2) 直线 a 经过平面 α 外一点 M；

(3) 直线 a 在平面 α 内，又在平面 β 内，即平面 α 和 β 相交于直线 a.

1.3 水平放置的平面图形的直观图的画法

把空间图形画在纸上或黑板上，这就是用一个平面图形来表示空间图形. 这样的平面图形不是空间图形的真实形状，而是它的直观图. 如图 1-8 是正方体的一种直观图. 正方体的各个面本来都是正方形，但是在直观图中，有一些面画成了平行四边形. 虽然直观图是和空间图形不同的平面图形，但它有较强的立体感.

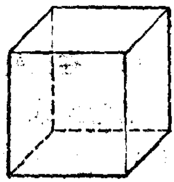


图 1-8

要画空间图形的直观图，首先要学会水平放置的平面图形的直观图的画法. 下面举例说明一种常用的画法.

例 1　画水平放置的正六边形的直观图(图 1-9).

画法：(1) 在已知正六边形 $ABCDEF$ 中，取对角线 AD 所在的直线为 x 轴，取对称轴 GH 为 y 轴. 画对应的 x' 轴、

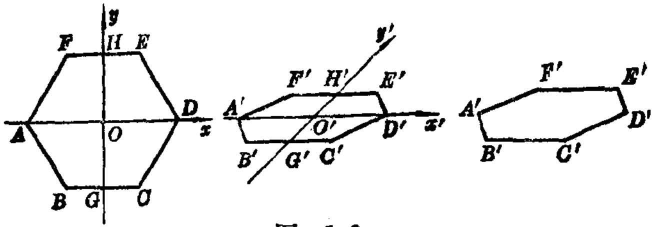


图 1-9

y' 轴，使$\angle x'O'y'=45°$.

(2) 以点 O' 为中点，在 x' 轴上取 $A'D'=AD$，在 y' 轴上取 $G'H'=\frac{1}{2}GH$. 以点 H' 为中点画 $F'E'$ 平行于 x' 轴，并等于 FE；再以 G' 为中点画 $B'C'$ 平行于 x' 轴，并等于 BC.

(3) 连结 $A'B'$、$C'D'$、$D'E'$、$F'A'$. 所得的六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是正六边形 $ABCDEF$ 的直观图.

注意：图画好后，要擦去辅助线*.

上面画直观图的方法叫做斜二测画法，这种画法的规则是：

(1) 在已知图形中取互相垂直的轴 Ox、Oy. 画直观图时，把它画成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$，使$\angle x'O'y'=45°$（或 $135°$）. 它们确定的平面表示水平平面.

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段.

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

例 2 画水平放置的正五边形的直观图(图 1-10).

画法：(1) 在已知正五边形 $ABCDE$ 中，取正五边形的

---

* 辅助线包括 x' 轴、y' 轴及为画图添加的线.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

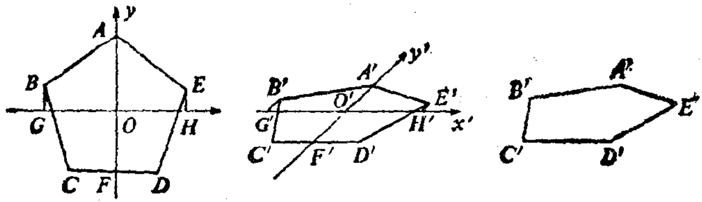


图 1-10

中心 O 为坐标原点，对称轴 FA 为 y 轴，过点 O 与 y 轴垂直的直线为 x 轴. 分别过点 B、E 作 $BG \parallel Oy$、$EH \parallel Oy$，与 x 轴分别交于 G、H. 画对应的轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y' = 45°$.

（2）以点 O' 为中点，在 x' 轴上取 $G'H' = GH$，分别过 G'、H' 在 x' 轴的上方作 $G'B' \parallel O'y'$、$H'E' \parallel O'y'$，并使 $G'B' = \frac{1}{2}GB$，$H'E' = \frac{1}{2}HE$；在 y' 轴上 x' 轴的上方，取 $O'A' = \frac{1}{2}OA$，在 x' 轴的下方，取 $O'F' = \frac{1}{2}OF$，并以点 F' 为中点画 $C'D' \parallel O'x'$，且 $C'D' = CD$.

（3）连结 $A'B'$、$B'C'$、$D'E'$、$E'A'$. 所得的五边形 $A'B'C'D'E'$ 就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图.

练　习

画水平放置的正方形、正三角形的直观图。

习　题　一

1. 下面的说法正确吗？为什么？

（1）线段 AB 在平面 α 内，直线 AB 不全在平面 α 内；

（2）平面 α 和 β 只有一个公共点.

2. 为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚？

3. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？

4. (1) 不共面的四点可以确定几个平面？

(2) 三条直线两两平行，但不共面，它们可以确定几个平面？

(3) 共点的三条直线可以确定几个平面？

5. 一条直线过平面内一点与平面外一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？

6. 一条直线与两条平行直线都相交。证明：这三条直线在同一个平面内。

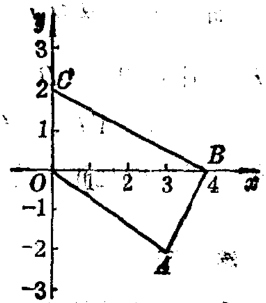
7. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线。证明：这三条直线在同一个平面内。

8. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

9. 怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿的下端，是否在同一个平面内。

10. 画出图中水平放置的四边形 $OABC$ 的直观图。

11. 画水平放置的等腰梯形和平行四边形的直观图。



(第 10 题)

二 空间两条直线

1.4 两条直线的位置关系

我们知道，在同一个平面内的两条直线*的位置关系只有两种：平行或相交.

空间的两条直线之间，还有另外一种位置关系.

观察图 1-11 中的六角螺母的棱 AB 和 CD 所在的直线，或机械部件蜗轮和蜗杆的轴线，可以看出，它们不同在一个平面内.

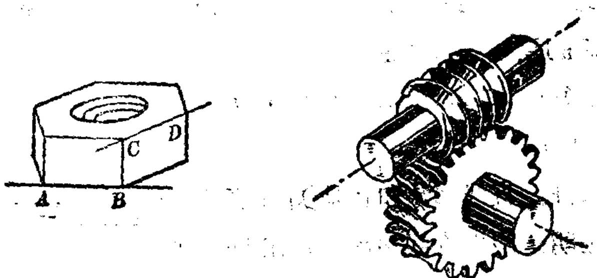


图 1-11

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做**异面直线**. 显然，两条异面直线是既不平行又不相交的.

空间的两条直线的位置关系有以下三种：

(1) **相交直线**——在同一个平面内，有且只有一个公共点；

(2) **平行直线**——在同一个平面内，没有公共点；

(3) **异面直线**——不同在任何一个平面内，没有公共点.

画异面直线时，可以画成如图 1-12 那样，以显示出它们不共面的特点.

直线 a、b 相交于点 A，我们规定记作 $a \cap b = A$.

---

* 本书中没有特别说明的“两条直线(平面)”，均指不重合的两条直线(平面).

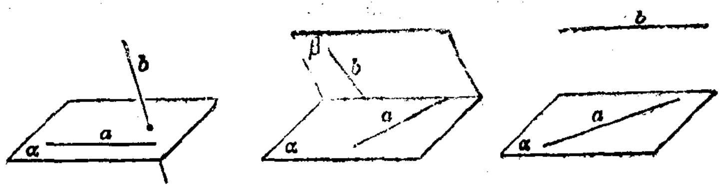


图 1-12

例　过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线.

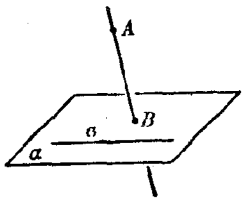


图 1-13

已知：$a\subset\alpha$, $A\notin\alpha$, $B\in\alpha$, $B\notin a$.（图 1-13）.

求证：直线 AB 和 a 是异面直线.

证明：假设直线 AB 与 a 在同一个平面内，那么这个平面一定经过点 B 和直线 a.

∵　$B\notin a$, 经过点 B 与直线 a 只能有一个平面 α,

∴　直线 AB 与 a 应在平面 α 内,

∴　$A\in\alpha$, 这与已知 $A\notin\alpha$ 矛盾.

∴　直线 AB 和 a 是异面直线.

练　习

1. 在教室里找出几对异面直线的例子.
2. (1) 没有公共点的两条直线叫做平行直线. 对吗?

   (2) 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线吗? 为什么?
3. 说出正方体中各对线段的位置关系:

   (1) AB 和 CC_1;

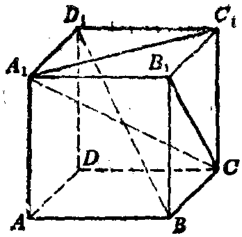
(2) A_1C 和 BD_1;

(3) A_1A 和 CB_1;

(4) A_1C_1 和 CB_1;

(5) A_1B_1 和 DC;

(6) BD_1 和 DC.



(第 3 题)

1.5 平行直线

在平面几何里，我们曾学过："在同一个平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行". 对于空间的三条直线，实际上也有这样的性质，我们把它作为公理.

公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.

例如，图 1-14 里三棱镜的三条棱，如果 $AA' \parallel BB'$、$CC' \parallel BB'$，这时必有 $AA' \parallel CC'$.

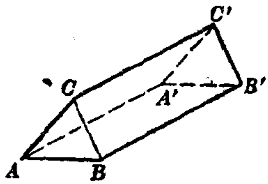


图 1-14

例　已知：四边形 $ABCD$ 是空间四边形(四个顶点不共面的四边形)，E、H 分别是边 AB、AD 的中点，F、G 分别是边 CB、CD 上的点，且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$. 求证：四边形 $EFGH$ 是梯形.

证明：如图 1-15，连结 BD.

$\because$ EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore$ $EH \parallel BD$, $EH=\frac{1}{2}BD$.

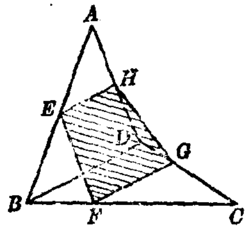


图 1-15

又在$\triangle BCD$中，$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，

$\therefore$ $FG \parallel BD$，$FG=\frac{2}{3}BD$.

根据公理4，$EH \parallel FG$.

又 $\because$ $FG>EH$，

$\therefore$ 四边形$EFGH$是梯形.

根据公理4，我们可以证明下面的定理：

定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

已知：$\angle BAC$和$\angle B'A'C'$的边$AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，并且方向相同.

求证：$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

证明：对于$\angle BAC$和$\angle B'A'C'$都在同一平面内的情况，在平面几何中已经证明．下面我们证明两个角不在同一平面内的情况.

如图1-16，在AB、$A'B'$，AC、$A'C'$上分别取$AD=A'D'$、$AE=A'E'$，连结AA'、DD'、EE'、DE、$D'E'$.

$\because$ $AB \parallel A'B'$，$AD=A'D'$，

$\therefore$ $AA'D'D$是平行四边形.

$\therefore$ $AA' \mathrel{\underline{\parallel}} DD'$.

同理 $AA' \mathrel{\underline{\parallel}} EE'$.

根据公理4得$DD' \parallel EE'$.

又可得 $DD'=EE'$，

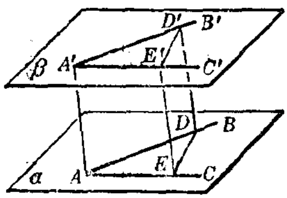


图 1-16

$\therefore$ 四边形$EE'D'D$是平行四边形.

$\therefore$ $ED=E'D'$．可得 $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com