高等数学习题解析

同济四版《高等数学》配套习题解析

主　编　北京大学数学科学学院　田　勇
编　写　双博士数学课题组
总策划　胡东华

机械工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题解析/田勇主编.-北京：机械工业出版社，2002.1
(高等学校数学教材配套辅导丛书)
ISBN 7-111-09819-6

Ⅰ.高...　Ⅱ田....　Ⅲ.高等数学-高等学校-解题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 001203 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号　邮编：100037)
责任编辑：于奇慧　　　责任校对：郝峥嵘
封面设计：蒲菊祥　　　责任印制：何全君
中国农业出版社印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2002年9月第1版　第1次印刷
850mm×1168mm　1/32　印张 21.75　字数 746 千字
定价：22.00 元

前　言

同济版《高等数学》是全国流行已久的经典教材，它具有结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗浅显的优点，全书例题较多，比较便于自学。但也有很多同学反映，原教材附录的习题答案过于简单，在使用过程中多有不便，希望拥有一本与之完全相配套的内容详尽的习题解析集。

为此，我们召集了一批有经验的高校教师，对同济《高等数学》第四版习题作了相应的解析，以方便高校学生学习过程中参考和为自学高数者打开方便之门。

此书虽然在编写过程中得到专家同行的指点，编者也尽心努力，但由于编写时间相对伧促，书中肯定存在一些不足之处，欢迎读者批评指正。

编者

2002 年 3 月

目　　录

前　言

习题解析

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章　中值定理与导数应用

第四章　不定积分

第五章　定积分

第六章　定积分的应用

第七章　空间解析几何与向量代数

第八章　多元函数微分法及其应用

第九章　重积分

第一章　函数与极限

习题 1-1

1. 用区间表示变量的变化范围:

(1) $2 < x \leqslant 6$　　(2) $x \geqslant 0$

(3) $x^2 < 9$　　(4) $|x - 3| \leqslant 4$

2. 求函数

$$y = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的定义域和值域.

3. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$

(2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x\sqrt[3]{x - 1}$

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \dfrac{1}{1 - x}$　　(2) $y = \sqrt{3x + 2}$

(3) $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$　　(4) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

(5) $y = \dfrac{1}{1 - x^2} + \sqrt{x + 2}$　　(6) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}$

(7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$　　(8) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3x + 2}$

5. 用描点法作出函数 $y = \dfrac{1}{x^2}$ 的图形.

6. 设 $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$,求下列函数值:

$f(0), f(1), f(-1), f\left(\dfrac{1}{a}\right), f(x_0), f(x_0 + h)$

7. 若$f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$,证明$f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$

8. 设 $y=\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$,$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

9. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1)$y=x^2(1-x^2)$ (2)$y=3x^2-x^3$

(3)$y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ (4)$y=x(x-1)(x+1)$

(5)$y=\sin x-\cos x+1$ (6)$y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$

10. 设$f(x)=2x^2+6x-3$,求 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 及 $\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$,并指出 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 中哪个是奇函数?哪个是偶函数?

11. 设下面所考虑的函数都是定义域在对称区间$(-l,l)$上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数

(2) 两个偶函数的积是偶函数,两个奇函数的积是偶函数,偶函数与奇函数的积是奇函数

(3) 定义在对称区间$(-l,l)$上任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和

12. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1)$y=x^2$, $(-1,0)$

(2)$y=\lg x$, $(0,+\infty)$

(3)$y=\sin x$, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

13. 设$f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加

14. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1)$y=\cos(x-2)$ (2)$y=\cos 4x$

(3)$y=1+\sin\pi x$ (4)$y=x\cos x$

(5)$y=\sin^2 x$

15. 求下列函数的反函数:

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$　　(2) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

(3) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc \neq 0)$. 又问当 a,b,c,d 满足什么条件时,这反函数与直接函数相同?

16. 对于函数 $f(x) = x^2$,如何选择邻域 $U(0,\delta)$ 的半径 δ,就能使与任一 $x \in U(0,\delta)$ 所对应的函数值都在邻域 $U(0,2)$ 内?

17. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:$f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

习题解析

1. **解**　(1) $(2,6]$　(2) $[0,+\infty)$

(3) $(-3,3)$　(4) $[-1,7]$

2. **解**　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$;值域为 $[-1,1]$

3. **解**　(1) 不同.因为定义域不同.$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$

(2) 不同.因为对应法则不同,$f(x)=x$.而 $g(x)=|x|$

(3) 相同.因为定义域、对应法则均相同

4. **解**　(1) 要使函数有意义,需且只须 $1-x \neq 0$,即 $x \neq 1$,所以函数 $y = \dfrac{1}{1-x}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

(2) 要使函数有定义,需且只须 $3x+2 \geqslant 0$,即 $x \geqslant \dfrac{-2}{3}$,所以函数 $y = \sqrt{3x+2}$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$

(3) 要使函数有意义,需且只须 $1-x^2 \neq 0$,即 $x \neq \pm 1$,所以函数 $y = \dfrac{1}{1-x^2}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(4) 要使函数有意义,需且只须 $x^2-4 \geqslant 0$,即 $x \geqslant 2$ 或 $x \leqslant -2$,所以函数 $y = \sqrt{x^2-4}$ 的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

(5) 要使函数有意义,需且只须 $\begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ x+2 \geqslant 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$,所以原函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(6) 要使函数有意义,需且只须 $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x^2 \geqslant 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ 故原函数的定

义域为$[-1,0)\cup(0,1]$

(7) 要使函数有意义,需且只须$4-x^2>0$,即$-2<x<2$,所以原函数的定义域为$(-2,2)$

(8) 要使函数有意义,需且只须$x^2-3x+2\neq 0$,即$x\neq 1$且$x\neq 2$,所以原函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

5.**解** 函数$y=\dfrac{1}{x^2}$的图形如图1-1-1所示.

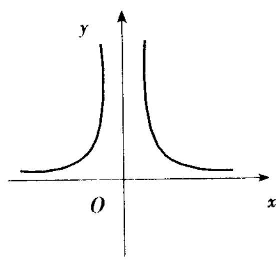

图 1-1-1

6.**解** $f(0)=\sqrt{4+0}=2\quad f(1)=\sqrt{4+1^2}=\sqrt{5}$

$$f(-1)=\sqrt{4+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{|a|}\sqrt{4a^2+1}$$

$$f(x_0)=\sqrt{4+x_0^2},f(x_0+h)=\sqrt{4+(x_0+h)^2}$$

7.**证明** $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=2\left(\dfrac{1}{t}\right)^2+\dfrac{2}{\left(\dfrac{1}{t}\right)^2}+\dfrac{5}{\dfrac{1}{t}}+5\dfrac{1}{t}$

$$=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t=f(t)$$

8.**解** $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2},\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

因为$|-2|>\dfrac{\pi}{3}$,所以$\varphi(-2)=0$

$y = \varphi(x)$ 的图形如图 1－1－2 所示.

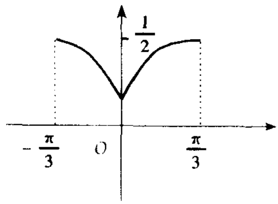

图 1－1－2

9. **解**　(1) 因为 $f(-x) = (-x)^2[1-(-x)^2] = x^2(1-x^2) = f(x)$,所以 $y = x^2(1-x^2)$ 为偶函数

(2) 因为 $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3$,所以 $f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$,即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数

(3) 因为 $f(-x) = \dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数

(4) 因为 $f(-x) = (-x)[-(x)-1][-(x)+1] = -x(x-1)(x+1) = -f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数

(5) 因为 $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1$,所以 $f(-x) \neq -f(x)$ 且 $f(-x) \neq f(x)$,即 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数

(6) 因为 $f(-x) = \dfrac{a^{(-x)} + a^{-(-x)}}{2} = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2} = f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数

10. **解**

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2}\{(2x^2+6x-3)+[2(-x)^2+6(-x)-3]\} \\ &= 2x^2-3 \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}\{(2x^2+6x-3)-[2(-x)^2+6(-x)-3]\} \\ &= 6x\end{aligned}$$

显然,$\varphi(x)$ 为偶函数,而 $\psi(x)$ 为奇函数.

11. **证明**　(1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 为两个任意的偶函数,

令　$F(x) = f_1(x) + f_2(x)$

则 $F(-x) = f_1(-x_1) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x)$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 为两个任意的奇函数,令　$G(x) = g_1(x) + g_2(x)$

则 $G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x)$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 为任意两个偶函数,令 $F(x) = f_1(x)f_2(x)$

则 $F(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = f_1(x)f_2(x) = F(x)$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 为任意两个奇函数,令 $G(x) = g_1(x)g_2(x)$

则 $G(-x) = g_1(-x)g_2(-x) = [-g_1(x)][-g_2(x)]$

$= g_1(x)g_2(x) = G(x)$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为任一偶函数,而 $g(x)$ 为任一奇函数,令 $T(x) = f(x)g(x)$

则 $T(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)]$

$= -f(x)g(x) = -T(x)$

故 $T(x)$ 为奇函数.

(3) 设 $f(x)$ 为定义于 $(-l, l)$ 上的任意一个函数,令

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

因为
$$\varphi(-x) = \frac{1}{2}\{f(-x) + f[-(-x)]\}$$
$$= \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = \varphi(x)$$
$$\psi(-x) = \frac{1}{2}\{f(-x) - f[-(-x)]\}$$
$$= \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)]$$
$$= -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -\psi(x)$$

所以 $\varphi(x)$ 为偶函数,$\psi(x)$ 为奇函数.

而 $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \varphi(x) + \psi(x)$

所以 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

12. **解** (1) 设 $x_1, x_2 \in (-1,0)$ 且 $x_1 < x_2$,

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$$

因为 $-1 < x_1 < x_2 < 0$,所以 $x_1 + x_2 < 0$ 且 $x_2 - x_1 > 0$,

故 $f(x_2) - f(x_1) < 0$,即 $f(x_2) < f(x_1)$,

因而 $y = x^2$ 在 $(-1,0)$ 单调减少

(2) 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$,

因为 $f(x_2) - f(x_1) = \lg x_2 - \lg x_1 = \lg\frac{x_2}{x_1}$

又$\frac{x_2}{x_1} > 1$，所以$\lg\frac{x_2}{x_1} > 0$，从而$f(x_2) - f(x_1) > 0$，

即$y = \lg x$在$(0, +\infty)$内单调增加

(3) 设$x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$且$x_1 < x_2$，

因为$f(x_2) - f(x_1) = \sin x_2 - \sin x_1 = 2\cos\frac{x_2 + x_1}{2}\sin\frac{x_2 - x_1}{2}$

而 $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}, 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$，

所以，$\cos\frac{x_2 + x_1}{2} > 0; \sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$，从而 $f(x_2) - f(x_1) > 0$，

即$y = \sin x$在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内单调增加

13. **证明** 设$x_1, x_2 \in (-l, 0)$且$x_1 < x_2$，则

$f(x_2) - f(x_1) = f[-(-x_2)] - f[-(-x_1)] \xlongequal{\text{奇函数}} -f(-x_2) + f(-x_1)$

又$-x_2, -x_1 \in (0, l)$且$-x_1 > -x_2$，故由$f(x)$在$(0, l)$内的单增性知：

$$f(x_2) - f(x_1) = f(-x_1) - f(-x_2) > 0$$

从而$f(x)$在$(-l, 0)$内也是单调增加的.

14. **解** (1) 是周期函数，周期$T = 2\pi$

(2) 是周期函数，周期$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

(3) 是周期函数，周期$T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

(4) 不是周期函数

(5) 是周期函数. 因为$y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$，所以周期为$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

15. **解** (1) 因为$y = \sqrt[3]{x + 1}$，所以$x = y^3 - 1$，从而$y = \sqrt[3]{x + 1}$的反函数为$y = x^3 - 1$

(2) 因为$y = \frac{1 - x}{1 + x}$，所以$x = \frac{1 - y}{1 + y}$，从而$y = \frac{1 - x}{1 + x}$的反函数为

$$y = \frac{1 - x}{1 + x}$$

(3) 因为$y = \frac{ax + b}{cx + d}$，所以$x = \frac{-dy + b}{cy - a}$，从而$y = \frac{ax + b}{cx + d}$的反函数为

$$y = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

要使反函数与直接函数相同,需且只须

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{-dx+b}{cx+a}$$

对任意 x(定义域内的)均成立,亦即

$$c(a+d)x^2+(d-a)(d+a)x-(d+a)b=0$$

因此 $\begin{cases} c(a+d)=0 \\ (d-a)(d+a)=0 \\ (d+a)b=0 \end{cases}$

亦即只须 ①$a+d=0$,或

②$a+d\neq 0$ 但 $b=c=0, d=a\neq 0$

16. **解** 要使 $f(x)\in U(0,2)$,即 $|f(x)|<2$

由于 $f(x)=x^2$,所以只须 $|x|<\sqrt{2}$

故取 $\delta=\sqrt{2}$,则当 $x\in U(0,\delta)$ 时,$f(x)\in U(0,2)$.

(显然取任何小于$\sqrt{2}$的正数作半径 δ 亦可)

17. **证明** 1) 必要性

设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在数 $M>0$ 使得

$$|f(x)|\leqslant M,\quad x\in X$$

因而 $$-M\leqslant f(x)\leqslant M,\quad x\in X$$

亦即 $f(x)$ 在 X 上既有上界(M),又有下界($-M$).

2) 充分性

设 $f(x)$ 在 X 上有上界 M_1,下界 M_2,即

$$M_2\leqslant f(x)\leqslant M_1, x\in X$$

令 $M=\max(|M_1|,|M_2|)$,则 $-M\leqslant M_2, M_1\leqslant M$

因而 $-M\leqslant f(x)\leqslant M, x\in X$

即 $|f(x)|\leqslant M, x\in X$

故 $f(x)$ 在 X 上有界.

习题 1-2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \sin\sqrt{x}$ (2) $y = \tan(x+1)$

(3) $y = \arcsin(x-3)$ (4) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\frac{1}{x}$

(5) $y = \ln(x+1)$ (6) $y = e^{\frac{1}{x}}$

2. 设 $f(x) = \arcsin x$，求下列函数值：

$f(0), f(-1), f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), f(1)$

3. 设 $G(x) = \frac{1}{2}\arccos\frac{x}{2}$，求下列函数值：

$G(0), G(1), G(\sqrt{2}), G(-\sqrt{3}), G(-2)$

4. 设 $F(x) = e^x$，证明：

(1) $F(x)F(y) = F(x+y)$

(2) $\frac{F(x)}{F(y)} = F(x-y)$

5. 设 $G(x) = \ln x$，证明：当 $x > 0, y > 0$，下列等式成立：

(1) $G(x) + G(y) = G(xy)$

(2) $G(x) - G(y) = G\left(\frac{x}{y}\right)$

6. 利用 $y = \sin x$ 的图形，作出下列函数的图形：

(1) $y = \frac{1}{2} + \sin x$ (2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

(3) $y = 3\sin x$ (4) $y = \sin 2x$

(5) $y = 3\sin\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right)$

7. 利用图形的“叠加”，作出下列函数的图形：

(1) $y = x + \frac{1}{x}$ (2) $y = x + \sin x$

(3) $y = \sin x + \cos x$

8. 求下列函数的反函数：

(1) $y = 2\sin 3x$ (2) $y = 1 + \ln(x+2)$

(3) $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$

9. 在下列各题中,求由所给函数复合而成的函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y = u^2$, $\quad u = \sin x$, $\quad x_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $\quad x_2 = \dfrac{\pi}{3}$

(2) $y = \sin u$, $\quad u = 2x$, $\quad x_1 = \dfrac{\pi}{8}$, $\quad x_2 = \dfrac{\pi}{4}$

(3) $y = \sqrt{u}$, $\quad u = 1 + x^2$, $\quad x_1 = 1$, $\quad x_2 = 2$

(4) $y = e^u$, $\quad u = x^2$, $\quad x_1 = 0$, $\quad x_2 = 1$

(5) $y = u^2$, $\quad u = e^x$, $\quad x_1 = 1$, $\quad x_2 = -1$

10. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,问 (1) $f(x^2)$, (2) $f(\sin x)$, (3) $f(x + a)$, $(a > 0)$, (4) $f(x + a) + f(x - a)(a > 0)$ 的定义域各是什么?

11. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}$ $\quad g(x) = e^x$,

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

12. 证明本节公式(2)、(3)、(4).

公式(2)、(3)、(4) 为

$$\operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh}x\operatorname{ch}y - \operatorname{ch}x\operatorname{sh}y \tag{2}$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y \tag{3}$$

$$\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch}x\operatorname{ch}y - \operatorname{sh}x\operatorname{sh}y \tag{4}$$

13. 证明:(1) $\operatorname{sh}x + \operatorname{sh}y = 2\operatorname{sh}\dfrac{x + y}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x - y}{2}$

(2) $\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}y = 2\operatorname{sh}\dfrac{x + y}{2}\operatorname{sh}\dfrac{x - y}{2}$

14. 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ,重量是 P,设有一与水平方向成 α 角的拉力 F,使物体从静止开始移动(图 1-2-1),求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系式.

15. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi = 40°$(图 1-2-2),当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并说明定义域.

16. 一球半径为 r,作外切于球的圆锥(图 1-2-3),试将其体积表示为高的函数,并说明定义域.

17. 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50kg 时,按基本运费计

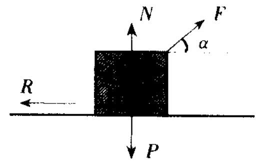

图 1-2-1

算,如从上海到某地每千克收 0.15 元,当超过 50kg 时,超重部分按每千克 0.25 元收费.试求上海到该地的行李费 y(元)与重量 x(kg)之间的函数关系式,并画出这函数的图形.

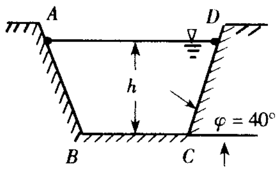

图 1-2-2

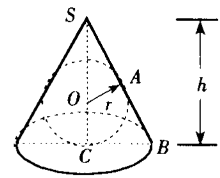

图 1-2-3

习题解析

1. **解** (1)$[0,+\infty)$

(2)$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

(3)$2 \leqslant x \leqslant 4$,即$[2,4]$

(4)$(-\infty,0) \cup (0,3]$

(5)$(-1,+\infty)$

(6)$(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

2. **解** $f(0) = 0, f(-1) = -\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$,

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, f(1) = \frac{\pi}{2}$

3. **解** $G(0) = \frac{\pi}{4}, G(1) = \frac{\pi}{6}, G(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{8}$,