

集合问题 100 例

韩文法编

广东教育出版社

集合问题 100 例

韩文法 编

广东教育出版社

集合问题 100 例

韩文法 编

*

广东教育出版社出版

广东省新华书店发行

广州红旗印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 7.875印张 151,000字

1986年7月第1版 1986年7月第1次印刷

印数 1—6,860册

书号 7449·140 定价 1.30元

前 言

集合的概念和方法已渗透到数学的一切领域，数学各个分支的体系无不是采用集合概念而构成。从逻辑观点看，全部数学就是集合论和它的一系列推论，毫无疑问在中学的数学教学中，集合也占有重要地位。

本书以教学大纲和教材为依据，并稍有提高，且与现代数学相联系，力图把一些抽象内容和概念写得浅显、通俗、生动些，便于读者阅读，目的是扩大教师和学生的知识领域，培养和发展学生的能力与智力，为提高和加强基础教学服务。

全书以叙述、论证方式进行编写，多从熟悉的概念出发，间有疑难问题时，为照顾读者水平，不作复杂的论证，凡具有初中以上数学水平的读者，均可看懂。对于中学师生，将是一本有益的补充读物。

限于编者水平，错误之处，欢迎批评指正。

编者 1984年6月

目 次

1. 什么是集合论?	1
2. 集合是什么?	2
3. 什么是子集合?	7
4. 什么是空集?	9
5. 什么是幂集合?	11
6. 集合论中有哪些常用符号?	14
7. 古典集合论建立在什么原则上?	16
8. 集合如何进行运算?	18
9. 什么叫对称差集?	22
10. 怎样证明集合的运算规律?	25
11. 什么叫对偶原理?	29
12. 什么是伯恩斯坦定理?	31
13. 有穷集的元素个数如何计算?	34
* * *	
14. 什么是函数?	36
15. 什么是映射?	38
16. 映射有些什么特殊形式?	41
17. 映射的基本性质是什么?	43
18. 什么叫复合映射?	45
19. 什么叫直积集合?	47
20. 什么叫“关系”?	49

21. “关系”有些什么性质?	52
22. 什么叫 RMI 原则?	54
23. 包含关系有些什么性质?	56
24. 什么叫等价关系?	58
25. 什么是等价类?	61
* * *	
26. 什么是基数?	65
27. 可数集有什么重要性质?	67
28. 无穷集的主要特征是什么?	72
29. 什么叫 Borel 集?	75
30. 为什么逻辑演算中的所有公式的集是可数的, 而 定义在公式集上的, 取公式为值的函数集是不可 数的?	77
31. 什么是连续统基数?	80
32. 什么是大基数?	82
33. 如何计算 $\aleph_\alpha$?	85
* * *	
34. 什么叫次序关系?	87
35. 什么是有序集?	89
36. 什么叫序型?	91
37. 基数和序型有何关系?	93
38. 序型是怎样运算的?	95
39. 什么叫序数?	99
40. 序数能够进行比较吗?	102

41. 什么是正序定理?	106
42. 什么是第二级序数?	109
43. 什么是有序集的敛尾性?	111

* *

44. 什么是集合序列的极限?	112
45. 什么是集合系?	115
46. 什么叫链?	117
47. 什么是集合的加标族?	120
48. 什么是最大(小)元与极大(小)元?	122
49. 什么叫极大原理?	124
50. 什么是超滤集?	126

* *

51. 什么是选择公理?	128
52. 什么是 ZFC 公理系统?	129
53. CH 的独立性是什么?	132
54. 什么是力迫法?	134
55. 什么是可构成集?	136
56. 什么是分球定理?	138

* *

57. 什么是计数基本原理?	140
58. 什么是集合的排列?	142
59. 什么是集合的组合?	144
60. 什么叫抽屉原理?	146
61. 抽屉原理有什么应用?	148

62. 什么叫置换?	151
63. 什么叫二元运算?	154
64. 什么是群?	156
65. 什么叫环?	158
66. 什么叫体?	160
67. 数集都能构成数环吗?	162
68. 什么叫格?	164
69. 什么叫集合的同构?	166

*

*

*

70. 什么是数学归纳法?	167
71. 什么是超穷归纳法?	170
72. 为什么下面各例不能构成集合?	172
73. 有理数集有什么性质?	174
74. 实数集有什么性质?	176
75. 复数集有什么性质?	179
76. 什么叫计算复杂性?	181
77. 你了解集合论创始人康托吗?	184
78. 什么叫布尔代数?	185
79. 什么是模糊集合?	188

*

*

*

80. 什么叫悖论?	190
81. 常见的悖论有哪些?	193
82. 什么是划分公理?	198
83. 所有集合为元素的集合存在吗?	200

* * *

84. 什么叫区间?	202
85. 什么叫度量空间?	204
86. 什么是波魏定理?	205
87. 闭集和开集有些什么性质?	207
88. 什么叫导集?	211
89. 直线上的点集有什么特性?	213
90. 开集是怎样构造的?	215
91. 康托三分集是什么样子?	217
92. 集合的测度是什么?	220
93. 什么叫连通集?	222
94. 什么叫列紧集?	224
95. 曲线是什么?	226
96. 什么叫凸集?	228
97. 什么叫覆盖?	230
98. 什么叫无向图?	232
99. 什么叫树?	234

* * *

100. 学习集合论有什么意义?	236
附: 主要参考书目	238

1. 什么是集合论？

集合论是研究集合一般性质的数学分支，属于纯数学领域。作为独立的学科出现，约在十九世纪末到二十世纪初这个时期。目前它已经构成了全部现代数学的基础，可以说对任何数学分支的发展，都是不可缺少的。

集合论是从“集合”这个基本概念开始，利用几条基本原则，建造起整个理论体系的。核心部分是基数和序数理论，连续统假设、选择公理、力迫法、可构成性、马丁公理等等问题几乎变成了数学一切分支的基本概念了。

集合论的产生和发展，经历了一百多年的漫长时间，康托(G. Cantor)十七岁时就开始研究数学，他发展了超穷基数的理论，把有穷集推向无穷集，开创了一个崭新的数学领域。1882年他提出连续统假设问题，一直到他去世，未能解决这个疑难问题，但这丝毫不影响他作为集合论创始人的卓越形象。

德国数学家策梅罗(E. Zermelo)1904年提出了一个选择公理问题，利用这个公理，可以证明一切集合都可以变成正序集，从而在选择公理的合理性上展开了长期的争论。直到1914年德国数学家豪斯道夫《集合论基础》一书出版，康托的工作才受到重视，这个时期，人们对选择公理的等价

性、相容性、独立性展开了广泛的讨论。奥地利数学家哥德尔(K. Gödel)在1938年提出了可构造集合的概念，证明了选择公理和连续统假设是相容的，从而在选择公理上的争论才告一段落。

七十年代以后，在各种公理、原理、命题的等价性、相容性研究方面取得大量成果，选择公理的等价命题发展到几十个之多。

1963年美国著名数学家科恩(J. Cohen)利用力迫法，证明了选择公理和连续统假设相互之间是独立的。力迫法是一个强有力的工具，人们利用它解决了很多疑难问题，从而使集合论的研究进入了一个高潮时间，一些重要成果如雨后春笋，成倍增长。

2. 集合是什么？

集合是什么？这是我们随时随地都会碰到，而又无法定义的基本概念。

在集合论的研究中，一开始人们就想对集合的概念加以定义，譬如有以下说法：

若干个事物的总体，叫做集合；

把一个个东西汇集起来，成为一个整体，这就叫形成一个集合；

把一堆东西，收集起来，当成一个单体来考虑，这便是
一个集合；

一些具有某种性质的对象全体，叫做一个集合；

.....

等等。

我们说，这些说法都不能当成集合的定义。

如果把上述这些说法当成集合的定义，那是不正确的，
因为总体、整体、单体、全体等概念未能说明任何问题，它
们本身的意义也是含混不清的，事实上，它们和集合是自相
定义。

在集合论产生的初期，就有人把集合定义为：

“所有满足某条件的事物全体”。

若 $P(X)$ 指符合条件 P 的一切 X ，

则 $\{X \mid P(X)\}$ 或 $\{X : P(X)\}$ 即为所说的集合。

不久，英国著名数学家罗素 (Russell, B) 提出了一个悖论，
意思说：

设 $Z = \{X \mid X \notin X\}$

如果 Z 是集合，显然 Z 是一个事物。因此， $Z \in Z$ 和
 $Z \notin Z$ 不能同时都成立。

若 $Z \in Z$ ，那么 Z 应满足 $X \notin X$ ，因此，

$Z \notin Z$ ，自相矛盾；

若 $Z \notin Z$ ，那么 Z 满足条件 $X \in X$ ，因此，

$Z \in Z$ ，又自相矛盾。

罗素悖论实际成为对以 $\{X \mid P(X)\}$ 为集合定义的明显否

定。

集合论的创始人、德国数学家康托 (G.Cantor 1845—1918) 曾给集合下过这样的定义：

“集或集合是我们的直观或我们的思维中被看作一个整体的确定的、相异的对象的总体”。

“对象称为集的元素，集包含它的元素，或者元素属于集”。

这个定义也不能算是对集合的完美无缺的科学定义，因为在这个定义中，所说的“我们的直观或我们的思维的对象”、“看作一个整体的对象的集合”、“确定的、相异的”等等概念都是含混不清的。都未能确切说明究竟什么是集合。

在对集合的概念无法定义的情况下，人们只能沿用上述种种说法，来描述集合的意义了。

对集合概念，运用时有以下规定：

1° 集合（或集）一般用 $A, B, C, \dots$ 表示。组成集合 A 的每一个对象，叫 A 的元素（或元），用 $a, b, c, \dots$ 表示。

把所有属于集合 A 的元素，用花括号括起来，这叫枚举法，例如

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

把集合元素的特征表示出来，叫描述法。

例如 $B = \{\text{等腰三角形}\}$ 。

2° 具体的事物也好，抽象的事物也好，既有具体事

物，又有抽象事物也好，都可以当作元素构成集合。集合元素的性质可以是相同的，也可以是不同的。不仅同一个集合的元素之间，而且集合与集合的元素之间也允许有不同性质的元素。

例如可以把桌子，画报，素数 7，孔子的教育思想作为元素构成一个集合。

3° 凡由有限多个事物组成的集合，叫有限集；由无限多个事物组成的集合叫无穷集。有限集和无穷集的运算法则有很大差别，不能混同使用。

例如有限集

$A = \{a, b, c\}$ 有三个元素。

$B = \{l, m, n, p\}$ 有四个元素。

显然 $A + B$ 有 $3 + 4 = 7$ 个元素。

但对无穷集，情况就不同了。

若 $C = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 有 $\aleph_0$ 个元素。

$D = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ 有 $\aleph_0$ 个元素。

那么 $C + D$ 有 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ 个元素。

4° 对一个集合说，某个事物属于它，不属于它是非常明确的，不能是含混不清，模棱两可的。

例如 “很大的数” 就不是一个集合，因为 100、1000、10000 等等，究竟哪个数是很大的数呢？谁也说不清楚。

5° 在一个集合中，相同的事物，不能当作不同元素对待，例如集合 $\{1, 1, 1, 2, 3\}$ 和集合 $\{1, 2, 3\}$ 是相同的，因为它们有相同的元素 1、2、3。

6° 包含一个元素的集合叫单元集，单元集 $\{a\}$ 和 a 的含意是不相同的。

例如 若 $a = \{1, 2, 3\}$ ，则

$\{a\}$ 包含一个元素 a ，而

a 却包含三个元素1, 2, 3.

这里，应当知道：把集合当成元素的集合也是存在的，例如北京市学校学生的集合为：

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n.$$

则北京市全部学校集合为

$$B = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}.$$

但是，要特别注意，以所有集合为元素的集合却是不存在的。因为若 S 为以所有集合为元素的集合，那么 S 又成为 S 的一个元素。这就无法想象，这样的集合究竟是什么样子的？

为了得到所有集合，人们曾设想过所谓的集合的分层问题。

把自身不是集合的事物汇集起来，叫原子集合 V_0 ，于是建立

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$$

这里 V_1 是包含原子集合及其幂集合，

$$\text{即 } V_1 = V_0 \cup P(V_0)$$

$$\text{同样, } V_2 = V_1 \cup P(V_1)$$

$$\text{推广有 } V_{n+1} = V_n \cup P(V_n)$$

$$\text{对于}\alpha, \text{有 } V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup P(V_\alpha)$$

每一个集合都出现在这个无穷层次中，换句话说，集合就是这个层次中某一层的元。

虽然这样，集合分层可以包含无穷多个集合，但仍然不能找到以所有集合为元素的集合甚至集合 $\{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \dots\}$ 就不在这个无穷层次中。

3. 什么是子集合？

集合 M 的部分元素所构成的集合 N ，叫做 M 的子集合， M 叫 N 的扩集。

当 N 是 M 的子集合时，我们记为

$N \subseteq M$ ，这表示 N 的每一个元素，必须同时也是 M 的元素。

例如：

$$\{2, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$\{\{3\}\} \subseteq \{4, 5, \{3\}, 2\}.$$

$$\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}.$$

很明显， $M \subseteq M$ ，这意思是说，任何一个集合，必定是这个集合本身的子集合。

如果 $N \subset M$ 且 $N \neq M$ ，则 N 叫 M 的真子集。这意思是说， N 的所有元素，都是 M 的元素；但 M 至少要有有一个元素不属于 N 。

当然，任何一个集合，都不可能是它自己的真子集。

N 为 M 的真子集和 M 为 N 的真子集，两者不能同时成立。

任何一个集合，往往它的子集合有许多个，例如集合 $\{a, b, c\}$ 的子集合有八个，即

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \\ \{a, b, c\} \text{ 和空集合 } \phi.$$

要特别注意，虽然集合的元素数比真子集的元素数要多些，但有些集合的元素和它的真子集的元素又可以是对等的。

例如 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$$B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

显然 $B \subset A$ ，但 $A \sim B$ 。

对任意集合 A, B, C ，我们有：

1° $\subseteq$ 的自反性，即 $A \subseteq A$ ，

这由子集合的定义，直接得到。

2° $\subseteq$ 的反对称性，即

若 $A \subseteq B$ ，且 $B \subseteq A$ ，则 $A = B$ 。

证：因为 $A \subseteq B$

若 $x \in A$ ，则 $x \in B$

又因 $B \subseteq A$ ，即若 $x \in B$ 则 $x \in A$ ，

两者合起来，有

$$A = B.$$

3° $\subseteq$ 的传递性，即