总主编：杨一经 车慈晖

2003年

高考考点专题训练系列

GAO KAO KAO DIAN ZHUAN TI XUN LIAN XI LIE

数学

SHU XUE

主编：陈启华

GUANGDONG HIGHER EDUCATION PRESS
广东高等教育出版社

2003年高考考点专题训练系列　（总主编：杨一经　车慈晖）

数　学

主编：陈启华

编委：陈启华　陈森林

刘景亮　黄传龙

广东高等教育出版社

·广州·

图书在版编目（CIP）数据

数学/陈启华主编．—2版．—广州：广东高等教育出版社，2002．11
（2003年高考考点专题训练系列）
ISBN 7－5361－2658－1

Ⅰ．数…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．数学课－高中－升学参考资料　Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第003750号

广东高等教育出版社出版
电话：（020）87553335
广东新华发行集团发行
电话：（020）87058643
广东邮电南方彩色印务有限公司印刷
（广州市天河工业园建工路17号　邮编：510630）

787 mm×1 092 mm　16开本　11.75印张　271千字
2002年3月第1版　2002年3月第1次印刷
2002年11月第2版　2002年11月第2次印刷
定价：12.00元

前　言

尽快进入角色　得当用“心”备考

有序、高效训练　令你找到“感觉”

“把学校里学到的东西全忘掉之后，所剩下来的才是素质。”这是爱因斯坦的一句名言。这里有两个关键词：“学”和“忘”。一要学到手，二要“全忘掉”。只要用心，目标明确。这有如学练武功，先学步法，一招一式，扎扎实实，打好基础；进而学练套路，用功训练，用心领悟；再而将所学融会贯通，务求熟练掌握，熟而生巧，巧而创新，运用自如，这时，便到达“无法忘法”的境地，将它化为自己的东西了，成为自个儿的技能、品质、风格了。这便是爱因斯坦所说的学习已到达“全忘”的高境界。

高考备考复习过程也如此。要想取得复习的高效益和应试的好成绩，既要全力投入，刻苦勤奋，通过一个个的训练掌握技能技巧，又要对所学内容认真揣摩，用心感受领悟，善于从中找到自己的感觉，摸到规律、诀窍，即由懂而熟，由熟而化，化为自己的思维能力、思维品质。此时，你就会视备考之苦为乐了。

《2003年高考考点专题训练系列》正是依据高考这一心智测试的高强度智力劳动的特点而精心编写的。各科编写紧扣考试命题和备考复习所依循的“法定文本”——《考试说明》的内容要求及试题设计形式。《高考考点专题训练系列》分语文、数学、英语（含听力）、综合、物理、化学、政治、历史、生物等册。编写人员先认真剖析本学科三年来的高考试卷结构，每个部分每一道考题的设计思路，考生作答得失的有关数据，以及有关信息，再结合学科复习备考实际，从中提取出备考的重要内容，按必考点、常考点组合成专题系列。每一学科大体分为三部分：

一、学科考点和试题概述——将考试内容和形式作总的分析，让考生居高临下，整体把握，明确复习备考方向、策略。

二、考点专题系列训练——这是主体部分。它以考点及专题为序，阐释考点内容，分析相应考题，指引备考对策和方法。每个专题编写了针对性较强的若干个训练，并对每个训练规定作答的速度要求（因为答题技能=作答准确程度+作答时间），方便考生自我训练和自我反馈评价。全册有几十至近百个训练。

三、其他——如综合训练、语文的名句默写、英语的听力等。

各科体例统一，训练序列统一，答案及提示附于后面。

本系列训练突出重点内容，解读考点要求，分析考题思路，导引解题方法。每个训练针对考点设计，强化思维能力，增强综合应用，训练容量充足，题目难易恰当，考生用心训练，必能找到感觉。

《2003年高考考点专题训练系列》由原广州市教委教研室副主任、特级教师杨一经和原广州育才中学副校长、现东山区教育局副局长车慈晖任总主编总策划，由具有多年高三教学实践、备考指导经验丰富的特级、高级教师任学科主编和编写工作。丛书在编写过程中，得到广州东山区教育局的大力支持和陈傅东局长、区教研室朱开伟主任的指导。广东高等教育出版社的领导和编辑高度重视，汇集有关信息，详作审订。特此奉献广大考生。

我们祈请专家、同行和广大考生批评指正。

编写说明

近年的数学高考命题，试卷整体平和、清新，突出了考基础，考潜能；体现了降低难度，减少计算量，增加给考生充分思考的时间；试题切入容易，使多数考生能够入手，但得高分不易；考察的重点在思考和推理上，减轻考生记忆负担；所采用的新题型具有“立意新、结构新、设问方式新”及整卷呈现“新题不难，难题不怪”的特点。

数学学科在形成人的综合文化素质和现代科技素质中有着不可代替的重要作用，这源于数学自身的文化性、应用性和理论性。试题注重考察数学的基础理论和基本方法，特别是具有较高思维价值、又在相关学科广泛应用的理论和方法，这些基本数学思想和方法，在知识的形成过程中发展，许多重要的例题和习题反映相关的数学理论的本质属性，蕴含着数学的重要的思维方法和思想精髓，对这类数学问题，通过类比、延伸、迁移、拓广，达到发挥教材的扩张效应，是扎实掌握基础知识的重要一课。数学能力的提高在于解题的质量而非解题的数量，应善于从题目的条件和求解（或求证）的过程中提取有用的信息，作用于记忆系统中的数学认识结构，推动题目信息的延伸，归结到某个确定的数学关系，形成一个解题的行动序列，这就是解题方向。题目信息与不同数学知识的结合，可能会形成多个解题方向，通过思考和操作，选取其中简捷的路径；同时，数学活动过程大量的是推理过程，发展数学的推理逻辑和推理方法的过程也发展了自身的抽象思维，考生应通过多种推理方法的合理运用与合理表述，培养思维的逻辑性、完整性和流畅性。本书在帮助考生面对上述要求，呈现了老师丰富的教学实践经验的凝练。

数学高考试卷有“3＋X”卷，“3＋2”科目组卷、新课程卷、文理合卷等多套。表1是不同试卷中解答题的考查内容及试题排序。

近年高校持续扩大招生规模，与1998年以前入学率只有30%的形势大不一样，试题难度下调，使不少平时中等偏上、基础扎实的非“尖子生”考出了惊人的好成绩，但多数考生的平均分仍不理想，特别是在“题海”中训练有素的考生依然是“稻花香里说丰收”，议论起来“听取蛙声一片”。面对2003年高考，广东高等教育出版社组织了长期在高三教学第一线的广州市第七中学陈启华、陈森林，华南师范大学附属中学刘景亮，广州大学附属中学

表 1

知识主体	主要考查内容	试题位置				
		现教材理科	现教材文科	新教材理科	新教材文科	文理合卷
函数	函数的概念、性质	(22)	(22)	(19)	(21)	(22)
复数	复数相等，模与辐角	(18)				(17)
三角	三角恒等变形，斜三角形求值		(19)		(18)	
不等式	解含参变量的不等式	(20)		(17)		
数列	等差、等比数列		(17)		(17)	(18)
立体几何	棱锥的体积，二面角	(17)	(18)	(20)	(20)	(19)
解析几何	直线与圆锥曲线，四点共圆	(19)	(20)	(22)	(22)	(21)
数学应用	以生活、生产为背景的实际问题，建立操作或函数或数列等数学模型	(21)	(21)	(18)	(19)	(20)

黄传龙等教师，根据高考命题的必考点，以高考要求为准绳，毫不吝惜地删除某些资料中的偏题、难题，立足于基础，重视“通法”，淡化“特技”，务实地帮助考生在基本数学方法的运用和提高思维层次上逐步提高数学能力。考生可以借助本书的同步专题训练，体验学会思考、体验形成解题方向，体验逻辑推理，进一步夯实基础。这样，仅从“应试”的角度来说，我们又何愁你对所述的八个必考点有一个完整而又刻骨铭心的了结！

本书以三大专栏的方式对考生全程指点：

[考点概述]　根据高考要求、制定该章节的学习目标。

[考题例析]　精选最具代表性的例题，深度剖析解题方向，解答明晰详尽。

[专题训练]　融会多年教学精华，分步提升数学能力，提供实践模拟。

本书中所使用的法定计量单位为中华人民共和国标准 GB 3100～3102—92 量和单位中的规定，其中如“$\tan x$”即是“$\mathrm{tg}\, x$”，“$\cot x$”即是“$\mathrm{ctg}\, x$”，“$\arctan x$”即是“$\mathrm{arctg}\, x$”，“$\mathrm{arccot}\, x$”即是“$\mathrm{arcctg}\, x$”，请同学们注意。

编　者

2002.9

目　录

考点一 函 数

函数是中学数学的重要组成部分，它几乎贯穿中学数学的始终，蕴涵几乎所有中学的数学理念、思想及方法.

§1.1 基本问题

[考点概述]

学好数学知识的关键是理解数学基础知识，了解知识发生、发展过程的来龙去脉，每个知识的关键点，从而形成井然有序的基础知识网络，在解题时达到呼之即出. 中学数学的函数主要可以分为两个部分.

第一部分研究的是函数图像与性质，主要有：函数的定义域、对应法则、值域、函数图像的单调性、奇偶性、周期性、函数图像与坐标轴的交点以及函数图像的极值点等特殊点、函数图像的渐进线等等.

函数的定义域是构成函数的两个最关键要素之一，是使函数有意义所必须具备的前提条件，没有定义域的函数根本就不能构成函数，而大多数学生最容易忽视这一点. 因此，无论何时都要优先考虑.

函数的对应法则是沟通函数定义域内的自变量与值域内的相应函数值关系的桥梁. 中学阶段所给出的函数的对应法则的方法常见的有三种：解析式、图像、图表. 在可能的情况下，要能用三种不同方式来表示同一函数，如：写出函数图像对应的解析式，画出函数的图像等等.

函数的值域是《函数》研究中的一个极其重要的落脚点，它是函数自变量取遍定义域内所有取值通过对应法则而对应得到的函数值的全体. 因此，当函数定义域是一个有限集时，函数的值域就可以通过对应法则而直接求得，这种方法是求函数值域最朴实而又最原始的方法，其局限性可想而知；当函数定义域是一个无限集时，直接求函数的值域就显得不是那么容易，所以只能借助自变量与因变量之间的某种"特殊的递变规律"来进行求解，即利用函数单调性求值域，并由此得到基本初等函数单调性之结论，从而产生出图像法（已经由函数单调性得以证明过的性质）求值域，进而又在化归思想的指引下产生换元法（复合分解化归为基本初等函数）求值域；当然，若自变量与因变量之间的"递变规律"一时难以发现，甚至通过换元法进行复合分解化归为基本初等函数也不易实现，即利用函数单调性求值域显得不太容易时，只能借助《反函数》中的方程

(反演)思想，反过来，站在函数值域的角度去研究函数的定义域，毕竟，x 与 y 处于等同位置，即若函数在定义域内自变量的取值 x 与值域内因变量的取值 y 对应，反之，若函数在值域内有因变量的取值 y，则必有与定义域内自变量的取值 x 对应，故若 y 是函数值域内的取值，则关于 x 的方程必有定义域内的解；但也并不是所有这样的方程都能分离出 x，这样，诸多其他的方法又不得不在具体的问题环境中得以自然产生，如：构造法等等．因此，函数的值域是《函数》学习中的一个难点．当然，函数的值域问题也包括了函数的最值问题．

函数的单调性是研究函数图像走势的一种重要工具，求函数的值域、比较函数值的大小、解不等式等等，它们都是函数单调性的几个极其重要的应用．要注意函数的单调性是针对函数定义域内的某个子区间而言，脱离函数定义域内的某个子区间谈函数的单调性是无意义的．当然，脱离函数定义域来谈函数的单调性更是无意义的．

函数的奇偶性是函数图像对称性的一种极其特殊的情形，奇函数是图像关于点对称函数的特例，偶函数是图像关于直线(轴)对称函数的特例，因此，学好函数的奇偶性是进一步为学好一般函数图像对称性问题打下扎实的基础．当然，要注意函数图像奇偶性中的 $f(x)$ 中的 x 的任意性及 $f(-x)$ 的存在性等问题，因此，奇(偶)函数首先要求定义域关于原点对称．

函数的周期性、函数图像与坐标轴的交点以及函数图像的极值点等特殊点、函数图像的渐进线等等也都是在研究函数性质过程中不可轻视的重要工具，因此，也要给予高度重视．

函数的图像是函数性质的直观载体，函数的性质可以通过函数的图像直观地表现出来，因此，掌握函数的图像是学好函数的关键．这也正是“数形结合思想”的体现．

第二部分研究的是以函数图像与性质为工具进行一些初等函数的研究，主要有：一次函数、二次函数、幂函数、指数函数与对数函数、三角函数与反三角函数、数列等等．

函数图像与性质是进行函数研究的工具，通过以一些初等函数为载体进行函数图像与性质的研究以加深对函数的理解，从而为今后进一步进行函数的研究打下扎实的基础．

数学的理念、思想及方法是数学的精髓之所在，也正是数学的魅力之所在．它是以数学知识为载体，蕴涵在数学的基础知识之中，在知识的发生、发展过程中得以自然形成．函数中的数学理念、思想及方法极其丰富，它几乎蕴涵所有中学阶段的数学理念、思想及方法．

常用的四大基本思想：函数与方程思想，主要是在方程中含有多个参数时所出现的“站在不同参数的角度看同一方程的反演思想”及“解方程时的参数个数与方程个数问题”；化归转化思想，主要是将不熟悉的非标准的问题通过定向变换归结转化为熟悉的标准的问题；数形结合思想，主要基于直观之物易于理解接受；含参问题的分类讨论思想，主要是在求解过程中条件不足时的一种迫不得已而加条件的思想．

常用的几大基本方法：配方法——主要是将问题归结为非负数，尤其是将问题归结为二次型；换元法——主要是将问题进行复合、分解、化归，实际上，它是一种函数变

换；待定系数法——主要是在模型已经知道的前提条件下，利用方程思想进行参数确定的问题.

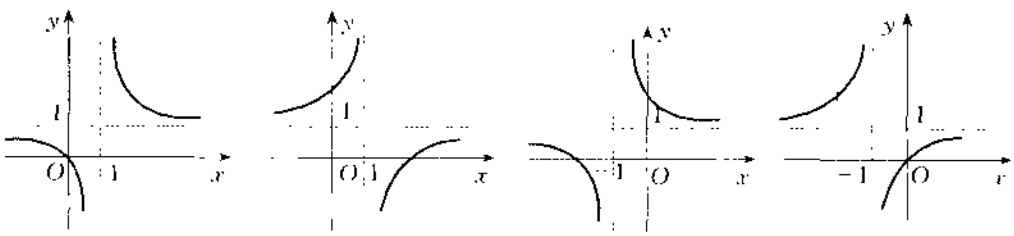
数学理论、思想及方法又是相互沟通、互为补充，何时及怎样在实际问题中运用这些数学理念、思想及方法便显得极为重要，只有在典型知识载体中仔细品味这些理念、思想及方法的特征，方可达到为我所用之目的.

真正掌握了基础知识、基本的数学理念、思想及方法，基本的数学能力就会自然形成，数学的修养及能力就会得以真正空前的提高，此时的高考卷当然已不在话下.

知识的纵横交错及理念、思想方法的丰富性决定了本讲知识的综合性. 只有在解题中通过仔细品味知识载体中蕴涵的基础知识及基本理念、思想方法，使基础知识及基本理论、思想方法熟练直至内化为本能，方可达到操之在我，用之灵活自如.

[考题例析]

例1 (1)(2002年全国) 函数 $y=1-\frac{1}{x-1}$ 的图像是 (   ).



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

重点考查函数图像平移及化归、类比等思想方法.

方法一： 本题的四个选择支实际上已提供了题目答案的提示，即选择支中的四个函数图像都为反比例型，故须将函数 $y=1-\frac{1}{x-1}$ 变形为反比例型，即 $y-1=-\frac{1}{x-1}$，显然将 $y-1=-\frac{1}{x-1}$ 与反比例函数 $y_1=-\frac{1}{x_1}$ 进行类比. 从图像的走势上进行类比，这两个函数在每个区间上应递增，故可排除 (A)、(C)；再从图像的对称性上进行类比，反比例函数 $y_1=-\frac{1}{x_1}$ 图像有对称中心 (0, 0)，设函数 $y-1=-\frac{1}{x-1}$ 图像对应着的对称中心为 (a, b)，则由类比得到方程组 $\begin{cases} a-1=0 \\ b-1=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$，所以，函数 $y-1=-\frac{1}{x-1}$ 图像有对称中 (1, 1)，故可排除 (D)，因此选 (B).

方法二： (特值排除法) 取 $x=2$，则 $y=0$，即函数 $y=1-\frac{1}{x-1}$ 的图像经过点 (2, 0)，故 (A)、(C)、(D) 都被排除，因此选 (B).

(2) 若定义在区间 $(-1, 0)$ 内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$ 满足 $f(x)>0$，则 a 的取

值范围是（　　）

(A) $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$　　　　(B) $\left(0,\ \frac{1}{2}\right]$

(C) $\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$　　　　(D) $(0,\ +\infty]$

重点考查对数函数的图像及分类讨论的思想.

方法一： 令 $t=x+1$，由 $x\in(-1,0)$ 知 $t\in(0,1)$，故 $f(x)=\log_{2a}t$，$t\in(0,1)$.

又 $f(x)>0$ 知 $2a>1$ 不可能，故 $0<2a<1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$，因此，选 (A).

方法二：（特值排除法）显然，$a\neq\frac{1}{2}$，故选择支 (B)、(D) 均被排除；再取 $a=1$，$f(x)=\log_2(x+1)$. 在 $x\in(-1,0)$ 上，$f(x)<0$，故选择支 (D) 不满足条件而被排除；因此，只有 (A) 可供选择.

说明： 1. 选择题的四个选择支在不少情况下就是题目答案的提示，且只有一个选择支正确，故只需排除其他三个即可，而排除的方法常见的有：特值排除法、估算排除法等.

2. 处理函数图像的平移变换及伸缩变化等问题的一般方法为：先鉴别出函数的标准模型，并用换元法将问题复合、化归为所确定的标准模型，而后将其与标准模型进行类比，即先利用标准模型的图像走势特征来估计出所求函数图像的走势特征，而后找一个特殊的点建立类比方程组，从而找到它与标准模型的差异，这一点是最关键的. 实际上，解题的过程就是“识别模型、回忆经验、提出解题方案”的过程.

例 2　(2001 年江西) 设 $a>0$，$f(x)=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$ 是 **R** 上的偶函数.

(1) 求 a 的值；　　(2) 证明 $f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上为增函数.

重点考查函数单调性、奇偶性及方程思想等.

分析：　(1) 欲求 a 的值，关键找到含 a 的方程. 由题目条件便可得到方程“$f(-x)=f(x)$”，这里 x 可取任意实数. 为更快地得到 a 的值，故取 $x=1$，此时便有：一个参数 a 对应一个独立方程 $f(-1)=f(1)$，因此，a 的值可求出.

解： (1) 因为　$f(x)=\frac{e^x}{a}+\frac{a}{e^x}$ 是 **R** 上的偶函数

所以　$f(-x)=f(x)$.

取 $x=1$，则 $f(-1)=f(1)$，即　$\frac{1}{ea}+ea=\frac{a}{e}+\frac{e}{a}$，

所以　$1+e^2a^2=e^2+a^2$，

所以　$(1-e^2)(1-a^2)=0$，

所以　$1-a^2=0$，又 $a>0$ 得 $a=1$.

(2) 因为 $a=1$，所以 $f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$

任取 x_1、$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

因为 $f(x_1)-f(x_2)=\left(e^{x_1}+\frac{1}{e^{x_1}}\right)-\left(e^{x_2}+\frac{1}{e^{x_2}}\right)=(e^{x_1}-e^{x_2})+\left(\frac{1}{e^{x_1}}-\frac{1}{e^{x_2}}\right)=$

$$(e^{x_1}-e^{x_2})+\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{e^{x_1+x_2}}=(e^{x_1}-e^{x_2})\frac{e^{x_1+x_2}-1}{e^{x_1+x_2}}.$$

由 x_1、$x_2\in(0,+\infty)$知 $e^{x_1+x_2}-1>0$，由 $x_1<x_2$ 知 $e^{x_1}-e^{x_2}<0$，

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 上增函数.

说明：1. 函数奇偶性的一个重要性质：函数 $f(x)$为奇函数$\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0$；函数 $f(x)$为偶函数$\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0$.

2. 证明函数单调性的关键在于判断出 $f(x_1)-f(x_2)$的符号！一般情况下，目标就是想方设法将 $f(x_1)-f(x_2)$分解成能够判断正负因式乘积的形式.

3. 解题务必紧盯目标，这样，数学的理念、思想方法便会自然形成.

例 3 （2000 年上海）设函数 $y=f(x)$是最小正周期为 2 的偶函数，它在区间 $[0,1]$ 上的图像为如图 1.1-1 所示的线段 AB，则在区间 $[1,2]$ 上 $f(x)=$______.

重点考查表示函数对应法则的不同形式间的转换、函数图像的周期性、对称性及待定系数法等.

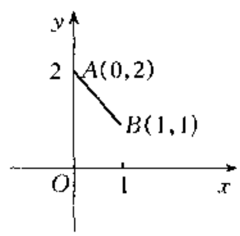


图 1.1-1

分析一：利用偶函数图像的对称性得到函数 $y=f(x)$在区间 $[-1,0]$ 上的图像，而后利用函数的周期性得到函数 $y=f(x)$在区间 $[1,2]$ 上的图像，最后利用待定系数法求得函数 $y=f(x)$在区间 $[1,2]$ 上的解析式.

解：由图及函数的性质不难发现：函数 $y=f(x)$在区间 $[1,2]$ 上的图像是以点 $(1,1)$、点 $(2,2)$ 为端点的线段.

设线段所在直线方程为 $f(x)=ax+b$，则$\begin{cases}a+b=1\\2a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$.

所以 在区间 $[1,2]$ 上 $f(x)=x$.

分析二：实际上，本题的已知条件是：$\begin{cases}f(x+2)=f(x)\\f(-x)=f(x)\\\text{当 }x\in[0,1]\text{时，}f(x)=-x+2\end{cases}$

而目标是：求当 $x\in[1,2]$ 时 $f(x)$的解析式. 对目标与已知差异分析便不难发现：问题的关键在于利用条件将目标区间 $[1,2]$ 转化到已知区间 $[0,1]$ 上.

解：设 $x\in[1,2]$，则 $2-x\in[0,1]$.

又函数 $y=f(x)$在区间 $[0,1]$ 上的图像是以点 $(0,2)$、$(1,1)$ 为端点的线段，

设线段所在直线方程为 $f(x)=ax+b$，则$\begin{cases}a+b=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}$.

所以 在区间 $[0,1]$ 上 $f(x)=2-x$，

所以 $f(2-x)=2-(2-x)=x$.

又函数 $y=f(x)$是最小正周期为 2 的偶函数，故 $f(2-x)=f(-x)=f(x)$.

所以 在区间 $[1,2]$ 上 $f(x)=x$.

说明：“方法一”较之“方法二”易于理解．这是因为“方法一”是借助了函数图像这一直观载体，而“方法二”完全是从代数推理的角度进行问题的解决，显得缺乏依托感．因此，在进行问题解决时，要尽可能地借助图像这一直观载体为依托，使问题便于理解．

例 4　若关于 x 的方程 $1+\log_2 x=2\log_2(x-a)$ 有惟一解，求实数 a 的取值范围．

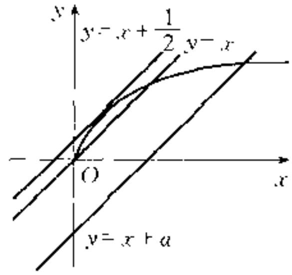


图 1.1-2

重点考查对数运算、含参问题的方程及数形结合、方程思想等．

分析：先通过对数运算，将超越方程化归为普通方程，即有 $\sqrt{2x}=x-a$　$(x>0)$．

方法一：（数形结合）将问题归结为：求函数 $y=\sqrt{2x}$ $(x>0)$ 与 $y=x-a$ 图像有惟一交点的参数 a 的取值范围，如图 1.1-2．

解：因为 $1+\log_2 x=2\log_2(x-a)\Leftrightarrow\sqrt{2x}=x-a$　$(x>0)$，由图 1.2-1 不难发现：当直线 $y=x-a$ 与曲线 $y=\sqrt{2x}$　$(x>0)$ 相切时，原方程有惟一解，此时不难求得参数 a 的值为 $-\frac{1}{2}$；当参数 $a\in[0,+\infty)$ 时，直线 $y=x-a$ 与曲线 $y=\sqrt{2x}$　$(x>0)$ 只有一个交点，即原方程有惟一解．因此，所求参数 a 的取值范围为 $a\geqslant 0$ 或 $a=-\frac{1}{2}$．

方法二：（分离参数）欲求参数 a，若能将参数 a 分离出来，则问题便可归结为：当参数 x 与 a 满足一一对应时，求参数 a 的取值范围．

解：因为　$1+\log_2 x=2\log_2(x-a)\Leftrightarrow\sqrt{2x}=x-a$　$(x>0)$ $\Leftrightarrow a=x-\sqrt{2x}$ $(x>0)$，

设 $t=\sqrt{2x}>0$，则 $x=\frac{t^2}{2}$，故 $a=\frac{t^2}{2}-t$　$(t>0)$，即 $a=\frac{1}{2}(t-1)^2-\frac{1}{2}$ $(t>0)$．

显然，这里的参数 t 与参数 x 一一对应，故问题转化为：当参数 t 与 a 满足一一对应时，求参数 a 的取值范围．因此，不难发现：所求参数 a 的取值范围为 $a\geqslant 0$ 或 $a=-\frac{1}{2}$．

方法三：（求根公式）由 $1+\log_2 x=2\log_2(x-a)\Leftrightarrow x^2-2(a+1)x+a^2=0$　$(x>0$ 且 $x>a)$，故可将问题归结为一元二次方程 $x^2-2(a+1)x+a^2=0$ 在 $x>0$ 且 $x>a$ 上有惟一解．因此，我们可以先求出该方程的根，而后根据条件进行参数范围的求解．

解：由 $1+\log_2 x=2\log_2(x-a)\Leftrightarrow x^2-2(a+1)x+a^2=0$　$(x>0$ 且 $x>a)$ 知：

①当 $\Delta=0$，即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，方程 $x^2-2(a+1)x+a^2=0$ 有惟一的根，即 $x=\frac{1}{2}$．显然，$x=\frac{1}{2}$ 满足 $x>0$ 且 $x>a$．因此，$a=-\frac{1}{2}$ 满足条件．

②当 $\Delta>0$，即 $a>-\frac{1}{2}$ 时，方程 $x^2-2(a+1)x+a^2=0$ 有两个实数根，即 $x_1=(a+1)+\sqrt{2a+1}$ 或 $x_2=(a+1)-\sqrt{2a+1}$. 显然，x_1 满足 $x>0$ 且 $x>a$. 因此，欲使方程 $x^2-2(a+1)x+a^2=0$ 在 $x>0$ 且 $x>a$ 上有惟一解，则只须 x_2 不满足 $x>0$ 且 $x>a$，故只须 $x_2\leqslant a$，即 $(a+1)-\sqrt{2a+1}\leqslant a\Leftrightarrow a\geqslant 0$.

综上知：所求参数 a 的取值范围为 $a\geqslant 0$ 或 $a=-\frac{1}{2}$.

方法四：（根的分布）由 $1+\log_2 x=2\log_2(x-a)\Leftrightarrow x^2-2(a+1)x+a^2=0\quad(x>0$ 且 $x>a)$，故可将问题归结为一元二次方程 $x^2-2(a+1)x+a^2=0$ 在 $x>0$ 且 $x>a$ 上有惟一解. 因此，我们也可以借助二次函数 $f(x)=x^2-2(a+1)x+a^2$ 的图像进行应方程 $x^2-2(a+1)x+a^2=0$ 根的讨论.

解：$1+\log_2 x=2\log_2(x-a)\Leftrightarrow x^2-2(a+1)x+a^2=0\quad(x>0$ 且 $x>a)$，设 $f(x)=x^2-2(a+1)x+a^2$，则由函数 $f(x)$ 的图像（图 1.1－3）不难发现：方程 $x^2-2(a+1)x+a^2=0$ 在 $x>0$ 且 $x>a$ 上有惟一解的充要条件是 $\Delta=0$ 或 $\begin{cases}\Delta>0\\ f(a)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}$ 或 $a\geqslant 0$.

因此，所求参数 a 的取值范围为 $a\geqslant 0$ 或 $a=-\frac{1}{2}$.

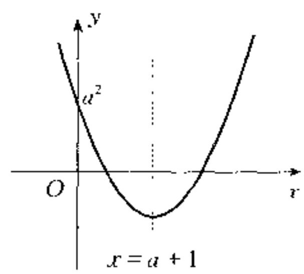


图 1.1－3

例 5　（1）求函数 $y=x+\sqrt{2x+1}$ 的值域.

重点考查求函数的值域方法中的单调性法、换元法、反演（方程）思想、图像法等.

分析一：（单调性法）根据函数值域的意义，函数值域是通过取遍函数定义域内自变量的所有取值而对应得到的函数值的全体. 当函数的定义域是无限集时，直接求函数的值域便显得难以进行！能否借助自变量与因变量之间的某种“特殊的递变规律”来进行求解，即利用函数的单调性求值域！从函数的结构来看，本函数由函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{2x+1}$ 叠加而成，因此易证原函数在定义域区间上为单调递增函数，故结果已显然！即有：$y\geqslant-\frac{1}{2}$.

解：易证函数 $y=x+\sqrt{2x+1}$ 在 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，故函数 $y=x+\sqrt{2x+1}$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

分析二：（换元法）最棘手的是根式 $\sqrt{2x+1}$，故干脆把根式 $\sqrt{2x+1}$ 当作整体 t 进行“打包”换元！

解：令 $t=\sqrt{2x+1}\quad(t\geqslant 0)$，则 $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$，

所以 $y=\frac{1}{2}(t^2+2t-1)\quad(t\geqslant 0)$.

故　$y \geqslant -\frac{1}{2}$.

故函数 $y=x+\sqrt{2x+1}$的值域为$\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

分析三：（数形结合）站在方程角度上看，参数 x 与 y 的位置等同！故问题化归为：关于 x 的方程 $(y-x)=\sqrt{2x+1}$有解，求 y 的取值范围．又 $(y-x)=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}u=y-x\\u=\sqrt{2x+1}\end{cases}$，由图 1.1－4 不难发现：$y\geqslant-\frac{1}{2}$.

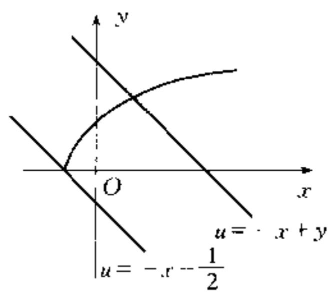


图 1.1－4

分析四：（求根公式）$y=x+\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow x^2-2(y+1)x+(y^2-1)=0 \quad \left(x\geqslant-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x=(y+1)\pm\sqrt{2y+1}$ $\left(x\geqslant-\frac{1}{2}\right)$，依题意，只需有 $(y+1)+\sqrt{2(y+1)}\geqslant -\frac{1}{2}\Leftrightarrow y\geqslant-\frac{1}{2}$.

分析五：（根的分布）$y=x+\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow x^2-2(y+1)x+(y^2-1)=0 \quad \left(x\geqslant-\frac{1}{2}\right)$.

设 $f(x)=x^2-2(y+1)x+(y^2-1)$，依题意，由二次函数 $f(x)$的图像不难发现：

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)\leqslant0 \text{ 或}\begin{cases}f\left(-\frac{1}{2}\right)>0\\ y+1>-\frac{1}{2}\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow y\geqslant-\frac{1}{2}.$$

(2) 求函数 $y=\frac{2x+1}{x^2+2x+3}$的值域.

重点考查求函数的值域方法中的反演（方程）思想之判别式法等.

分析：期望通过利用函数自变量与因变量之间的“递变规律”进行求解，但本函数自变量与因变量之间的“递变规律”一时难以发现，故利用函数的单调性求本题值域便显得不太容易！但从方程的角度上看，x 与 y 的位置是等同的．因此，若函数在定义域内有自变量的取值 x，则必有与值域内因变量的取值 y 对应，反之，若函数在值域内有因变量的取值 y，则必有与定义域内自变量的取值 x 对应！故假设 y 是函数值域内的取值，因本函数的定义域为 **R**，故则关于 x 的方程 $y=\frac{2x+1}{x^2+2x+3}$必有实数解！即 $y=\frac{2x+1}{x^2+2x+3}\Leftrightarrow yx^2+2(y-1)x+3y-1=0$．当 $y=0$ 时，$x=-\frac{1}{2}$满足条件；当 $y\neq0$ 时，$x=\frac{2(1-y)\pm\sqrt{\Delta}}{2y}$，因 $x\in\mathbf{R}$，故只须当 $\Delta\geqslant0$ 时便可满足条件！

解：$y=\frac{2x+1}{x^2+2x+3}\Leftrightarrow yx^2+2(y-1)x+3y-1=0$.

当 $y=0$ 时，有 $x=-\frac{1}{2}$，故满足条件；

当 $y\neq 0$ 时，有 $x=\dfrac{2(1-y)\pm\sqrt{\Delta}}{2y}$，因 $x\in\mathbf{R}$，故只须当 $\Delta\geqslant 0$，即$4(y-1)^2-4y(3y-1)\geqslant 0$，

所以　$2y^2+y-1\leqslant 0$

所以　$-1\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}$.

综上知，所求值域为$\left\{y\mid -1\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$.

(3) 求函数 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$的最小值.

重点考查求函数的值域方法中的单调性法、换元法、反演（方程）思想、图像法等.

分析一：（构造单调函数）期望通过利用函数自变量与因变量之间的“递变规律”进行求解，但直接一眼也难以发现“递变规律”，故先将最棘手的根式$\sqrt{x^2+4}$当作整体 u 进行“打包”换元，而后再看规律．不难发现：$y=u+\dfrac{1}{u}$（$u\geqslant 2$），该函数由增函数 $y_1=u$ 与减函数$y_2=\dfrac{1}{u}$相加而成，故该函数的单调性还是不明确．而 $y=\left(\sqrt{u}-\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)^2+2$　（$u\geqslant 2$）就可以解决原先的那种不和谐.

解：令 $u=\sqrt{x^2+4}$　（$u\geqslant 2$），则 $y=u+\dfrac{1}{u}=\left(\sqrt{u}-\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)^2+2$.

令 $v=\sqrt{u}-\dfrac{1}{\sqrt{u}}>0$　易知 v 在 $u\in[2,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $v\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为　易知 $y=v^2+2$ 在 $v\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上是增函数，

所以　$y\geqslant\dfrac{5}{2}$，

所以　$y_{\min}=\dfrac{5}{2}$.

分析二：（以退为进）先考察函数 $y=u+\dfrac{1}{u}$　（$u>0$）的单调性，不难发现：函数 $y=u+\dfrac{1}{u}$　（$u>0$）在 $u=1$ 时取最小值 2，因此，$u=1$ 是函数单调区间的一个分界点．当 $u\to\infty$，则$\dfrac{1}{u}\to 0$，此时 u 就为函数值的主部，故自然会猜测函数 $y=u+\dfrac{1}{u}$在$[1,+\infty)$ 上的单调性与函数 $y=x$ 在 $[1,+\infty)$ 上的单调性相同，即为单调递增；相反，$u\to 0$，则$\dfrac{1}{u}\to\infty$，此时$\dfrac{1}{u}$就为函数值的主部，故自然会猜测函数 $y=u+\dfrac{1}{u}$在$(0,1)$ 上的单调性与函数 $y=\dfrac{1}{x}$在 $(0,1)$ 上的单调性相同，即为单调递减．实际上，