科學圖書大庫

群與圖

譯者　王昌銳

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

群 與 圖

譯者 王昌銳

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十八年四月九日再版

群　與　圖

基本定價 1.80

譯者　王昌鋭　省立高雄工專教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話 7813686 7815250 號

發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號

承印者大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號　電話9719739

譯序

群（group）之理論：爲數學中，非數量學系之一。其概念之發展，雖爲時不長，但其應用於日常生活，裝飾藝術，科學研究者，却非常之廣。而且對於數學研究，亦頗重要。而成爲代數方程式之可解性，幾何移轉，拓樸學問題，及整數論等研究之權威工具。

群之理論，頗爲抽象。欲使其性質，展露達一基本水準，頗爲困難。但本書著者，却以敍述與圖形並重，徐徐地由實在至抽象，由簡單至複雜，運用許多有效的圖形，或凱勒圖解，以克服此等困難。使學生能辨識某些群之結構性質。於群之實例方面，且包含全等運動群及排列解。明智之讀者，細讀斯書，將對此權威學術，得一直覺之瞭解，以掌握其抽象性質，瞭解其廣濶應用。

本書著者之一的格勞司曼（Israel Grossman），1909年，生於紐約城，1936年獲哥林比亞大學．師範學院碩士學位。曾長時執教於紐約各學校。且曾從事實業工作，對光學儀器及彩色軟片之製作，頗有成就。另一著者麥格洛司（Wilhelm Magnus）教授，於1907年生於柏林，1931年接受福蘭克福大學數學博士學位，1948年至1950年間，曾參與加州工業技術學會工作，從事高級超越函數手冊之編訂．其著作頗豐，多爲群之理論，電磁理論，及綫性微分方程式之類，頗爲士林所重．兩人合著之"群與圖"一書，篇幅雖不甚巨，但却係各抒所長之精心傑作，簡單明快，使人一讀之餘，便有深入其"群"之感。耳聞目見之裝飾紡織圖案，雄偉輪奐之建築圖形，美學藝術，牆紙地磚，林林總總，而無非群學與群圖之廣泛應用也，猗歟盛哉！故予迻譯，推介於我國人，以提高群學研究興趣，促進數學研究效果。

書中譯名，力求普遍通行，重要名詞術語，均留原名，以利學者參證。重要之說明，原書中以斜體字印刷者，均用引號"……"標示，以示其重要性，而醒眉目．譯文敍述，力保原書面目，求眞而已。

本書係應徐氏基金會出版新書之號召而譯，譯稿有勞吾妻蔣君英女士，

扶病協助整理，致得早觀厥成，殊深感激，特誌勿忘。

中華民國五十九年庚戌征月元夜

湘潭留田王昌銳序於高雄工專

致讀者

本書爲數學專家所撰一系列書刊之一。其目的在求確立多數中等以上學校學生及社會人士，有興趣而可領會之某些重要數學觀念。新數學文庫（NML）之大部內容，包含常不爲中學課程所包容之題材，而且難易相殊．即使同一書內，有的部份，即比其他部份，需要較高程度之集中心志。由是，讀者須具相當技能學識，以瞭解此等書籍之大部內容，並須作明智之努力。

如讀者已往，僅於教室作業中遭逢數學，則應記住於心，數學書籍不可快速閱讀，亦不應期望乍覽之餘，即可瞭解書中所有內容，而應很自然的越過複雜部份，以後再回來讀。因後續之敍述，常能澄清一種理論也。反之，包含完全熟悉題材之章節，當可快速閱讀。

學數學之最佳途徑，爲"做"數學，各書均含習題。有些習題，且需縝密思考，奉勸讀者，養成手持紙筆，從事閱讀之習慣；如此，數學對之，將變爲更富意義。

對著者及編者而言，此爲新的嚐試。願對協助本文庫各書籌印之許多中學師生，表示由衷謝意．編者頗有興趣於本文庫各書之反應意見，希望讀者，書面寄交紐約大學，新數學文庫編輯委員會（Editorial Committee of New Mathematical Library）。

原編者

原 序

一個小學或中學生，常有數學只研究數目及量度之概念。然而，數學却常於數量科學以外，應用於簿記，金錢兌換等許許多多的活動；而深深的關注於邏輯及結構方面。

群之理論，爲數學中重要非數量學門之一。群之概念，於數學發展中，雖爲時短暫，但却頗有成果；例如，現已成爲代數方程式幾何移轉，拓撲學問題，及數目理論研究中之權威工具。

群理論之兩性質，傳統上可延於學生數學教育之末期研究。第一，附於群理論觀念中之高度抽象性，及與數學成果以俱來之抽象概念對抗能力。第二，群理論與其他研究方面，交互爲用，以照亮並推進彼等之途徑，僅能於理論長期與努力之後見之，且僅由熟悉其他方面之學生體驗之。於本書之中，已針對相關早期階段，數學程度者，作適當之陳述。爲克服來自抽象性之困難，已使用群之幾何圖形—群之圖形。於此方式之中，抽象之群，已使之於可見型態堅實，以對應群之結構。然而，不能希望提供需用以掌握各種數學方面審查概念，而延長閱讀與研究之代用品，曾試圖表示所述某些定理及概念之較廣意義，以使此情勢臻於至善之境。

吾人深知，不能經常以實作應用，引起讀者動機。最後，乃不得不依賴於數學內容及其本身，當然，最有效的鼓舞，還是來自讀者自身；此必爲其本人貢獻。

願對新數學文庫編者之有貢獻於本書之服務者，表示感謝之意。非常感謝來克司博士（ Dr.Anneli Lax ）及斯處子也小姐（Miss Arlys Stritzel ），所提供之技術協助，及國家科學基金會所予之支持。

目錄

第一章　群之介紹

群（ groups ）之理論，首於十八世紀之末，開始形成。發展緩慢，於十九世紀之最初十年期內，極少引人注意。而後，約以1830年爲中心之少數幾年內，群之理論，向前猛躍·而對一般數學發展，有極大貢獻．於蓋洛司（ Galois ）及亞培爾（Abel）對於代數方程式之可解性研究，尤有貢獻

此後，包含群論之概念，已予凝集而引伸於許多數學方面，且曾應用於量子力學，結晶學，及紐結理論等各個不同之方面。

本書專門討論群及其圖形表示法。吾人首要任務，在澄淸群之意義爲何。

群概念之極要基本觀念，爲結構或形式概念。後繼者何，讀者將見連續之例題及解釋，定義及定理之無重疊，全計算爲基本主題變化：群與其圖形如何結合，以解釋一種數學結構。

已往，曾使用“群”字，而未向讀者說出此字之意義爲何。欲提出一完全正式之定義於突然之間，可令讀者於一開始便覺迷亂。因此將逐漸發展群之概念，而以提出兩例，作其開始·希冀讀者，於以下群之結構特性介紹性討論時，熟記於心。

［群**A**：］　所有能考慮爲，可互相相加數目之一切整數“集合”。換言之，群A諸元，爲整數$\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$，有興趣於實行之僅有“作業”，“爲集合中任二元素”之加法，例如，$2+5=7$。

［群**B**：］　所有能考慮爲可相互相乘數目之一切正有理數“集合”。於本情況中，集合諸元，爲所有可表示爲a/b形式之數目。其中a與b，均爲正整數，而吾人有興趣於行之僅有“作業”，爲“集合中任兩元素”之乘法，例如$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$。

現在讀者，已見群之兩例，可能仍未於瞭解“群果爲何”之途程中有所進展，因其未能立即得知，此兩例於群之主要結構方面，有何顯著表現。於提示群A及B之敍述時，某些字句，曾以引號“ ”標出，以表示所有群中之基本結構形式，玆分別表示兩特質如下。

$$1.\ \text{元之“集合”}\begin{cases}\text{群A：所有之整數}\\ \text{群B：所有之正有理數}\end{cases}$$

$$2.\ \text{集合上之“二元作業”}\begin{cases}\text{群A：任“兩”整數之加法}\\ \text{群B：任“兩”正有理數之乘法}\end{cases}$$

其所以稱群A與B中作業爲“二元”作業者，以每次包含二元素也。

於“一集合上之二元作業”，爲指定集合各元之每成對元，對應唯一決定之集合內一元。由是，於群A中，加法爲“整數集合上”之二元作業．因，如“r”及“s”，爲吾人集合中之任兩元素，則“$r+s$，亦爲集合之一元”。如以符號“t”表示元素“$r+s$”，即能重述吾人敍述如此。如“r”及“s”爲吾人集合中之任兩元素，則有一，而僅一集合之元素“t”，以致“$r+s=t$”。例如，選2與5爲吾人集合之兩元素，有“獨一”之集合元素7，以致$2+5=7$。

乘法爲群B之二元作業；因，如“r”及“s”，爲吾人集合（正有理數）之任兩元素，則有一，而僅一集合之元素“t”，以致“$r\cdot s=t$”。（其元素t之獨一性，由同義有理數，如$\frac{4}{8}$及$\frac{1}{2}$，表示相同數目而致。）如選用$\frac{2}{3}$及$\frac{5}{8}$爲吾人集合之兩元素，則存在集合之獨一元素$\frac{5}{12}$，以致$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$。

注意於“二元作業”概念，包含一配合之集合。是即爲何使用“二元作業於一集合”一語之原因。成對元素及由二元作業所定之對應元素，均應爲同一集合之元素。由是，而知群之兩相關特性爲（1）元素之一集合，及（2）於此集合之二元作業。此兩特性糾結不分，而未能隔離．雖然，有時轉移吾人焦點由此至彼，亦覺方便。

已考慮之群二元作業例題，一直爲用符號“$+$”表示之整數常用加法，及用“$\cdot$”表示之正有理數乘法，將見及有許多配合不同解之不同二元作業，有時使用單一符號，以示此中之任一者，將頗方便。故可令符號$\otimes$，以表示未經指定之二元作業。

此標誌使人描述群A與B所展示之結構特性（1）與（2），爲集合S，與S上之二元作業$\otimes$。如r及s爲S之任兩元素，則於S中有獨一之元素t以致

$$r \otimes s = t.$$

對群A而言，⊗表示指定作業“整數之加法”，對群B而言，⊗表示“正有理數之乘法”。

爲加強二元作業爲一“對應”之觀念，尙能將已曾考査之群，於另一方式敍述。於群A之情況中，能謂對應於任一對整數 r 及 s，有獨一之正有理數 t。於符號表示，可書 $(r, s) \to t$，其中箭頭，表示“對應於”。於群B之情況中，能謂對應於任何一對正有理數 r 及 s，有獨一之正有理數 t。

欲得於集合上二元作業之一較廣觀點，將考慮此一問題：一集合之二元作業，亦能爲其次集之二元作業否？（吾人謂集合 U，爲集合 S 之次集，如 U 之各元，亦爲 S 之一元。）例如，S 爲所有正有理數之集合，而 U 爲包含一切正整數之次集。首先且決定除法是否爲 S 上之二元作業。讀者已能自知，除法爲正有理數集合 S 上之二元作業。如 r 及 S 爲任兩正有理數，乃存在獨一之正有理數 t，以致

$$\div s = t$$

現令吾人，考査除法爲集合 S 上之二元作業，是否亦爲正整數之次集 U 上二元作業。顯見如選用2及3，爲吾人次集 U 之兩元素，則不存在任何正整數 t，以致

$$2 \div 3 = t.$$

則，除法非正整數次集 U 上之二元作業，因有成對之正整數，而不對應於第三個正整數也。

反於此種情況，現且考慮所有整數之集合 S，及其所有偶整數之次集合 U。已知加法爲所有整數集合 S 上之二元作業，於加法作業下，偶整數次集 U 上之後果爲何？當兩偶整數相加時，其結果爲一偶整數。換言之，加法爲偶整數次集 U 上之二元作業，一如於所有整數集合 S 上者然。當兩個次集 U 之元素相加時，其和常爲 U 之一元素。此性質可如此敍述：偶整數之次集 U，爲加法之二元作業下封閉。讀者能驗證奇整數之次集 T，於此作業下，爲不封閉。

於更普通說法，來敍述二元作業下，次集之封閉性質，於此方式：如⊗爲集合 S 上之二元作業，且如 U 爲 S 次集，具有 $u \otimes v$ 爲 U 一元之性質，當 u 及 v 均在次集 U 中時，乃謂 U 於作業⊗之下封閉。“封閉”一詞，意爲

當限制U中成對元素時，作業$\otimes$未出於U之外，故可認爲$\otimes$係集合U上之一二元作業。

將於第八章見知於二元作業下，次集之封閉性質，如何於"次群"(Sub groups)之討論中，擔任其中心任務。

[練習1.] (a) 加法爲奇正整數集合上之二元作業否？(b) 對如 (a) 中之相同集合，乘法爲二元作業否？(c) 令集合之諸元爲1，i，-1，$-i$，其中$i=\sqrt{-1}$。加法爲此集合上之二元作業否？(d) 對如 (c) 中之集，乘法爲二元作業否？

前已得知"一群，係一集合，併其集合上之二元作業"。如r及s爲集合之任兩元素，乃存在集合之獨一元素t，以致

$$r\otimes s=t \quad 或 \quad (r,s)\to t.$$

所謂"如r及s爲集合之任兩元素"，並不排除r及s表示同一元素之可能性，亦未預先假定r及s之特定順序。由是，如r及s爲集合之任兩元素，則

$$r\otimes s\ ,\ r\otimes r\ ,\quad s\otimes s\quad ,\quad s\otimes r$$

亦爲集合之元素（不需完全有別）。

現在發生了問題：於一群中，$r\otimes s$，及$s\otimes r$能爲集合之不同元素否？對群A及B而言，顯然$r\otimes s=s\otimes r$，常爲眞確。例如，在群A之中，已有$3+5=5+3$，而於群B之中，$\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{3}$。但於正有理數集合上，以除法爲二元作業時，乃知乎$\frac{2}{3}\div\frac{7}{2}\neq\frac{7}{2}\div\frac{2}{3}$。通常$r\otimes s\neq s\otimes r$，以對此集合。由是，元素順序，頗爲重要；於某些集合中，互換或交換其元，能引出不同結果，卽其可能

$$(a,b)\to c \quad 及 \quad (b,a)\circ d,$$

其中a，b，c，d均群之元素，而$c\neq d$。

於$r\otimes s=s\otimes r$之情況中，可曰元素r及s不可交換(就以$\otimes$表示之特定作業)。如$r\otimes s\neq s\otimes r$，乃謂元素$r$及$s$不可交換（就特定之作業）。由現在起，不應取之作進一步之容許於$\otimes$之下，依序成對之(r,s)，對應於依序成對之(s,r)相同元素，各情況應分別考查其交換性。

通常，為適應需要，以分區$r\otimes s$及$s\otimes r$，向重述具有一配合二元作業集合之特徵，於此方式：對吾人集合中，各依序成對之元素 r 及 s，存在獨一之元素 t 於集合中，以致

$$r\otimes s=t \quad \text{或} \quad (r,s)\rightarrow t$$

一直，所有具其配合二元作業之集合例題，已包括為元素之數目，而其算術熟悉作業之一，為二元作業。但將見知一群之諸元，亦能為非數值者，如運動，排列，函數，幾何移轉，或一符號集合；而於此等情況之中，其配合之二元作業，於本質上，非算術的。

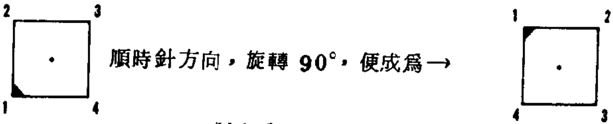

圖 1.1

例如，考慮一方形，係於其平面內，繞經其中心之軸自由旋轉，其限制為僅容許之旋轉，為將方形帶至與本身重合者，則一容許之旋轉，將經一角 90°於順時針方向。（見圖 1.1）玆指定此旋轉為 a。某些其他可能旋轉當為：(1) 順時針旋轉 180°，而以 b 示之，(2) 順時針方向 270° 旋轉，以 c 示之。

可視此等旋轉 a, b, 及 c 為一群之可能元素。能定義二元作業，以使 $a\otimes b=c$ 有其意義否？作到此點之一方法，為循此等路線思考：

順時針旋轉 90°　繼之以順時針旋轉 180°

為等義於

一順時針旋轉 270°，

或

元素 a 後隨以元素 b 等於元素 c，

或

$$a\otimes b=c.$$

配合兩元素 a 及 b 之作業，而以元素 c " 隨之 "。此連續之作業，使旋轉具有意義。此將得知，亦能使他種可能之群元素，具有意義。

[練習 2.]以此二元作業概念爲"後隨"或連續，$b \otimes c$ 所代表之方形旋轉集合之元素爲何？$a \otimes c$ 所代表之旋轉爲何？

第二章　群之原理

一直在集中心力，討論集合上之二元作業概念，讀者應勿斷定，此爲一群之單一定義特質。對一具有二元作業之集合，建立一群，可假定二元作業，相對於集合元素，具有某些性質。如此之假定或原理（ axioms ），敍述此類基本性質，且將需要三種如是之原理。彼等將爲 (1) 結合性，(2) 單位元素（或恒等），(3) 相反的。

［配合性］　配合性質，需要者係如 r,s,t 爲任何三集合元素，則

$$r\otimes(s\otimes t)=(r\otimes s)\otimes t\ ;$$

即，如 $s\otimes t$ 爲集合之元素 x，而 $r\otimes s$，爲元素 y，則 $r\otimes x=y\otimes t$。

茲考慮群A及B。於群A中，其結合性質，需要對任何三整數 r,s,t,

$$r+(s+t)=(r+s)+t.$$

例如，已有

$$5+(3+8)=5+11=16$$

及

$$(5+3)+8=8+8=16.$$

於群B之情況中，將有

$$r\cdot(s\cdot t)=(r\cdot s)\cdot t$$

例如

$$\frac{3}{8}\cdot(4\cdot\frac{2}{3})=\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3}=1$$

及

$$(\frac{3}{8}\cdot 4)\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1.$$

由吾人使用基本代數之經驗，得知於群A及B之二元作業爲結合的。

然而，現且考慮除法，爲正有理數集合之二元作業，以測驗其結合性質是否成立。而有

$$\frac{3}{2}\div\left(3\div\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{2}\div 4=\frac{3}{8},$$

而

$$\left(\frac{3}{2}\div 3\right)\div\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3},$$

故

$$r\div(s\div t)\neq(r\div s)\div t$$

於正有理數集合上，除法非結合之二元作業。

如與數式 $r\otimes s\otimes t$ 有何連繫，意義爲何？如$\otimes$表示於一集合之二元作業，當包含集合之三元時，如何能使用之？能給予有限意義於數式 $r\otimes s\otimes t$，此於首兩符號，或環末兩符號插入小括號便是。於第一情況，數式將表現爲 $(r\otimes s)\otimes t$，而於第二情況，爲 $r\otimes(s\otimes t)$. 因$\otimes$爲吾人集合之二元作業，$y=(r\otimes s)$ 而 $x=(s\otimes t)$，均吾人集合中元素。因此 $(r\otimes s)\otimes t$ 及 $r\otimes(s\otimes t)$，各可認爲僅包含集合之兩元素，如 y 及 t 於第一情況，及 r 與 x 於第二情況。

如二元作業$\otimes$爲不結合，元素 $r\otimes s\otimes t$，無獨一之意義。例如，於正有理數集合上除法之情況中，數式 $\frac{3}{2}\div 3\div\frac{3}{4}$，因 $(\frac{3}{2}\div 3)\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$ 及 $\frac{2}{3}\div(3\div\frac{3}{4})=\frac{3}{8}$，而爲不甚明顯。

如二元作業$\otimes$爲結合的，元素 $r\otimes x$ 及 $y\otimes t$ 爲恒等，故吾人所採插入小括號之兩作法，並無區別。於兩情況，將有相同元素之表示法。此確因結合性質，而能同意數式

$$r\otimes s\otimes t,\quad r\otimes(s\otimes t),\quad (r\otimes s)\otimes t$$

均表示相同元素。

[原理 1.]（結合性）：於一群中，二元作業之定義，以使如 r，s，及 t 爲任何三元素，則

$$r\otimes(s\otimes t)=(r\otimes s)\otimes t.$$

已敍述之作業，是否一如“後隨”結合者？考慮一圓片之能繞一經過其中心之軸旋轉者一如自行車輪。假定a,b,c爲圓片旋轉之任一集合。由是，如$\otimes$表示“後隨”之作業，或旋轉之連續，$(a\otimes b)\otimes c=a\otimes(b\otimes c)$爲常眞否？此能得知小括號，徒於穩定序列中，用爲跳動：首爲a，而後b，而後c。其作業對旋轉或對任何運動集合爲結合的，而對其延伸，一容許之群作業，亦爲結合的。

[單位元素或恒等式]．其餘兩原理，討論與數目1連通觀念之引伸概念。此等原理，如認常用乘法爲吾人之二元作業，似覺非常自然。首先考察數目1於乘法中之性質，則

$$n\cdot 1=1\cdot n=n;$$

卽n及1之乘積爲n。延伸此觀念於群元素及一群之作業，乃抵達原理2。

[原理**2.**(恒等式)]．存在獨一之群元素I，以致，對任何群元素a,

$$a\otimes I=I\otimes a=a.$$

於二元作業之下，任何成對元素，與元素I對應於其本身。元素I稱爲群之“單位元素”(Unit element)或恒等式(identity)。字母I之使用，發生其與常用算術之數目1的相似性。

[練習**3.**]．假定一集合包含實數，而二元作業爲加法。其單位元素爲何？

[倒數或反元素]．與數目1相關之第二觀念，將予推廣及引伸於群者，爲倒數之概念。如u及v爲任何兩數，以致$uv=1$，乃謂u及v互爲倒數。次一原理，乃此概念之推廣。

[原理**3.**(相反)]．如a爲一群之任何元素，則存在一群之獨一之元素a^{-1},以致

$$a\otimes a^{-1}=a^{-1}\otimes a=I.$$

元素a^{-1}，稱爲a之反面。顯然a^{-1}之反面，爲$(a^{-1})^{-1}=a$．用作a之反面的符號，爲負指數，而係常代數情況之引伸，如$u\neq 0$，其反面(倒數)由u^{-1}示之。