

高等数学习题解析

同济四版《高等数学》配套习题解析

主 编 北京大学数学科学学院 田 勇
编 写 双 博 士 数 学 课 题 组
总策划 胡东华



机械工业出版社

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标(见右图);该图标已由国家商标局注册登记。未经本策划人同意,禁止其他单位或个人使用。



图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题解析/田勇主编.-北京:机械工业出版社,2002.1

(高等学校数学教材配套辅导丛书)

ISBN 7-111-09819-6

I. 高... II. 田... III. 高等数学-高等学校-解题 IV. 013.44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 001203 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮编:100037)

责任编辑:于奇慧

责任校对:郝峥嵘

封面设计:蒲菊祥

责任印制:何全君

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2002 年 9 月第 1 版 第 1 次印刷

850mm × 1168mm 1/32 印张 21.75 字数 746 千字

定价:22.00 元

©版权所有 违法必究

盗版举报电话:(010)62534708(著作权者)

封面无防伪标及正文非黄色胶版纸均为盗版

(注:防伪标揭开困难或揭起无号码皆为盗版)。

为了保护您的消费权益,请使用正版图书。所有正版双博士品牌图书均贴有电码电话防伪标识物(由 16 位数字组成的密码)。在查询时,只需揭开标识的表层,然后拨打全国统一免费防伪查询电话 16840315 或 0898 - 95315000,按照语音提示从左到右依次输入 16 位数字后按 # 键结束,您就可以得知所购买的图书是否为正版图书。

<http://www.bbdd.cc>(中国教育考试双博士网站)

<http://www.cmpbook.com>(机械工业出版社网站)

凡购买本书,如有字迹不清、缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换。

订书电话:新华书店系统:(010)68993821 (010)68326094

邮购及各省图书批发市场:(010)62579473 (010)62534708

前 言

同济版《高等数学》是全国流行已久的经典教材,它具有结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显的优点,全书例题较多,比较便于自学。但也有很多同学反映,原教材附录的习题答案过于简单,在使用过程中多有不便,希望拥有一本与之完全相配套的内容详尽的习题解析集。

为此,我们召集了一批有经验的高校教师,对同济《高等数学》第四版习题作了相应的解析,以方便高校学生学习过程中参考和为自学高数者打开方便之门。

此书虽然在编写过程中得到专家同行的指点,编者也尽心努力,但由于编写时间相对仓促,书中肯定存在一些不足之处,欢迎读者批评指正。

编者

2002年3月

目 录

前 言

习题解析

第一章 函数与极限

习题 1-1	(1)	习题 1-7	(32)
习题 1-2	(9)	习题 1-8	(35)
习题 1-3	(17)	习题 1-9	(37)
习题 1-4	(20)	习题 1-10	(40)
习题 1-5	(24)	习题 1-11	(43)
习题 1-6	(28)	总习题一	(45)

第二章 导数与微分

习题 2-1	(51)	习题 2-6	(76)
习题 2-2	(57)	习题 2-7	(84)
习题 2-3	(62)	习题 2-8	(88)
习题 2-4	(68)	总习题二	(93)
习题 2-5	(71)		

第三章 中值定理与导数应用

习题 3-1	(99)	习题 3-7	(130)
习题 3-2	(105)	习题 3-8	(136)
习题 3-3	(109)	习题 3-9	(141)
习题 3-4	(113)	习题 3-10	(145)
习题 3-5	(119)	总习题三	(148)
习题 3-6	(124)		

第四章 不定积分

习题 4-1	(158)	习题 4-4	(177)
习题 4-2	(163)	习题 4-5	(185)
习题 4-3	(171)	总习题四	(188)

第五章 定积分

习题 5-1	(198)	习题 5-6	(226)
习题 5-2	(203)	习题 5-7	(229)
习题 5-3	(207)	习题 5-8	(233)
习题 5-4	(215)	总习题五	(237)
习题 5-5	(222)		

第六章 定积分的应用

习题 6-2	(246)	习题 6-5	(264)
习题 6-3	(254)	习题 6-6	(270)
习题 6-4	(259)	总习题六	(273)

第七章 空间解析几何与向量代数

习题 7-1	(278)	习题 7-6	(292)
习题 7-2	(281)	习题 7-7	(296)
习题 7-3	(282)	习题 7-8	(300)
习题 7-4	(284)	习题 7-9	(306)
习题 7-5	(289)	总习题七	(309)

第八章 多元函数微分法及其应用

习题 8-1	(317)	习题 8-7	(349)
习题 8-2	(321)	习题 8-8	(354)
习题 8-3	(325)	习题 8-9	(359)
习题 8-4	(329)	习题 8-10	(363)
习题 8-5	(338)	总习题八	(365)
习题 8-6	(344)		

第九章 重积分

习题 9-1	(374)	习题 9-2(2)	(389)
习题 9-2(1)	(378)	习题 9-2(3)	(398)

习题 9-3	(403)	习题 9-6	(426)
习题 9-4	(411)	总习题九	(431)
习题 9-5	(416)		

第十章 曲线积分与曲面积分

习题 10-1	(440)	习题 10-5	(467)
习题 10-2	(447)	习题 10-6	(471)
习题 10-3	(453)	习题 10-7	(475)
习题 10-4	(467)	总习题十	(482)

第十一章 无穷级数

习题 11-1	(493)	习题 11-7	(520)
习题 11-2	(499)	习题 11-8	(524)
习题 11-3	(504)	习题 11-9	(528)
习题 11-4	(507)	习题 11-10	(533)
习题 11-5	(512)	总习题十一	(534)
习题 11-6	(516)		

第十二章 微分方程

习题 12-1	(546)	习题 12-8	(590)
习题 12-2	(549)	习题 12-9	(596)
习题 12-3	(555)	习题 12-10	(601)
习题 12-4	(562)	习题 12-11	(611)
习题 12-5	(573)	习题 12-12	(616)
习题 12-6	(579)	习题 12-13	(623)
习题 12-7	(581)	总习题十二	(632)

附录一:2002 年硕士研究生入学考试理工数学(一)

真题及解析	(649)
-------	-------

附录二:2003 年理工数学(一)《高等数学》部分考点分析	(664)
-------------------------------	-------

附录三:2003 年理工数学(二)《高等数学》部分考点分析	(673)
-------------------------------	-------

附录四:2003 年经济数学(三)《微积分》部分考点分析	(677)
------------------------------	-------

附录五:2003 年经济数学(四)《微积分》部分考点分析	(682)
------------------------------	-------

第一章 函数与极限

习题 1-1

1. 用区间表示变量的变化范围:

$$(1) 2 < x \leq 6$$

$$(2) x \geq 0$$

$$(3) x^2 < 9$$

$$(4) |x - 3| \leq 4$$

2. 求函数

$$y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的定义域和值域.

3. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x$$

$$(2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x - 1}$$

4. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{1-x}$$

$$(2) y = \sqrt{3x+2}$$

$$(3) y = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(4) y = \sqrt{x^2-4}$$

$$(5) y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$$

$$(6) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$$

$$(7) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(8) y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$$

5. 用描点法作出函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的图形.

6. 设 $f(x) = \sqrt{4+x^2}$, 求下列函数值:

$$f(0), f(1), f(-1), f\left(\frac{1}{a}\right), f(x_0), f(x_0+h)$$

7. 若 $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t$, 证明 $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$

8. 设 $y = \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$,

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right), \varphi(-2)$, 并作出函数 $y = \varphi(x)$ 的图形.

9. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y = x^2(1 - x^2)$

(2) $y = 3x^2 - x^3$

(3) $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

(4) $y = x(x - 1)(x + 1)$

(5) $y = \sin x - \cos x + 1$

(6) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$

10. 设 $f(x) = 2x^2 + 6x - 3$, 求 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ 及 $\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, 并指出 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中哪个是奇函数? 哪个是偶函数?

11. 设下面所考虑的函数都是定义域在对称区间 $(-l, l)$ 上的, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数

(2) 两个偶函数的积是偶函数, 两个奇函数的积是偶函数, 偶函数与奇函数的积是奇函数

(3) 定义在对称区间 $(-l, l)$ 上任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和

12. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = x^2, (-1, 0)$

(2) $y = \lg x, (0, +\infty)$

(3) $y = \sin x, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

13. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加

14. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

(1) $y = \cos(x - 2)$

(2) $y = \cos 4x$

(3) $y = 1 + \sin \pi x$

(4) $y = x \cos x$

(5) $y = \sin^2 x$

15. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \sqrt{y} x + 1$$

$$(2) y = \frac{1-x}{1+x}$$

$$(3) y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad-bc \neq 0). \text{又问当 } a, b, c, d \text{ 满足什么条件时, 这反函数}$$

与直接函数相同?

16. 对于函数 $f(x) = x^2$, 如何选择邻域 $U(0, \delta)$ 的半径 δ , 就能使与任一 $x \in U(0, \delta)$ 所对应的函数值都在邻域 $U(0, 2)$ 内?

17. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

习题解析

1. 解 (1)(2,6) (2) $[0, +\infty)$

(3)(-3,3) (4) $[-1,7]$

2. 解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$; 值域为 $[-1,1]$

3. 解 (1) 不同. 因为定义域不同. $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

(2) 不同. 因为对应法则不同. $f(x) = x$, 而 $g(x) = |x|$

(3) 相同. 因为定义域、对应法则均相同

4. 解 (1) 要使函数有意义, 需且只须 $1-x \neq 0$, 即 $x \neq 1$, 所以函数 $y = \frac{1}{1-x}$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

(2) 要使函数有定义, 需且只须 $3x+2 \geq 0$, 即 $x \geq -\frac{2}{3}$, 所以函数 $y = \sqrt{3x+2}$ 的定义域为 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$

(3) 要使函数有意义, 需且只须 $1-x^2 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 1$, 所以函数 $y = \frac{1}{1-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

(4) 要使函数有意义, 需且只须 $x^2 - 4 \geq 0$, 即 $x \geq 2$ 或 $x \leq -2$, 所以函数 $y = \sqrt{x^2 - 4}$ 的定义域为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

(5) 要使函数有意义, 需且只须 $\begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$, 所以原函数的定义域为 $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

(6) 要使函数有意义, 需且只须 $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$ 故原函数的定

义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$

(7) 要使函数有意义, 需且只须 $4 - x^2 > 0$, 即 $-2 < x < 2$, 所以原函数的定义域为 $(-2, 2)$

(8) 要使函数有意义, 需且只须 $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, 即 $x \neq 1$ 且 $x \neq 2$, 所以原函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

5. 解 函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的图形如图 1-1-1 所示.

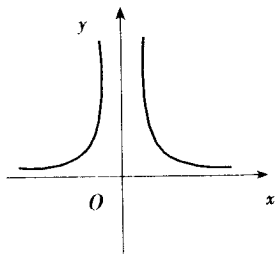


图 1-1-1

6. 解 $f(0) = \sqrt{4+0} = 2$ $f(1) = \sqrt{4+1^2} = \sqrt{5}$

$$f(-1) = \sqrt{4+(-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{4 + \frac{1}{a^2}} = \frac{1}{|a|} \sqrt{4a^2 + 1}$$

$$f(x_0) = \sqrt{4 + x_0^2}, f(x_0 + h) = \sqrt{4 + (x_0 + h)^2}$$

7. 证明 $f\left(\frac{1}{t}\right) = 2\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2} + \frac{5}{\frac{1}{t}} + 5\frac{1}{t}$

$$= 2t^2 + \frac{2}{t^2} + \frac{5}{t} + 5t = f(t)$$

8. 解 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{6}\right| = \frac{1}{2}$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin \frac{\pi}{4}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

因为 $|-2| > \frac{\pi}{3}$, 所以 $\varphi(-2) = 0$

$y = \varphi(x)$ 的图形如图 1-1-2 所示.

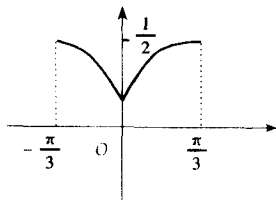


图 1-1-2

9. 解 (1) 因为 $f(-x) = (-x)^2[1 - (-x)^2] = x^2(1 - x^2) = f(x)$, 所以 $y = x^2(1 - x^2)$ 为偶函数

(2) 因为 $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3$, 所以 $f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$, 即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数

(3) 因为 $f(-x) = \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数

(4) 因为 $f(-x) = (-x)[-(-x) - 1][-(-x) + 1] = -x(x-1)(x+1) = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数

(5) 因为 $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1$, 所以 $f(-x) \neq -f(x)$ 且 $f(-x) \neq f(x)$, 即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数

(6) 因为 $f(-x) = \frac{a^{(-x)} + a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^x + a^{-x}}{2} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数

$$\begin{aligned} 10. \text{ 解 } \varphi(x) &= \frac{1}{2} \{ (2x^2 + 6x - 3) + [2(-x)^2 + 6(-x) - 3] \} \\ &= 2x^2 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2} \{ (2x^2 + 6x - 3) - [2(-x)^2 + 6(-x) - 3] \} \\ &= 6x \end{aligned}$$

显然, $\varphi(x)$ 为偶函数, 而 $\psi(x)$ 为奇函数.

11. 证明 (1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 为两个任意的偶函数,

$$\text{令 } F(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\text{则 } F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x)$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 为两个任意的奇函数, 令 $G(x) = g_1(x) + g_2(x)$

$$\text{则 } G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x)$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 为任意两个偶函数, 令 $F(x) = f_1(x)f_2(x)$

$$\text{则 } F(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = f_1(x)f_2(x) = F(x)$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 为任意两个奇函数, 令 $G(x) = g_1(x)g_2(x)$

$$\begin{aligned}\text{则 } G(-x) &= g_1(-x)g_2(-x) = [-g_1(x)][-g_2(x)] \\ &= g_1(x)g_2(x) = G(x)\end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为任一偶函数, 而 $g(x)$ 为任一奇函数, 令 $T(x) = f(x)g(x)$

$$\begin{aligned}\text{则 } T(-x) &= f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] \\ &= -f(x)g(x) = -T(x)\end{aligned}$$

故 $T(x)$ 为奇函数.

(3) 设 $f(x)$ 为定义于 $(-l, l)$ 上的任意一个函数, 令

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

$$\text{因为 } \varphi(-x) = \frac{1}{2}\{f(-x) + f[-(-x)]\}$$

$$= \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \varphi(x)$$

$$\psi(-x) = \frac{1}{2}\{f(-x) - f[-(-x)]\}$$

$$= \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)]$$

$$= -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -\psi(x)$$

所以 $\varphi(x)$ 为偶函数, $\psi(x)$ 为奇函数.

$$\text{而 } f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \varphi(x) + \psi(x)$$

所以 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

12. 解 (1) 设 $x_1, x_2 \in (-1, 0)$ 且 $x_1 < x_2$,

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

因为 $-1 < x_1 < x_2 < 0$, 所以 $x_1 + x_2 < 0$ 且 $x_2 - x_1 > 0$,

故 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 即 $f(x_2) < f(x_1)$,

因而 $y = x^2$ 在 $(-1, 0)$ 单调减少

(2) 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{因为 } f(x_2) - f(x_1) = \lg x_2 - \lg x_1 = \lg \frac{x_2}{x_1}$$

又 $\frac{x_2}{x_1} > 1$, 所以 $\lg \frac{x_2}{x_1} > 0$, 从而 $f(x_2) - f(x_1) > 0$,

即 $y = \lg x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加

(3) 设 $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 且 $x_1 < x_2$,

因为 $f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}$

而 $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}, 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$,

所以, $\cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0; \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, 从而 $f(x_2) - f(x_1) > 0$,

即 $y = \sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加

13. 证明 设 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$ 且 $x_1 < x_2$, 则

$f(x_2) - f(x_1) = f[-(-x_2)] - f[-(-x_1)] \stackrel{\text{奇函数}}{=} -f(-x_2) + f(-x_1)$

又 $-x_2, -x_1 \in (0, l)$ 且 $-x_1 > -x_2$, 故由 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内的单增性知:

$$f(x_2) - f(x_1) = f(-x_1) - f(-x_2) > 0$$

从而 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也是单调增加的.

14. 解 (1) 是周期函数, 周期 $T = 2\pi$

(2) 是周期函数, 周期 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

(3) 是周期函数, 周期 $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

(4) 不是周期函数

(5) 是周期函数. 因为 $y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, 所以周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

15. 解 (1) 因为 $y = \sqrt[3]{x+1}$, 所以 $x = y^3 - 1$, 从而 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y = x^3 - 1$

(2) 因为 $y = \frac{1-x}{1+x}$, 所以 $x = \frac{1-y}{1+y}$, 从而 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

(3) 因为 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, 所以 $x = \frac{-dy+b}{cy-a}$, 从而 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为

$$y = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

要使反函数与直接函数相同,需且只须

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-dx+b}{cx+a}$$

对任意 x (定义域内的) 均成立,亦即

$$c(a+d)x^2 + (d-a)(d+a)x - (d+a)b = 0$$

因此
$$\begin{cases} c(a+d) = 0 \\ (d-a)(d+a) = 0 \\ (d+a)b = 0 \end{cases}$$

亦即只须 ① $a+d=0$, 或

② $a+d \neq 0$ 但 $b=c=0, d=a \neq 0$

16. 解 要使 $f(x) \in U(0,2)$, 即 $|f(x)| < 2$

由于 $f(x) = x^2$, 所以只须 $|x| < \sqrt{2}$

故取 $\delta = \sqrt{2}$, 则当 $x \in U(0, \delta)$ 时, $f(x) \in U(0,2)$.

(显然取任何小于 $\sqrt{2}$ 的正数作半径 δ 亦可)

17. 证明 1) 必要性

设 $f(x)$ 在 X 上有界, 即存在数 $M > 0$ 使得

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in X$$

因而 $-M \leq f(x) \leq M, \quad x \in X$

亦即 $f(x)$ 在 X 上既有上界 (M), 又有下界 ($-M$).

2) 充分性

设 $f(x)$ 在 X 上有上界 M_1 , 下界 M_2 , 即

$$M_2 \leq f(x) \leq M_1, \quad x \in X$$

令 $M = \max(|M_1|, |M_2|)$, 则 $-M \leq M_2, M_1 \leq M$

因而 $-M \leq f(x) \leq M, \quad x \in X$

即 $|f(x)| \leq M, \quad x \in X$

故 $f(x)$ 在 X 上有界.

习题 1-2

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sin\sqrt{x}$$

$$(2) y = \tan(x + 1)$$

$$(3) y = \arcsin(x - 3)$$

$$(4) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$$

$$(5) y = \ln(x + 1)$$

$$(6) y = e^{\frac{1}{x}}$$

2. 设 $f(x) = \arcsin x$, 求下列函数值:

$$f(0), f(-1), f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), f(1)$$

3. 设 $G(x) = \frac{1}{2} \arccos \frac{x}{2}$, 求下列函数值:

$$G(0), G(1), G(\sqrt{2}), G(-\sqrt{3}), G(-2)$$

4. 设 $F(x) = e^x$, 证明:

$$(1) F(x)F(y) = F(x + y)$$

$$(2) \frac{F(x)}{F(y)} = F(x - y)$$

5. 设 $G(x) = \ln x$, 证明: 当 $x > 0, y > 0$, 下列等式成立:

$$(1) G(x) + G(y) = G(xy)$$

$$(2) G(x) - G(y) = G\left(\frac{x}{y}\right)$$

6. 利用 $y = \sin x$ 的图形, 作出下列函数的图形:

$$(1) y = \frac{1}{2} + \sin x$$

$$(2) y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(3) y = 3\sin x$$

$$(4) y = \sin 2x$$

$$(5) y = 3\sin\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right)$$

7. 利用图形的“叠加”, 作出下列函数的图形:

$$(1) y = x + \frac{1}{x}$$

$$(2) y = x + \sin x$$

$$(3) y = \sin x + \cos x$$

8. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = 2\sin 3x$$

$$(2) y = 1 + \ln(x + 2)$$

$$(3) y = \frac{2^x}{2^x + 1}$$

9. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

$$(1) y = u^2, \quad u = \sin x, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) y = \sin u, \quad u = 2x, \quad x_1 = \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$(3) y = \sqrt{u}, \quad u = 1 + x^2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$(4) y = e^u, \quad u = x^2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

$$(5) y = u^2, \quad u = e^x, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

10. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 问 (1) $f(x^2)$, (2) $f(\sin x)$, (3) $f(x + a)$, ($a > 0$), (4) $f(x + a) + f(x - a)$ ($a > 0$) 的定义域各是什么?

$$11. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

12. 证明本节公式(2)、(3)、(4).

公式(2)、(3)、(4)为

$$\operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y - \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y \quad (2)$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y \quad (3)$$

$$\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y \quad (4)$$

$$13. \text{ 证明: (1) } \operatorname{sh}x + \operatorname{sh}y = 2\operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$$

$$(2) \operatorname{ch}x - \operatorname{ch}y = 2\operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$$

14. 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ , 重量是 P , 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F , 使物体从静止开始移动(图 1-2-1), 求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系式.

15. 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角 $\varphi = 40^\circ$ (图 1-2-2), 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时, 求湿周 L ($L = AB + BC + CD$) 与水深 h 之间的函数关系式, 并说明定义域.

16. 一球半径为 r , 作外切于球的圆锥(图 1-2-3), 试将其体积表示为高的函数, 并说明定义域.

17. 火车站收取行李费的规定如下: 当行李不超过 50kg 时, 按基本运费计

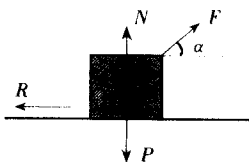


图 1-2-1

算,如从上海到某地每千克收 0.15 元,当超过 50kg 时,超重部分按每千克 0.25 元收费.试求上海到该地的行李费 y (元)与重量 x (kg)之间的函数关系式,并画出这函数的图形.

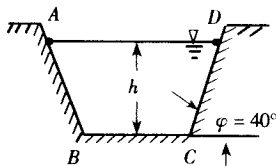


图 1-2-2

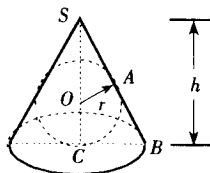


图 1-2-3

习题解析

1. 解 (1) $[0, +\infty)$

(2) $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

(3) $2 \leq x \leq 4$, 即 $[2, 4]$

(4) $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$

(5) $(-1, +\infty)$

(6) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2. 解 $f(0) = 0, f(-1) = -\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, f(1) = \frac{\pi}{2}$

3. 解 $G(0) = \frac{\pi}{4}, G(1) = \frac{\pi}{6}, G(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{8},$