

# 机电控制工程

高钟毓 王永梁 编著

清华大学出版社



# 机电控制工程

高钟毓 王永梁 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

## 内 容 提 要

本书讨论先进的机电一体化产品或系统的共性关键技术,着重以机电结合的控制系统为基础,阐述和讨论有关的理论分析方法和工程设计技术。主要内容包括受控机械动力学、机电控制元件、机电反馈控制系统数学模型、脉冲-数字伺服系统原理、模拟控制系统分析与设计、采样-数据控制系统分析与设计、计算机控制系统实现、计算机控制指令信号生成、基于 PLC 的顺序控制系统分析与设计等。本书可作为高等工科院校机电专业高年级学生及研究生的教材以及机电工程技术人员的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

机电控制工程/高钟毓,王永梁编著. —北京:清华大学出版社,1994  
ISBN 7-302-01494-9

I. 机… II. ①高…②王… III. 机电一体化-控制系统 IV. TP2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (94) 第 02077 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

印刷者:北京密云胶印厂印刷

发行者:新华书店总店北京科技发行所

开 本:787×1092 1/16 印张:23.75 字数:590 千字

版 次:1994 年 9 月 第 1 版 1994 年 9 月 第 1 次印刷

书 号:ISBN7-302-01494-9/TP·599

印 数:0001—4000

定 价:19.80 元

## 序 言

“机电控制系统工程”是机械技术与微电子技术集成的共性关键技术,是控制论在机电一体化产品或系统中具体应用的分支学科。它的研究对象是各种先进的自动化制造设备或系统,如数控机床、工业机器人、自动导引车、自动检验及装配设备等。它的内容着重从控制系统的角度,阐述和讨论有关系统的理论分析方法和工程设计技术。

本书从工程应用的角度,集中讨论了常见的四类控制系统的分析、设计及实现问题。它们是伺服传动系统、数字控制系统、顺序控制系统及过程控制系统。控制工程师们习惯上以反馈控制理论为主体,而较少注意顺序控制,因为这涉及到另一知识体系的逻辑系统分析与设计技术。然而,随着可编程序控制器在工业上的普遍应用,顺序控制问题正越来越受到重视。

随着微处理机及其接口技术的发展,各种各样的可编程序自动化设备普遍采用了计算机数字控制技术。这是当今先进的机电一体化产品的主流和发展方向。因此,本书的主体是阐述计算机数控理论和实现。但是,作为理论基础,对于模拟控制系统理论也给予了一定的重视,特别是关于以机械为受控对象的特殊控制问题。

本书的主要目的是为从事机电控制工程的高等学校师生和工程技术人员,提供一本有一定理论深度和实用价值的教材或参考书。因此,这本书包含了编著者多年的教学经验和科研成果。

高钟毓教授负责制定全书大纲,编写第一、二、四、五、六、七、九、十各章。王永梁副教授编写第三章。第八章由二人合写。

在酝酿和编写本书的过程中,赵长德副教授和董景新副教授曾给予了具体的指导和帮助。杭和平同志提供了部分实例。冷庆芳同志和许多毕业班学生为开设本课程的实验做出了贡献。特此表示衷心的感谢。

由于我们对先进的机电一体化产品和系统的经验有限,本学科的体系形成需要一定的发展过程,因此,这本书只能是“抛砖引玉”,必然存在许多缺点和错误。恳切希望采用本书的师生和其他读者提出宝贵的批评指正意见。

编著者

1993年2月于清华园

# 目 录

<b>第一章 引论</b> .....	1
§ 1.1 系统 .....	1
§ 1.2 控制系统 .....	2
§ 1.3 机电控制系统 .....	3
§ 1.4 本书的主要研究内容 .....	8
参考文献.....	9
习题.....	9
<b>第二章 受控机械动力学</b> .....	10
§ 2.1 机械移动系统.....	10
§ 2.2 机械转动系统.....	13
§ 2.3 机械传动机构.....	15
§ 2.4 机械与电路系统的相似性.....	22
§ 2.5 三轴定点旋转系统.....	29
§ 2.6 工业机器人.....	32
§ 2.7 自动导引车.....	39
参考文献 .....	43
习题 .....	43
<b>第三章 机电控制元件</b> .....	46
§ 3.1 感应式位移传感器.....	46
§ 3.2 光学位移传感器.....	52
§ 3.3 速度及加速度传感器.....	56
§ 3.4 步进电机.....	58
§ 3.5 直流电动机.....	65
§ 3.6 无刷直流电动机.....	73
§ 3.7 交流电动机.....	76
参考文献 .....	83
习题 .....	83
<b>第四章 机电反馈系统数学模型</b> .....	85
§ 4.1 磁悬浮轴承.....	85

§ 4.2	直流调速系统	88
§ 4.3	位置随动系统	93
§ 4.4	电液伺服系统	96
§ 4.5	关节力矩控制系统	101
§ 4.6	自动导引车驾驶系统	105
	参考文献	107
	习题	107
<b>第五章</b>	<b>脉冲-数字伺服系统原理</b>	<b>111</b>
§ 5.1	步进电机开环控制系统	111
§ 5.2	参考脉冲伺服系统	119
§ 5.3	采样-数据控制系统	125
§ 5.4	双轴数控系统	131
	参考文献	133
	习题	133
<b>第六章</b>	<b>模拟系统分析与设计</b>	<b>136</b>
§ 6.1	稳定性与极点配置	136
§ 6.2	稳态误差与内模原理	140
§ 6.3	暂态响应品质指标	143
§ 6.4	抗干扰能力	148
§ 6.5	PID 控制器	151
§ 6.6	复合控制器	155
§ 6.7	机械谐振补偿	158
§ 6.8	传动间隙振荡校正	162
§ 6.9	摩擦力矩自适应控制	168
	参考文献	176
	习题	177
<b>第七章</b>	<b>采样-数据系统分析与设计</b>	<b>183</b>
§ 7.1	数学模型	183
§ 7.2	采样器与数据保持	185
§ 7.3	脉冲传递函数	189
§ 7.4	闭环系统传递函数	195
§ 7.5	性能指标	198
§ 7.6	数字控制器设计——等价离散化法	208
§ 7.7	数字 PID 控制器	210
§ 7.8	多轴交叉控制器	217
	参考文献	220

习题.....	220
<b>第八章 计算机控制系统实现.....</b>	<b>224</b>
§ 8.1 微型计算机基本结构 .....	224
§ 8.2 汇编语言编程 .....	230
§ 8.3 接口技术 .....	236
§ 8.4 计算机控制中的高级语言 .....	248
§ 8.5 计算机闭环控制软件 .....	250
§ 8.6 多机系统的通信 .....	254
§ 8.7 采样周期选择 .....	257
§ 8.8 数字量化误差 .....	262
§ 8.9 实例 .....	268
附录 程序清单.....	273
参考文献.....	279
习题.....	279
<b>第九章 计算机控制指令信号的生成.....</b>	<b>285</b>
§ 9.1 点位控制指令信号 .....	285
§ 9.2 数字微分分析(DDA)法 .....	293
§ 9.3 直接函数计算法 .....	306
§ 9.4 复合控制的指令信号 .....	317
§ 9.5 自主式导引车的控制指令 .....	320
参考文献.....	325
习题.....	325
<b>第十章 基于 PLC 的顺序控制 .....</b>	<b>328</b>
§ 10.1 可编程序控制器.....	328
§ 10.2 布尔代数方程.....	330
§ 10.3 梯形逻辑图.....	335
§ 10.4 PLC 编程 .....	338
§ 10.5 顺序控制逻辑设计——开关表法.....	346
§ 10.6 顺序控制逻辑设计——状态图法.....	354
§ 10.7 具有随机输入的梯形图设计.....	358
参考文献.....	363
习题.....	363
<b>附录 Z 变换 .....</b>	<b>368</b>

**内容提要:** 本章主要是介绍一些名词定义,如系统、机电系统、控制系统、机电控制系统等,系统分类,以及《机电控制工程》的主要研究内容。

## § 1.1 系 统

从广义上来说,系统可以定义为相互作用或相互依存的任何一组形成统一整体的事物。因此,名词“系统”几乎可以用来描述任何可以想像的情况。在工程领域,系统可以是电的、机械的、液压的、气动的、热的、生物医学的,或者这些系统的某种组合。机械-电子系统(简称为机电系统)是机械与微电子紧密结合的一种组合系统。

对于实际应用来说,系统一般可以定义为任何一组存在某种因果关系的物理元件。原因将称为激励或输入;效果将叫做响应或输出。通常,输入和输出都是物理变量,例如,温度、压力、液位、电压、位移、速度等等。

在进行系统定量分析时,我们一旦辨识了系统的输入和输出,就必须发展它们之间的关系式,即数学模型。系统数学模型通常由输入和输出满足的一种运算法则或一组运算法则所组成。在已知输入的条件下,我们可以运用这些法则决定输出。图 1.1 表示了具有  $r$  个输入和  $m$  个输出的某一系统。其输出和输入的关系式在概念上可表示为

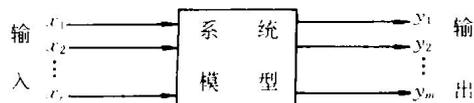


图 1.1 系统表示方法

$$y_i = L_i(x_1, x_2, \dots, x_r) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

其中  $L_i$  是系统算子。它代表在给定输入条件下计算输出的法则。因为为了决定输出,通常必须对输入进行一些运算,因此采用名词“算子”。

在进行系统研究时,许多不同类型的物理系统具有某些特性共同的系统算子  $L_i$ ,例如,机械系统和电路系统满足形式相同的微分方程(详见第二章 § 2.4 机械与电路系统的相似性)。这样,就导致了不按物理特性而按算子特性进行系统分类的方法。定义系统数学模型的算子可以是静态的或动态的,线性的或非线性的,定常的或时变的,确定性的或随机的,以及集中参数的或分布参数的。

静态系统是输出的现在值只依赖于输入现在值的系统。在动态系统中,输出既依赖于输入的现在值又依赖于输入的过去值。如果一个系统的算子满足幅度比例特性和叠加原理,则该系统叫做线性系统;否则,称为非线性系统。定常系统是系统算子不随时间变化的系统,而时变系统的算子是随时间变化的。如果系统算子是精确知道的,这种系统是确定性的;反之,

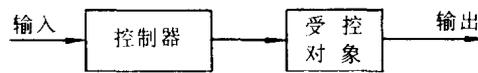
系统是不确定的或随机的。集中参数系统是输入作用能够被整个系统同时感受到的系统；而在分布参数系统中，由于分布元件的影响，输入作用不可能被整个系统同时感受。

我们的注意力将主要集中于在物理特性上是机械与电子组合的系统，在系统算子上是线性定常确定性集中参数动态系统。有关机械对象的非线性问题也将给予适当注意。

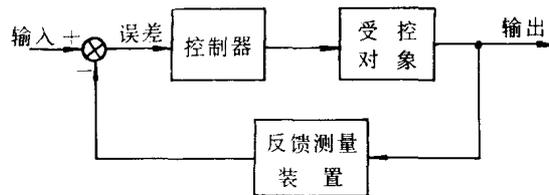
## § 1.2 控制系统

控制就是按照预先给定的目标，改变系统行为或性能的方法学。控制系统是依靠调节能量输入的方法使某些物理量受到控制的一类系统。通常，控制系统由控制器、受控对象（亦称过程）、反馈测量装置等部分组成。控制器是按预定的控制规律调节能量输入，以使系统产生所希望的输出。受控对象有时叫做受控过程，最简单的情况只是一个具体的物理过程。在一般情况下，受控对象包括功率放大器、执行机构、减速器、负载以及内反馈回路等。反馈装置是某种传感器测量单元，它检测输出变量，并将其转换为电信号反馈到系统的输入端。

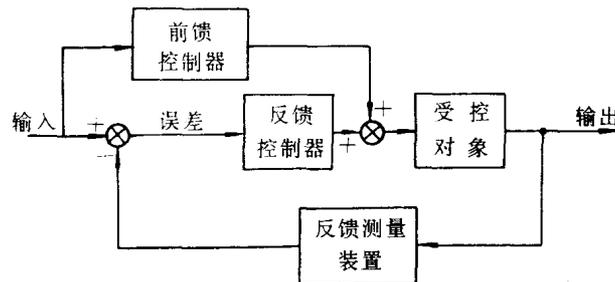
按照有无反馈测量装置分类，控制系统可分为开环控制系统和闭环（反馈）控制系统。开环控制系统是没有输出反馈的一类控制系统，如图 1.2(a) 所示。这种系统的输入直接供给控制器，并通过控制器对受控对象产生控制作用。几乎所有的家用电器，如洗衣机、电烤箱、微波炉、洗碗机等都是开环控制系统。再如，步进马达数控系统也是开环控制系统。开环控制系统的主要优点是简单、经济、容易维修。它的主要缺点是精度低、对环境变化和干扰十分



(a) 开环控制系统



(b) 反馈控制系统



(c) 复合控制系统

图 1.2 控制系统类型

敏感。在工业与国防等要求较高的应用领域,绝大多数控制系统的基本结构方案都是由反馈原理组成的,如图 1.2(b)所示。其输出的全部或部分被反馈到输入端。注意,这里的反馈信号是反抗或退化输入作用的,这种反馈称为负反馈。输入与反馈信号比较后的差值(叫做误差信号)加给控制器,再调节受控对象的输出,从而形成了闭环控制回路。因此,反馈控制系统亦称为闭环控制系统。反馈控制系统比较开环控制系统,具有一系列的优点,例如,精度高,动态性能好,以及抗干扰能力强,等等。它的缺点是结构比较复杂,价值比较昂贵,不容易维修。

为了进一步提高反馈控制系统的性能,有些控制系统在反馈控制的基础上,还附加有前馈控制器,如图 1.2(c)所示。这类控制系统称为复合控制系统,其目的是克服系统的动态误差。

根据采用的信号处理技术的不同,控制系统又可以分为模拟控制系统和数字控制系统。凡是采用模拟技术处理信号的控制系统,称为模拟控制系统;而数字控制系统则采用数字信号处理技术。对于给定的系统,选用何种技术取决于许多因素,如可靠性、精度、简单性、以及经济性等等。

随着微处理机技术的发展,现在有许多控制系统直接采用微处理机作为控制器,负责采集信号和处理控制规律以及产生控制信号等。这类控制器有的用于开环控制,有的用于闭环控制。采用微处理机作为控制器的控制系统称为计算机控制系统亦称为直接数字控制,简称为 DDC(Direct Digital Control)。如果受控过程为离散事件过程,它将产生数字信号。数字信号是容易直接与数字计算机匹配的。如果受控过程是连续时间过程,它所涉及的连续时间信号必须以周期性时间间隔(采样周期  $T$ )采样,并转换为数字信号,才能被计算机接收,如图 1.3 所示。这类控制系统称为采样-数据控制系统。

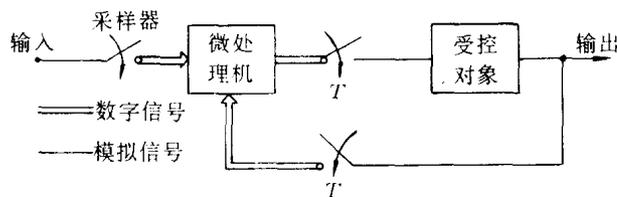


图 1.3 采样-数据控制系统

由于微处理机直接用于控制系统大大增强了数据处理的能力,因此,使得控制系统可以采用比较复杂的控制规律,如最优和自适应控制系统,可以达到更高级的性能指标。

### § 1.3 机电控制系统

在机械工程领域中,存在着大量以机械装置或机器为控制对象、以电子装置(包括微处理机)为控制器的各式各样的控制系统。这类系统的受控物理变量通常是机械运动,如位移、速度、加速度(力)、运动轨迹,以及机器操作和加工过程等等。今后,我们将统称这类控制系统为机电控制系统。

从机械工业应用的角度,机电控制系统可以依次划分为伺服传动系统、数字控制(NC)

系统、以及顺序控制系统等。下面,我们分别对这几类机电控制系统给出进一步的定义和描述。

### 1. 伺服传动系统

伺服传动系统是一种最基本的机电控制系统。其输入为模拟或数字的电的参考信号,输出(或受控物理变量)是机械位置和机械位移变化率。伺服传动系统主要用于机械设备位置和速度的动态控制,在数控机床、工业机器人、坐标测量机以及自动导引车等自动化制造、装配及检测设备中,已经获得非常广泛的应用。

图 1.4 表示了工业机器人的一个关节伺服传动系统。它的受控过程是工业机器人的关节运动,采用微处理机作为控制器。关节轴的实际位置由旋转变压器测量,转换为数字信号后反馈到微处理机控制器,从而形成位置闭环控制。

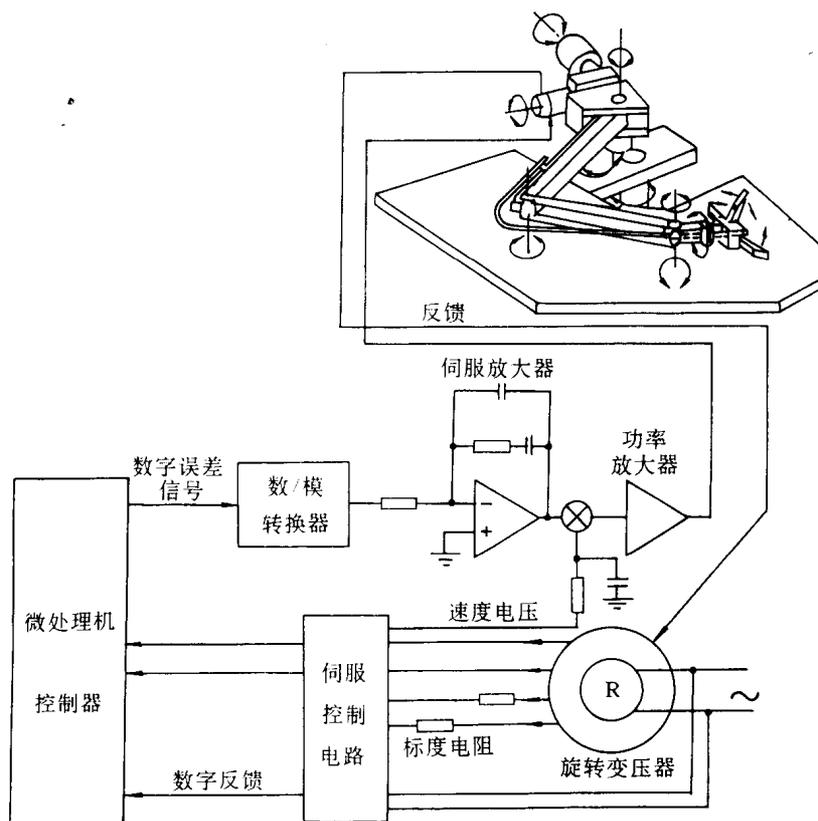


图 1.4 工业机器人的关节伺服传动系统

### 2. 数字控制系统

根据零件编程或路径规划,由计算机生成数字形式的指令,再驱动机器运动的一种控制系统,称为数字控制系统,简记为 NC (Numerical Control) 系统。当控制器由计算机实现时,又称为计算机数控系统,简记为 CNC (Computerized numerical control)。CNC 系统的优点是高度柔性。凡采用 CNC 系统的机床或其他制造设备,都是可编程序的。只要改变计算机程序,便可制造不同的工件。这比专用的自动化制造设备优越得多。

图 1.5 表示了一种计算机数控机床的信息流图。NC 零件程序由穿孔纸带或人工操作键盘输入,经过计算机处理后,区分为工艺数据和几何数据。工艺数据由主轴速度、工具选择以及冷却液等开关功能组成。几何数据经过粗精两次插补计算,生成工具运动的指令信号,保证加工零件的最终几何尺寸。

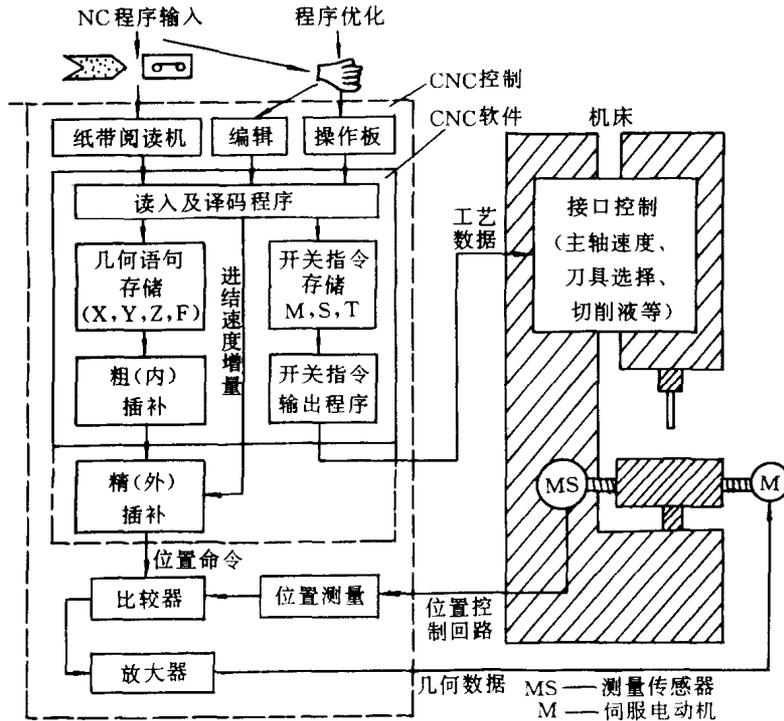


图 1.5 计算机数控信息流图

根据控制工具运动型式不同,NC 系统可分为点位控制、直线运动控制以及连续路径或轮廓控制,如图 1.6 所示。点位控制只要求工具运动前后的坐标位置准确,对运动过程中的轨迹是无要求的。直线运动控制及连续路径控制(或轮廓控制)要求工具运动的轨迹必须准确,因为在整个运动过程中,工具始终保持对零件的加工作用。

### 3. 顺序控制系统

按照规定次序执行一组操作的控制系统通称为顺序控制系统。在顺序控制系统中,每一步操作是一个简单的二进制动作,如操作开关的通断或制造设备专用控制器的启停等。

实现顺序控制功能可有多种手段,如继电器逻辑、固态集成电路、通用微处理机等。当前,普遍应用的是可编程序控制器(Programming Controller, 简记为 PC)作为顺序控制器,因为 PC 具有足够数量的输入/输出(I/O)端口,并带有专用的逻辑编程语言,用以实现顺序控制十分方便。

顺序控制系统不仅应用于数控机床、工业机器人等单机自动化的控制,而且应用于自动化制造单元和系统的过程控制。

图 1.7 表示了一个简单的自动化制造单元。它由送料和卸料传送带、上料和下料机器人、加工机床、自动装配机以及编码转台等组成。这些制造设备与可编程序控制器都有输入

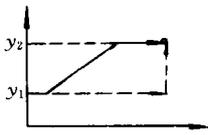
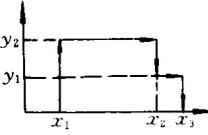
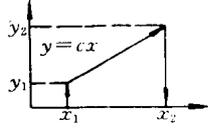
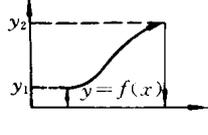
控制类型	问 题	刀 具	应 用
点位控制	 <p>无插补</p>	在工作台运动时,无切割	钻 点焊
直线运动控制 (简单)	 <p>无插补</p>	工作台运动时,有切割	平行车削 铣削
直线运动控制 (带直线插补)	 <p>直线插补</p>	工作台运动时,有切割	车削(锥度) 铣削(任意角度)
连续路径或轮廓控制	 <p>二次或三次多项式插补</p>	工作台运动时,有切割	车削 铣削 火焰切割 (任意轮廓)

图 1.6 NC 控制类型

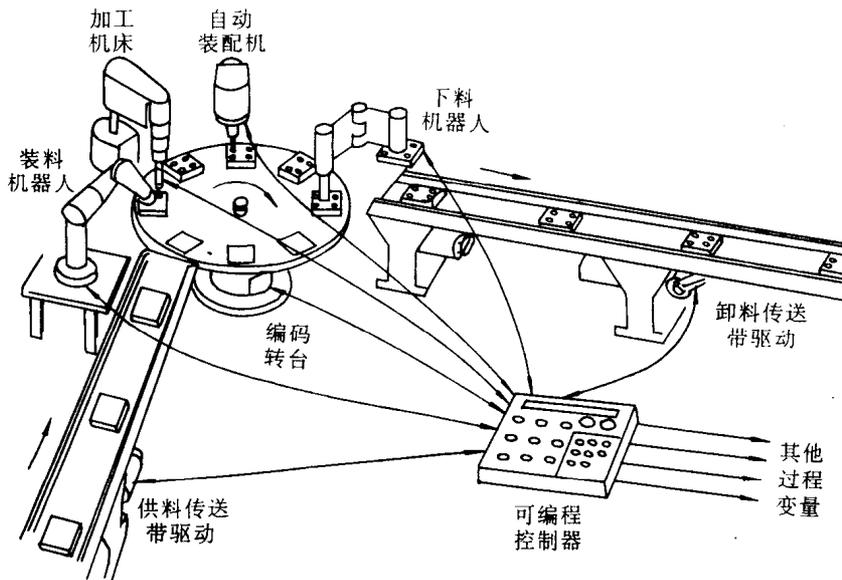


图 1.7 自动加工过程顺序控制

和输出信息交换。可编程序控制器根据各输入信号的状态,通过逻辑运算,决定各输出状态的变化,使相应设备启停,实现制造过程的自动化。

#### 4. 过程控制系统

在机械、冶金、化工、电力以及建材等生产过程中所采用的工业控制系统统称为过程控制系统。柔性制造单元、计算机集成制造(CIM)等自动化制造系统是典型的机械制造过程控制系统。

过程控制系统的受控变量是生产过程的物理量,可以是离散型的、连续型的、或者半连续型的。过程控制系统可以是开环的或者闭环的,但是,多数实际系统是闭环的。

图 1.8 是一个柔性制造单元的原理图。该系统由两台数控机床、两台工业机器人、三辆自动导引车、一个刀具库以及一个装卸站等组成,并且由一台单元控制计算机统一控制生产过程和物流。单元控制计算机与各个设备之间都有输入输出信号通过局部通讯网络(LAN)进行联系。它要确定或者优化一组直接数字控制器(DDC)或顺序控制系统的操作。目标可能是调度制造单元的零件加工或零件生产,以求达到制造单元的生产量最大。

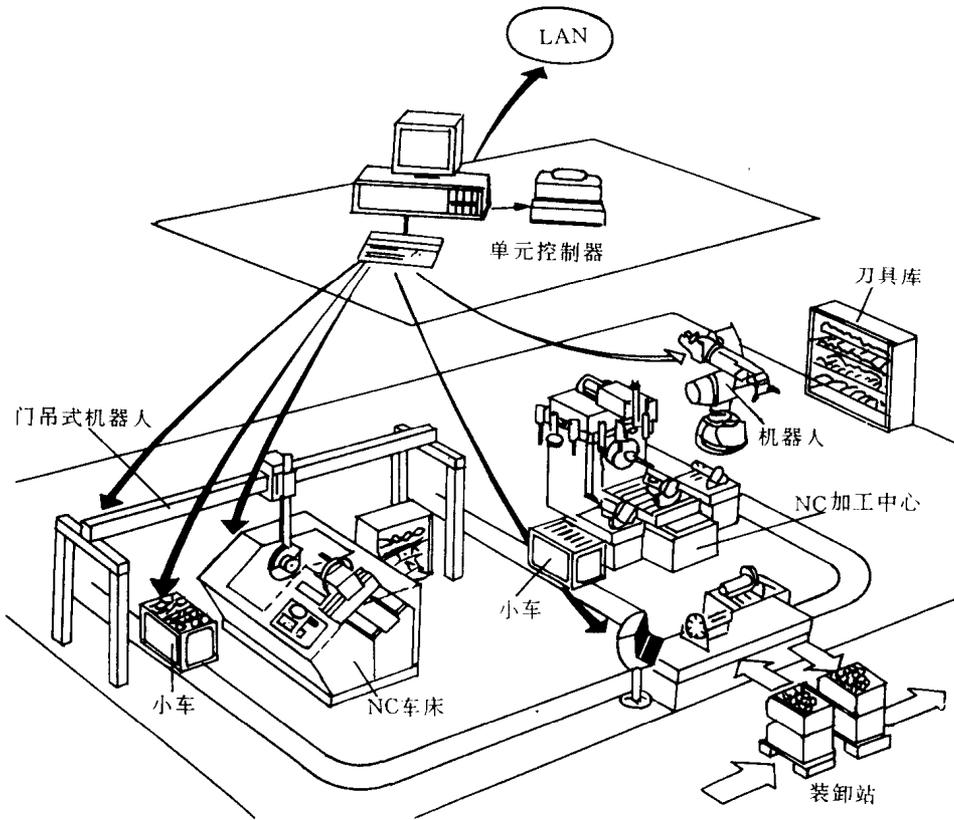


图 1.8 柔性制造单元

根据加工计划,自动导引车(或者其他运输装置)将工件由一个工作站传递到另一个工作站,使离散的制造设备有机地组合成一个加工群体。如果其中有一台机床出现故障,不能正常作业,那么,柔性制造系统有能力修改加工路线,及时地将工件转移到另一台机床上加

工,确保生产正常进行并达到最大生产量。因此,生产过程的控制应具有生产规划和动态调度能力。

上面介绍了机械工业中常见的几类机电控制系统。其中伺服传动系统和数字控制系统主要是解决机械设备的动态控制问题,因此,也可以统称为动态控制。顺序控制是机器操作步骤的控制,也是一种加工过程的控制。动态控制经常采用反馈控制模式,而顺序控制是逻辑控制模式,它们都可以理解为某种物理过程的控制系统。生产过程控制是更高层次的控制,它通过生产规划和调度以求达到生产量最大的目标。

## § 1.4 本书的主要研究内容

“机电控制工程”是机电一体化(Mechatronics)产品或系统的主要关键技术,是近年来随着高技术机械电子产品的发展而逐步形成的。它是工程控制论(Engineering Cybernetics)在机电一体化领域中具体应用的分支学科。换言之,机电控制工程是从事机电一体化产品或系统的控制工程的研究。

机电一体化产品或系统涉及的面很广,主要的应用环境是工厂自动化、办公自动化、家庭自动化以及社会服务自动化。其中,工厂自动化是具有决定意义的。

自动化工厂应首先在自动化制造系统中体现出来。图 1.9 表示了一个典型的自动化制造系统。任何先进的制造系统都与图 1.9 相似,包含了各种类型的可编程的自动化机器,如数控机床、工业机器人、自动物料贮运系统、以及自动化装配和检验设备等。它们采用了各种类型的计算机控制,形成了机械技术与微电子技术紧密结合的机电一体化产品或系统。

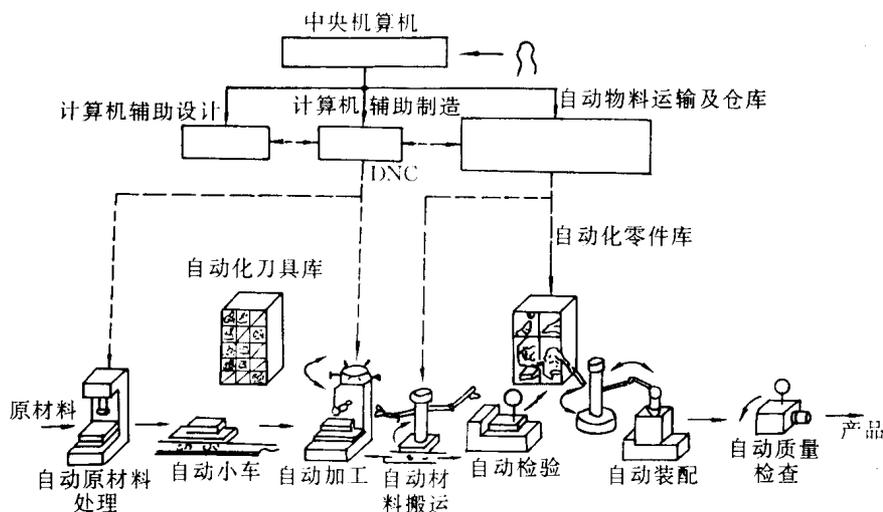


图 1.9 自动化制造系统

根据上述情况,我们确定《机电控制工程》的主要研究内容应该是机电一体化产品或系统的控制原理、系统分析设计与实现、以及详细标准。本书的注意力主要集中在自动化制造设备及系统的控制技术。具体内容为

1. 受控机械的动态模型。这是第二章所要讨论的内容。主要讨论各种机械受控对象的动力学和运动学模型。

2. 机电控制元部件。第三章讨论各种机电控制系统的反馈测量传感器、执行机构、以及有关的变换和放大电路。

3. 机电控制系统原理。这部分内容包括第四章的机电反馈系统数学模型和第五章的数字伺服系统原理。

4. 机电控制系统分析及实现。第六章讨论了模拟系统分析和设计方法。第七章讨论了采样-数据系统分析和设计方法。第八章为计算机控制系统的软硬件实现。

5. 计算机控制指令信号的生成。第九章讨论可编程序机器的各种运动轨迹的计算机控制指令信号的生成方法。

6. 基于 PC 的顺序控制系统的原理、分析及设计方法。这是第十章所讨论的内容。

### 参 考 文 献

1. Manfred Weck(1984),“Handbook of Machine Tools” Volume 3, John wiley & sons.
2. M. J. Henderson (1988),“ECONOMIC Computer-INTEGRATED Manufacturing” in “control and programming in advanced manufacturing” Edited by K. Rathmill, IFS(publications) Ltd. UK, springer-Verlag.
3. David D. BedWorth, Mark R. Henderson and philip M. Wolfe (1991), “Computer-Integrated Design and Manufacturing”, MC Graw-Hill, Inc.
4. Obert J. Mayhan (1984),“Discrete-Time and Continuous-Time linear Systems”, Addison-Wesley.
5. 高钟毓主编(1991),“机电一体化工程基础”,机械电子工程师进修大学机械学院。
6. RamaKant GayaKwad and Leonard sokoloff (1988),“Analog and Digital Control Systems”,Prentice Hall, Inc.
7. V. Daniel Hunt (1988)“MECHATRONICS: Japan's Newest Threat”.

### 习 题

- 1.1 什么叫做系统? 什么叫做系统数学模型?
- 1.2 系统有哪几种分类? 怎样的系统叫做机电系统?
- 1.3 线性系统定义,动态系统定义。
- 1.4 什么叫做控制系统? 控制系统分类。
- 1.5 什么叫做机电控制系统? 机电控制系统分类,试举例说明之。
- 1.6 《机电控制工程》研究对象和内容是什么?

## 第二章

# 受控机械动力学

**内容提要:** 本章讨论各种机械控制对象的动态模型,包括机械移动系统、机械转动系统、机械传动系统、三轴定点旋转系统、多自由度工业机器人、以及自动导引车等。所采用的方法是动力学普遍定律,如牛顿第二定理、欧拉动力学方程、拉格朗日方程,以及有关运动学的定律。同时,还介绍机械系统与电路系统相似性原理。机械系统可以等效为定压源供电或恒流源供电的电路系统。这样,可以采用求解电路的方法来建立机械系统的动态模型。

### § 2.1 机械移动系统

这一节提出线性移动机械系统元件的模型,以及由这些元件组成的系统方程的列写方法。机械元件包括质量、阻尼、以及弹簧。这些元件的符号如图 2.1 所示。

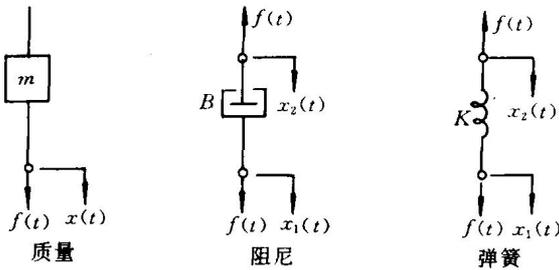


图 2.1 机械直线移动元件

$x(t)$  表示位移,  $m$  表示质量。假设所有的物理单位都是相容的,那么,根据牛顿第二定律,可得

$$f(t) = ma(t) = m \frac{dv(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (2.1)$$

其中  $v(t)$  为速度,  $a(t)$  为加速度。这里,已假定质量是一个刚体,即顶部的连结点相对底部的连结点是不能运动的。

对于其余两个机械元件,顶部连结点相对底部连结点是可以运动的,因此,为了描写这两个元件的运动,需要两个位移变量。下面,让我们讨论阻尼。如图 2.1 所示,阻尼的数学模型可表示为

$$f(t) = B \left( \frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right) \quad (2.2)$$

其中  $B$  为阻尼系数。注意,阻尼力正比于跨接在元件两端的速度之差。