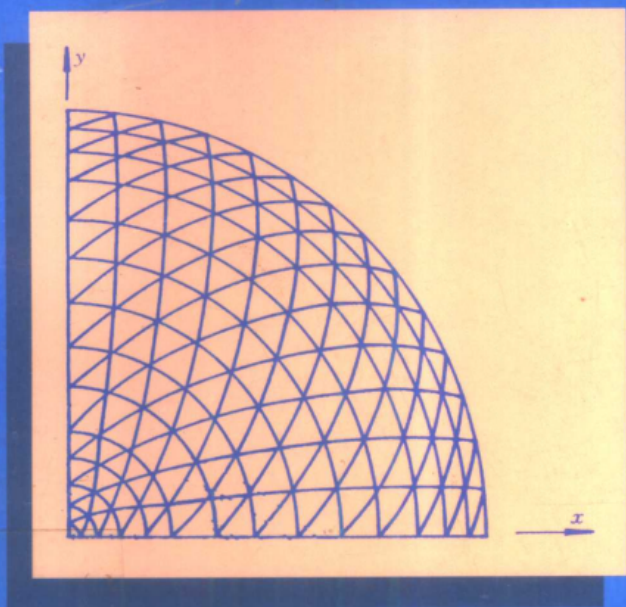


高等学校教材

电磁场数值 计算

倪光正 钱秀英 等编著



高等教育出版社

电磁场数值计算

倪光正 钱秀英 等编著

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目 (CIP) 数据

电磁场数值计算/倪光正等编著. —北京: 高等教育出版社, 1996
ISBN 7-04-005819-7

I. 电… I. 倪… III. 磁场-数值计算-计算方法 N.T
M153

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 09287 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码: 100009 传真: 64014048 电话: 64054588

新华书店总店北京发行所发行

化学工业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 12.375 字数 310 000

1996 年 12 月第 1 版 1996 年 12 月第 1 次印刷

印数 0001—2 005

定价 11.00 元

凡购买高等教育出版社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等
质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换

版权所有, 不得翻印

内 容 简 介

本书系统地论述了电磁场数值计算中常用的几种计算方法。结合工程应用的需要，阐明了各种方法的基本原理及其实施要点，并提供了实用的计算程序。

全书内容包括两大部分共八章：第一部分为基础知识，概括了电磁场的特征及其数学描述，离散方程组的解法；第二部分则在第一部分的基础上结合工程实际中的需要，具体介绍了常用的各种电磁场数值计算方法（数值积分法、有限差分法、有限元法、模拟电荷法、矩量法和边界元法）。

本书既可在高等工科院校电类专业大学生、研究生学习电磁场理论后，立足于工程电磁场计算机辅助分析能力培养的目的，提供深一层次的教学或参考学习用书，也可供从事电磁场应用研究的教师、科研工作者或电磁场工程方面的工程师和技术人员参考使用。

前 言

近代工程科学以计算机技术的飞速发展为基础，正日渐进入一个理论与工程实际相结合的全新时期。计算机辅助分析(CAA)、设计(CAD)和制造(CAM)*已为各类工程技术的最优化应用与发展注入了强大的生命力。顺应这一现实的发展态势，在电磁场应用研究领域，基于电磁场理论，在融汇数值计算方法和计算机软件技术新成果的基础上，衍生形成了电磁场数值计算这一新的学科分支。

科学发展史表明，自1865年麦克斯韦奠定经典电磁理论以来，电磁场工程技术不仅在以电磁能量和信息的传输、转换过程为核心的强电与弱电领域中，充分显示了其重要作用，而且发展至今，在旁及军事、经济、生态、医疗、天文、地质等众多领域中，与多种技术相结合，生成了许多新技术。显然，近代科学技术发展日益呈现出各学科间的相互交叉、渗透，工程技术日趋综合集成化的特点。这都进一步推动了电磁场工程技术在定量分析上的新需求，例如，正是在电磁场工程的CAA、CAD技术迅速发展的背景下，由国际电磁场理论及其应用研究领域的学术和工程界共同发起，组织了COMPUMAG(Conference on the Computation of Electromagnetic Fields)、ISEM(International Symposium

* CAA—Computer-Aided Analysis 的简称；CAD—Computer-Aided Design 的简称；CAM—Computer-Aided Manufacture 的简称。

on Advanced Computational and Design Techniques in Applied Electromagnetic Systems) 等著名的系列国际学术会议, 以及 TEAM (Testing Electromagnetic Analysis Methods) Workshop 等系列专题学术讨论会, 促成了电磁场数值计算领域极为广泛、活跃的国际学术交流态势。因此, 科学技术客观上的发展需要, 计算机技术所提供的物质基础, 为这门新学科分支制备了迅捷发展的充要条件。这就使电磁场理论得以与现代数学更紧密地相结合, 在定量分析的需求高度上, 迎合了当今工程科学技术发展的总趋势。

回顾我国电磁场理论教学, 在 1979 年开始引入“数值计算方法”的教学内容, 著者延续至今的教学实践表明, 学生对此学习内容浓厚的学习兴趣。通过数学、物理概念与工程观点的有机结合, 不仅提高了学生解决工程电磁场问题的实际能力, 而且提高了他们在计算机应用技术方面的能力, 教学效果显著。当今, 教育与科技相辅相成的发展, 理应是思索电磁场理论教学新路子的基点。在国家教委高等学校工科电磁场理论课程教学指导小组的规划下, 为适应电磁场课程后续教学的需要, 继续加强本科学生分析和解决工程电磁场问题的能力, 并使学生不间断地接受计算机辅助分析能力的训练, 以满足较高层次本科大学生的培养要求, 经过论证, 确定了编写本书的立项。

本书承接电工类“电磁场”和电子通信类“电磁场与电磁波”课程的基本要求, 以电磁场工程的 CAA 和 CAD 技术的基础知识传授为目的, 汇集了著者群体二十余年来在西安交通大学、浙江大学教学、科研过程中积累的实际材料、讲稿等, 经提炼、充实成书。全书从电磁场问题的数学模型构造出发, 以线性静态电、磁场为主要研究对象, 由浅入深、循序渐进地致力于各类实用数值解法基本原理与应用的讨论, 并附有相应的例题、框图和采用 Fortran 77 语言编写的实用计算程序。全书立意聚焦于帮助读者迅速有效地掌握定量分析各类工程电磁场问题所需的算法及其整

体实施过程。因此，力求内涵丰富且与工程实用接口，而不着意于描述前沿研究成果，并避免过多的数学论证和描述。这样，本书可作为电磁场课程的后续选修课程教材，易于为电类专业大学生和研究生所接受，也适合从事于工程电磁场应用研究的教师、科技工作者和工程技术人员使用。

参加本书编写的有倪光正（一、四、五、七章）、钱秀英（三、六章）、程卫英（四、五、七章例题和编程）、邱捷（八章）、钱金根（二章和六章例题）五位同志，由倪光正主编。编写中得到了浙江大学、西安交通大学二校电工原理教研室同仁们的热情关心和支持，全书并承清华大学马信山教授仔细审阅，提出了很多宝贵的意见和建议，谨在此一并致以衷心的感谢。

限于著者的能力与水平，书中不够完善乃至缺点错误之处，敬请使用本书的师生和广大读者批评指正。

著 者

一九九五年六月于浙江大学、
西安交通大学

目 录

前言	1
第一章 电磁场的特性及其数学模型	1
§ 1-1 数学模型	1
§ 1-2 电磁场数值计算的任务和内容	3
§ 1-3 电磁场的基本规律——麦克斯韦方程组	5
§ 1-4 场向量 H 、 B 、 E 和 J 的微分方程	10
§ 1-5 位函数的微分方程	11
§ 1-6 定解条件	13
§ 1-7 电介质极化场的分析	16
§ 1-8 磁介质磁化场的分析	18
§ 1-9 物理场的相似性	21
参考书目	23
第二章 离散方程组的计算机解法	24
§ 2-1 概述	24
§ 2-2 高斯消去法	25
§ 2-3 列主元消去法	31
§ 2-4 改进的平方根法	33
§ 2-5 松弛因子作自适应估计的 SOR 迭代法	35
§ 2-6 共轭梯度加速迭代法	40
§ 2-7 广义代数特征值问题的求解	42
附录 2.1 高斯消去法求解线性代数方程组程序	46
附录 2.2 高斯消去法求解对称正定线性代数方程组程序	48
附录 2.3 列主元消去法求解线性代数方程组程序	51
附录 2.4 改进的平方根法求解对称正定线性代数方程组程序	54
附录 2.5 松弛因子作自适应估计的 SOR 迭代法求解大型稀疏 线性代数方程组程序	56

附录 2.6 共轭梯度雅可比加速迭代法求解大型稀疏线性代数方 程组程序	61
附录 2.7 广义代数特征值问题 $Ax = \lambda Bx$ 的求解程序	65
参考书目与文献	75
第三章 数值积分法	76
§ 3-1 概述	76
§ 3-2 梯形与辛普生求积公式	78
§ 3-3 龙贝格积分法	80
§ 3-4 高斯求积公式	82
§ 3-5 椭圆积分的数值计算	84
§ 3-6 基于场量积分式的数值积分法	88
§ 3-7 基于场源离散化的数值积分法	100
§ 3-8 能量与力的数值积分计算	107
§ 3-9 典型算例	109
附录 3.1 变步长辛普生积分法程序	128
附录 3.2 龙贝格积分法程序	131
附录 3.3 一维高斯积分法程序	133
应用算题	135
参考书目与文献	137
第四章 有限差分法	139
§ 4-1 概述	139
§ 4-2 差分与差商	140
§ 4-3 差分格式的构造	142
§ 4-4 差分方程组的求解	150
§ 4-5 场强与电、磁积分量的计算	153
§ 4-6 典型算例	155
§ 4-7 等值点的寻求与描绘	170
应用算题	178
参考书目与文献	181
第五章 有限元法	183
§ 5-1 概述	183

§ 5-2 变分原理	186
§ 5-3 有限元法的基本原理	191
§ 5-4 有限元前、后处理的基础技术	209
§ 5-5 平行平面和轴对称泊松场的有限元方程	224
§ 5-6 非线性场中的有限元法	236
§ 5-7 时谐电磁场中的有限元法	245
附录 5.1 一阶有限元法的通用计算程序	257
附录 5.2 规则平面域的自动剖分程序	271
附录 5.3 圆形域的自动剖分程序	277
附录 5.4 有限单元编号按媒质特性重行排序的程序	281
附录 5.5 磁化曲线数值逼近的程序	282
应用算题	283
参考书目与文献	284
第六章 模拟电荷法	286
§ 6-1 概述	286
§ 6-2 模拟电荷法的基本原理与应用	288
§ 6-3 模拟电荷的类型及其电位、场强系数的计算式	295
§ 6-4 典型算例	300
应用算题	311
参考书目	312
第七章 矩量法	313
§ 7-1 概述	313
§ 7-2 矩量法的数学基础——加权余量法	314
§ 7-3 点匹配法与典型算例	323
应用算题	332
参考书目	332
第八章 边界元法	333
§ 8-1 概述	333
§ 8-2 基础知识	334
§ 8-3 边界积分方程	338
§ 8-4 边界元方程及方法实施	346

§ 8-5 典型算例	356
附录 8.1 线性单元边界元法的通用计算程序	359
应用算题	370
参考书目	371
应用算题解答与提示	373

第一章

电磁场的特性及其数学模型

本章基于电磁理论描述表征电磁场特性的数学方程和关系式，形成建立电磁场数学模型和实施数值计算方法的基础。应工程问题分析计算的需要，阐述中特别强调在场的特性上静态、准静态和动态电磁场之间的区别，并讨论了媒质不连续性和不均匀性的特征描述。最后，本章概括地提出了物理场的相似性，藉以进一步扩展本书分析内容的深广度。

§ 1-1 数学模型

回顾自然科学发展的历史，早在伽利略年代，即已认为理解宇宙的原理是数理。其后，牛顿（1642~1727）将力学法则用单纯的数学式来表达，结合由他创始的微积分方法，通过数学分析地球上的潮汐降落、摆的周期和天体中行星运动等自然现象，创立了牛顿力学。此后在包含物理学在内的自然科学领域内，致力于应用数学来阐明自然界各种现象，成为科学史的发展趋势。也就是说，人们应用单纯的数学关系式来描述自然法则，求其解答，并在与实验和观测结果相比较的基础上，去理解和应用自然现象。

近代，随着电子计算机的出现和发展，数学的应用在继续深入延拓到各工程、物理学科领域的同时，也进一步扩展到经济、生态、人口和社会等非物理学科领域。实践表明，许多以工程经验

判断、定性分析为依据的工程设计，现正逐步发展为相关的计算机辅助工程（CAE）和计算机辅助设计（CAD）等定量的工程优化设计。同样，许多以定性方法为基础的学科正在转向量化发展的道路，众多边缘学科应运而生。这就使数学在发展生产、经济管理以及各自然科学学科中的重要性日益为人们所理解和接受，促成了近代应用数学及其相关学科相辅相成的新发展。

当应用数学方法解决上述各类物理或非物理问题时，首先必须建立数学模型，然后得以在此模型的基础上进行实际问题的理论分析和科学研究。显然，建立的数学模型必须精确地逼近实际问题，否则在理论分析中即使采用最巧妙的数学处理，其结果也未必有用。因此，建立一个完善的数学模型乃是解决各类实际问题的关键：

所谓数学模型，指的是对客观事物的一种抽象的模拟，它遵循事物固有的规律性，通过数学语言（数学符号、数学表达式、图形等）刻划出客观事物的本质属性及其与周围事物的内在联系。应当指出，通常与客观事物完全吻合的数学表述并不多见，因此实际的数学模型往往是在对实际问题进行理想化假设后所给出的数学描述。此外，数学模型的确立，还必须要求它的分析计算结果能为实验、测试所证实，或者它能被推广说明许多事实，乃至可以预测为人们所公认的结果。例如，牛顿创立的万有引力定律就经受了对哈雷彗星的研究、海王星的发现等大量事实的考验。同样，麦克斯韦（1831~1879）在1865年提出电磁场基本方程组，并预言了电磁波的存在。至今一百多年来电磁学科技发展的进程证明了麦克斯韦方程组是宏观电磁场普遍适用的数学模型，奠定了经典电磁理论的基础。

既然数学模型是客观事物的一种数学描述，因而对于同一事物，基于不同的出发点，就可以有不同类型的数学模型。根据构造数学模型的数学方法分类，模型可以分为微分方程模型、积分方程模型、优化模型和控制论模型等。根据问题中变量的特征

分类，模型又可分为确定性模型与随机模型。根据变化情况又可分为连续型模型与离散型模型。此外，还有线性模型与非线性模型；静态模型与动态模型等分类方法。应指出，数学模型分类并不具有特殊的意义，但概念的引入将便于理解，有助于综合使用各种数学工具，从各个不同侧面去揭示某一实际问题的本质属性。

如上所述，宏观电磁理论最高度概括的数学模型就是麦克斯韦方程组。结合实际问题中千变万化的边界条件与初始条件，在引用相应的数学方法后，常用的各类电磁场的数学模型可以归结为微分方程模型、积分方程模型和属于优化模型的变分方程模型三大类。

§ 1-2 电磁场数值计算的任务和内容

鉴于工程电磁场问题的复杂性，即各类电磁装置在其结构、几何形状上的复杂性，以及在材料性质变化上的复杂性，致使应用于电磁场计算的各种解析方法，例如分离变量法、保角变换法、镜像法和格林函数法等，已经无法适应广泛工程问题分析求解的需要。这样，近 20 年来，随着计算机技术的飞速发展，属于近似计算方法范畴的电磁场数值计算方法得到了长足的发展，并最终已可满足科技和工程方面对于数学模型精确分析的实际需要。

电磁场数值计算的任务在于根据电磁场的基本特性，即基于麦克斯韦方程组，首先建立逼近实际工程电磁场问题的连续型的数学模型，然后采用相应的数值计算方法，经离散化处理，把连续型数学模型转化为等价的离散型数学模型——由离散数值构成的联立代数方程组（离散方程组），应用有效的代数方程组解法；计算出待求离散数学模型的离散解（数值解）。最后将通常所得电磁场的位函数离散解再经各种后处理过程，就可以得出场域中任意点处的场强，或任意区域的能量、损耗分布，以及各类电磁参

数值等，以达到理论分析、工程判断和优化设计等目的。

综合电磁场数值计算处理的全过程，其流程框图如图 1-1 所示，由图可见，除了各种数值计算方法为其核心内容外，执行电

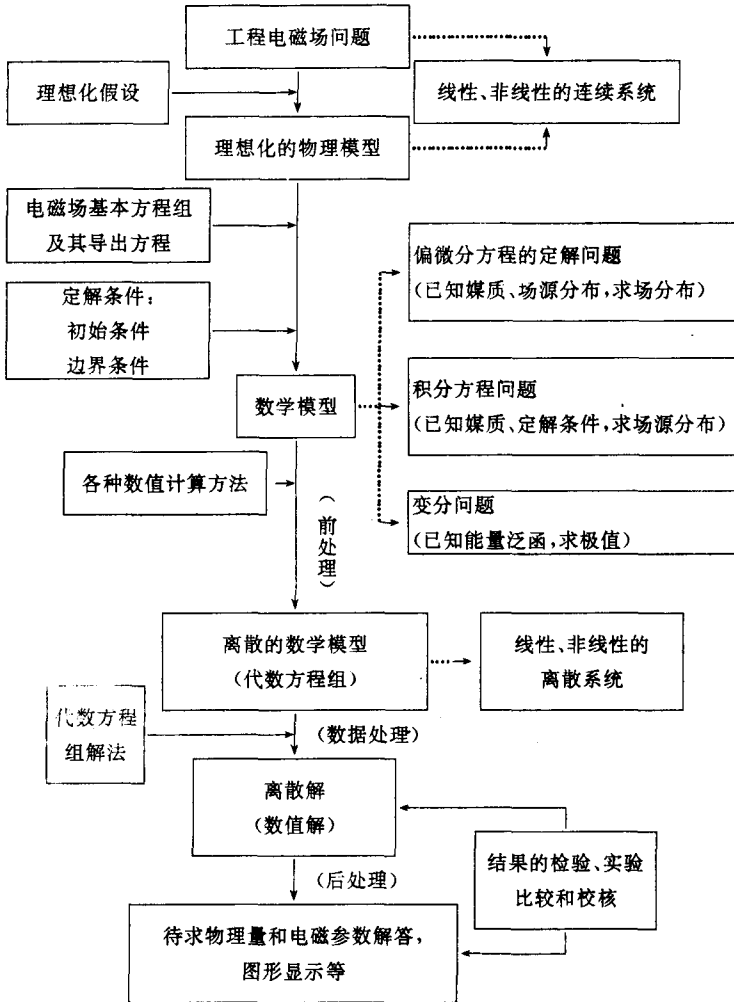


图 1-1 电磁场数值计算流程图

磁场数值计算不仅必须具备一定的数学、物理基础和有关电磁场的专门知识，而且建模过程在很大程度上还必须依赖于工程知识和经验的积累，使之有可能采用恰当的理想化假设，准确地给定问题的定解条件（初始条件和边界条件）。同时，对应于计算流程的前处理（如场域剖分、数据文件构成等）、数据处理和后处理（如等位线、通量线描绘等），分析者在计算机编程和应用方面的能力，以及现有的计算机软件支持条件等，均是实现数值计算的重要因素。

前已指出，高速、大容量计算机的问世，为高精度、高效率的数值计算奠定了基础。经过近 20 年的发展，电磁场数值计算已经取得大量应用研究和工程分析、设计的成果，各种电磁场 CAD 商品化软件开始进入相关的研究部门、生产企业，产生日益明显的经济效益。与此同时，电磁场数值分析不断完善，业已成为电理论学科中的一门新兴的应用学科分支。

就电磁场数值计算的核心内容——各种实用的数值计算方法而论，它们是将原连续型数学模型转化为等价的离散型数学模型的基础。取决于不同的数学内涵，目前在电磁场数值分析中常用的数值计算方法有：应用于微分方程型数学模型的有限差分法、有限元法和蒙特卡洛法；应用于积分方程型数学模型的模拟电荷法、矩量法和边界元法以及基于直接积分运算关系式的数值积分法等。此外，各类数值计算方法的相互组合，例如微分和积分组合型数学模型的单标量磁位法等，进一步扩展了数值计算方法在实用中的深度和广度。本书将分章阐述其中常用的主要方法及其工程应用。

§ 1-3 电磁场的基本规律——麦克斯韦方程组

宏观电磁现象的基本规律可以非常简洁地用一个方程组，即麦克斯韦方程组来表示。这一电磁场基本方程组的基本变量为四

个场向量：电场强度 E (V/m)；磁感应强度 B (T)；电位移向量 D (C/m²) 和磁场强度 H (A/m)，以及两个源变量：电流密度 J (A/m²) 和电荷密度 ρ (C/m³)，在静止媒质中其微分形式可以表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot B = 0 \end{array} \right. \quad (1-3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot D = \rho \end{array} \right. \quad (1-4)$$

为表征在电磁场作用下媒质的宏观电磁特性，尚应给出以下三个媒质的构成关系式

$$D = \epsilon E \quad (1-5)$$

$$B = \mu H \quad (1-6)$$

$$J = \gamma E \quad (1-7)$$

应当注意，式 (1-5) — (1-7) 中分别引入的媒质宏观特征参数——介电系数 ϵ ，磁导率 μ 和电导率 γ ，只有在线性且各向同性媒质的情况下，才是简单的常数。工程上广泛应用的铁磁材料，其 $B \sim H$ 关系呈现为含有磁滞效应和损耗的复杂的非线性规律，此时， $\mu = \mu(H)$ 为依赖于场量变化的某个函数表达式。此外， ϵ 和 μ 还可以描述各向异性材料，这时由于材料中通量密度方向与场强方向的不一致，它们应分别记作张量。若采用 SI 制，则对应于自由空间的 $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m； $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m，满足在真空中光速 $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 2.998 \times 10^8$ m/s 的基本关系。当电导率 γ 被认为等于零的情况下，仍有可能存在电流；这相当于在真空中存在有以速度 v 迁移的自由电荷密度 ρ ，从而形成 $J = \rho v$ 的运流电流的情况。因此，从全面分析电磁场问题的需要出发，还常引用另一基本方程，即表述电荷守恒定律的连续性方程：

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1-8)$$