集合问题100例

韩 文 法编

广东教育出版社

集合问题100例

韩文法 编

广东教育出版社

集合问题100例

韩文法编

*

广东教育出版社出版
广东省新华书店发行
广州红旗印刷厂印刷
787×1092毫米32开本　7.875印张　151,000字
1986年7月第1版　　1986年7月第1次印刷
印数　1—6,800册
书号　7449·140　定价　1.30元

前　言

集合的概念和方法已渗透到数学的一切领域，数学各个分支的体系无不是采用集合概念而构成。从逻辑观点看，全部数学就是集合论和它的一系列推论，毫无疑问在中学的数学教学中，集合也占有重要地位。

本书以教学大纲和教材为依据，并稍有提高，且与现代数学相联系，力图把一些抽象内容和概念写得浅显、通俗、生动些.便于读者阅读，目的是扩大教师和学生的知识领域，培养和发展学生的能力与智力，为提高和加强基础教学服务。

全书以叙述、论证方式进行编写，多从熟悉的概念出发，间有疑难问题时，为照顾读者水平，不作复杂的论证，凡具有初中以上数学水平的读者，均可看懂。对于中学师生，将是一本有益的补充读物。

限于编者水平，错误之处，欢迎批评指正。

编者　1984年6月

目　次

* * *

* * *

*　　*　　*

*　　*　　*

1．什么是集合论？

集合论是研究集合一般性质的数学分支，属于纯数学领域。作为独立的学科出现，约在十九世纪末到二十世纪初这个时期．目前它已经构成了全部现代数学的基础，可以说对任何数学分支的发展，都是不可缺少的。

集合论是从“集合”这个基本概念开始，利用几条基本原则，建造起整个理论体系的。核心部分是基数和序数理论，连续统假设、选择公理、力迫法、可构成性、马丁公理等等问题几乎变成了数学一切分支的基本概念了。

集合论的产生和发展，经历了一百多年的漫长时间，康托(G·Cantor)十七岁时就开始研究数学，他发展了超穷基数的理论．把有穷集推向无穷集，开创了一个崭新的数学领域。1882年他提出连续统假设问题，一直到他去世，未能解决这个疑难问题，但这丝毫不影响他作为集合论创始人的卓越形象。

德国数学家策梅罗(E·Zermelo)1904年提出了一个选择公理问题，利用这个公理，可以证明一切集合都可以变成正序集，从而在选择公理的合理性上展开了长期的争论。直到1914年德国数学家豪斯道夫《集合论基础》一书出版，康托的工作才受到重视，这个时期，人们对选择公理的等价

性、相容性、独立性展开了广泛的讨论。奥地利数学家哥德尔(K·Gödel)在1938年提出了可构造集合的概念，证明了选择公理和连续统假设是相容的，从而在选择公理上的争论才告一段落。

七十年代以后，在各种公理、原理、命题的等价性、相容性研究方面取得大量成果，选择公理的等价命题发展到几十个之多。

1963年美国著名数学家科恩(J·Cohen)利用力迫法，证明了选择公理和连续统假设相互之间是独立的。力迫法是一个强有力的工具，人们利用它解决了很多疑难问题，从而使集合论的研究进入了一个高潮时间，一些重要成果如雨后春笋，成倍增长。

2．集合是什么？

集合是什么？这是我们随时随地都会碰到，而又无法定义的基本概念。

在集合论的研究中，一开始人们就想对集合的概念加以定义，譬如有以下说法：

若干个事物的总体，叫做集合；

把一个个东西汇集起来，成为一个整体，这就叫形成一个集合；

把一堆东西，收集起来，当成一个单体来考虑，这便是一个集合；

一些具有某种性质的对象全体，叫做一个集合；

…………………………

等等。

我们说，这些说法都不能当成集合的定义。

如果把上述这些说法当成集合的定义，那是不正确的，因为总体、整体、单体、全体等概念未能说明任何问题，它们本身的意义也是含混不清的，事实上，它们和集合是自相定义。

在集合论产生的初期，就有人把集合定义为：

“所有满足某条件的事物全体”．

若P(X)指符合条件P的一切X，

则 $\{X \mid P(X)\}$ 或 $\{X : P(X)\}$ 即为所说的集合。不久，英国著名数学家罗素(Russell,B)提出了一个悖论，意思说：

设 $Z=\{X \mid X \notin X\}$

如果Z是集合，显然Z是一个事物．因此，$Z \in Z$ 和 $Z \notin Z$ 不能同时都成立。

若 $Z \in Z$，那么 Z 应满足 $X \notin X$，因此，

$Z \notin Z$，自相矛盾；

若 $Z \notin Z$，那么 Z 满足条件 $X \in X$，因此，

$Z \in Z$，又自相矛盾。

罗素悖论实际成为对以 $\{X \mid P(X)\}$ 为集合定义的明显否

定。

集合论的创始人、德国数学家康托(G.Cantor 1845—1918)曾给集合下过这样的定义：

“集或集合是我们的直观或我们的思维中被看作一个整体的确定的、相异的对象的总体”。

“对象称为集的元素，集包含它的元素；或者元素属于集”。

这个定义也不能算是对集合的完美无缺的科学定义，因为在这个定义中，所说的“我们的直观或我们的思维的对象”、“看作一个整体的对象的集合”、“确定的、相异的”等等概念都是含混不清的．都未能确切说明究竟什么是集合。

在对集合的概念无法定义的情况下，人们只能沿用上述种种说法，来描述集合的意义了。

对集合概念，运用时有以下规定：

1° 集合（或集）一般用 $A,B,C,\cdots\cdots$表示。组成集合A的每一个对象，叫A的元素（或元），用$a,b,c,\cdots\cdots$表示。

把所有属于集合A的元素，用花括号括起来，这叫枚举法，例如

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

把集合元素的特征表示出来，叫描述法。

例如 $B=\{$等腰三角形$\}$.

2° **具体的事物也好，抽象的事物也好，既有具体事**

物，又有抽象事物也好，都可以当作元素构成集合。集合元素的性质可以是相同的，也可以是不同的。不仅同一个集合的元素之间，而且集合与集合的元素之间也允许有不同性质的元素。

例如可以把桌子，画报，素数 7，孔子的教育思想作为元素构成一个集合。

3° 凡由有限多个事物组成的集合，叫有限集；由无限多个事物组成的集合叫无穷集。有限集和无穷集的运算法则有很大差别，不能混同使用。

例如有限集

$A=\{a,b,c\}$有三个元素。

$B=\{l,m,n,p\}$有四个元素。

显然 $A+B$ 有 $3+4=7$ 个元素。

但对无穷集，情况就不同了。

若 $C=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$有 $\aleph_0$ 个元素。

$D=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$有 $\aleph_0$ 个元素。

那么 $C+D$ 有 $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$ 个元素。

4° 对一个集合说，某个事物属于它，不属于它是非常明确的，不能是含混不清，模棱两可的。

例如 “很大的数”就不是一个集合，因为100、1000、10000等等，究竟哪个数是很大的数呢？谁也说不清楚。

5° 在一个集合中，相同的事物，不能当作不同元素对待，例如集合$\{1,1,1,2,3\}$和集合$\{1,2,3\}$是相同的，因为它们有相同的元素 1、2、3。

6° 包含一个元素的集合叫单元集，单元集$\{a\}$和a的含意是不相同的。

例如 若$a=\{1,2,3\}$，则

$\{a\}$包含一个元素a，而

a却包含三个元素1、2，3。

这里，应当知道：把集合当成元素的集合也是存在的，例如北京市学校学生的集合为：

A_1、A_2、A_3，……，An。

则北京市全部学校集合为

$B=\{A_1、A_2，\cdots An\}$。

但是，要特别注意，以所有集合为元素的集合却是不存在的。因为若S为以所有集合为元素的集合，那么S又成为S的一个元素。这就无法想象，这样的集合究竟是什么样子？

为了得到所有集合，人们曾设想过所谓的集合的分层问题。

把自身不是集合的事物汇集起来，叫原子集合V_0，于是建立

$$V_0\subseteq V_1\subseteq V_2\subseteq\cdots\cdots$$

这里V_1是包含原子集合及其幂集合，

即 $V_1=V_0\cup P(V_0)$

同样，$V_2=V_1\cup P(V_1)$

推广有 $V_{n+1}=V_n\cup P(V_n)$

对于α，有$V_{\alpha+1}=V_\alpha\cup P(V_\alpha)$

每一个集合都出现在这个无穷层次中，换句话说，集合就是这个层次中某一层的元。

虽然这样，集合分层可以包含无穷多个集合，但仍然不能找到以所有集合为元素的集合甚至集合$\{\phi、\{\phi\}、\{\{\phi\}\}、\cdots\cdots\}$就不在这个无穷层次中。

3. 什么是子集合？

集合M的部分元素所构成的集合N，叫做M的子集合，M叫N的扩集。

当N是M的子集合时，我们记为

$N\subseteq M$，这表示N的每一个元素，必须同时也是M的元素。

例如：

$\{2,3,4\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$.

$\{\{3\}\}\subseteq\{4,5,\{3\},2\}$.

$\{a,b,c\}\subseteq\{a,b,c\}$.

很明显，$M\subseteq M$，这意思是说，任何一个集合，必定是这个集合本身的子集合.

如果 $N\subset M$且$N\neq M$，则N叫M的真子集。这意思是说，N的所有元素，都是M的元素；但M至少要有一个元素不属于N。

当然，任何一个集合，都不可能是它自己的真子集。

N为M的真子集和M为N的真子集，两者不能同时成立。

任何一个集合，往往它的子集合有许多个，例如集合$\{a, b, c\}$的子集合有八个，即

$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，

$\{a, b, c\}$和空集合ϕ。

要特别注意，虽然集合的元素数比真子集的元素数要多些，但有些集合的元素和它的真子集的元素又可以是对等的。

例如 $A=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$

$B=\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}$

显然$B\subset A$，但$A\sim B$。

对任意集合A，B，C，我们有：

1° $\subseteq$的自反性，即$A\subseteq A$，

这由子集合的定义，直接得到。

2° $\subseteq$的反对称性，即

若$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，则 $A=B$。

证： 因为 $A\subseteq B$

若$X\in A$，则 $X\in B$

又因$B\subseteq A$，即若$X\in B$ 则$X\in A$，

两者合起来，有

$A=B$。

3° $\subseteq$的传递性，即