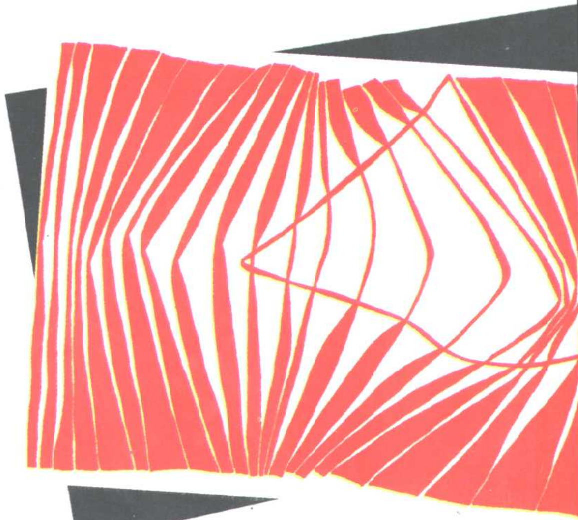
工程数学的内容、方法与技巧

FU BIAN HAN SHU

复变函数

孙清华 宋占奎 吴菊珍 吴振之



华中理工大学出版社

《工程数学的内[redacted]》丛书

复变函数

主　编　孙清华　宋占奎　吴菊珍　吴振之
副主编　刘　磊　熊德之　穆汉林　马　俊
主　审　黄光谷　曹　阳

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

《工程数学的内容、方法与技巧》丛书
复变函数/孙清华　等主编
武汉:华中理工大学出版社,1996年8月
ISBN 7-5609-1353-9

Ⅰ.工…
Ⅱ.孙…
Ⅲ.工程数学-复变函数
Ⅳ.O174.5

《工程数学的内容、方法与技巧》丛书
复变函数
孙清华　等主编
责任编辑:林化夷　李立鹏
*
华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山　邮编:430074)
新华书店湖北发行所经销
武汉首壹印刷厂印刷
*
开本:787×1092　1/32　印张:8.875　字数:199 000
1996年8月第1版　2001年2月第5次印刷
印数:12 001—14 000
ISBN 7-5609-1353-9/O·156
定价:9.80元
(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书是《工程数学的内容、方法与技巧》丛书第二册，内容以国家教委颁发的《教学基本要求》为依据，与现行西安交大版《复变函数》教材同步，各章分为知识要点、释疑解难、范例分析、习题提示几大部分，书末附有自测题及答案和提示. 本书可供大学本科、专科学生和自学者作为学习复变函数课程的参考书也可供教师参阅.

《工程数学的内容、方法与技巧》丛书
主　编　黄光谷　焦岷江　胡友思　王世敬
副主编　徐蕴珍　方金华　孙清华　吴汉民

序

我怀着喜悦的心情为《工程数学的内容、方法与技巧》丛书和《大学数学考试指南》各书作序，它们集众家之长，并具有各自的特色，主要表现在如下三个方面.

一、这些书的作者们在高等院校从事高等数学和工程数学教学多年，具有丰富的教学实践经验和长期教学研究经历.编写的这些书，是他们耕耘在大学数学教学园地上辛勤劳动的结晶.

二、这些书紧扣高等院校现在所使用的教材，是配合这些教材的较好的教与学辅导书.文字叙述精炼，通俗易懂，便于自学.

三、这些书考虑到不同层次的要求.由于这些书是根据国家教委制定的高等学校《工科数学课程教学基本要求》及近年来《全国工学、经济学硕士生入学考试数学考试大纲》的要求编写的，所以它们既能作为高等院校工科各专业的本(专)科学生学习高等数学和工程数学各课程的自学辅导书或习题课教材，也能作为报考工学、理学及经济、农林等类硕士研究生的数学复习资料之用.

由于这些书具有以上三大特点，因此，我相信它们的出版定能受到众多的大学生、自学者及大学数学教师、工程技术人员等的欢迎和青睐，它们将为高等学校数学教材的百花园中又增添一批奇葩.

华中理工大学教授　**林化夷**

1996年3月　武汉

前　言

国家要实现四个现代化，关键在人才．而人才来自于教育．数学教育是教育事业的重要组成部分．不少学生和自学者虽日夜苦学，然而不得要领．本丛书就是为了帮助读者解决学习工程数学中的三门主课的困难而编写的，它凝聚了30多位编审者多年的教学经验和良苦用心．

本套丛书包括线性代数，复变函数，概率论与数理统计共3册．各册与工程数学相应教材同步，可与现行教材配套使用．本节各章按四大部分编写，力求做到："知识要点"提纲挈领，便于读者系统地掌握有关基础知识；"释疑解难"抓住要害，能解决读者在学习中遇到的疑难问题；"范例分析"题型典型，有分析引导或注释说明，可培养读者的基本技能；"习题提示"恰到好处，对西安交大《复变函数》教材各章习题较难者作了提示，以减少读者解题的困难．

编写此丛书，得到华中理工大学出版社，武汉纺织工学院，国家教委高校工科数学课程教学指导委员会委员、《应用数学》杂志副主编兼编辑部主任林化夷教授，武汉市洪山区教委贺贤座副主任等人的关心和支持，在此我们对他们表示衷心的感谢！

本书编委还有（以姓氏笔划为序）：王一凡、李刚、杨云、张志军、张秋谨、罗嘉虹、姚钲、喻国华、赖湘麟、谭代富、魏正红．由于我们水平有限，加上时间仓促，书中可能有不妥之处，恳请读者多提宝贵意见，以便再版时修改．

编　者

1996年3月

目　　录

第一章　复数与复变函数(简介)

知 识 要 点

一、内容提要

1. 复数的概念(略)

2. 复数的几种表示法(略)

3. 复数的运算(略)

4. 复球面与扩充复平面(略)

5. 曲线与区域

1)曲线

(1)设 $z(t)=x(t)+iy(t)$,其中 $x(t),y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$为实变量 t 的单值连续函数,则 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$为复平面上的一条连续曲线.

(2)设 $x'(t),y'(t)$连续且$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0(a\leqslant t\leqslant b)$,则 $z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$为复平面上的一条光滑曲线.

(3)设曲线 $C:z=z(t)(a\leqslant t\leqslant b)$,当 $z(a)=z(b)$而且 $t_1\neq t_2$ $(a<t_1,t_2<b)$时有 $z(t_1)\neq z(t_2)$,则称 C 为**简单闭曲线**.C 的正方向为逆时针方向.

2)区域

(1)点 z_0 的邻域$|z-z_0|<\delta$是一个以 z_0 为圆心,δ 为半径的**圆域**.点集 $0<|z-z_0|<\delta$ 称为 z_0 的一个**去心邻域**.

(2)在点集 E 内,若点 z_0 至少有一个邻域,它的所有点都属

于 E,则称 z_0 为 E 的**内点**.若 $z_1(\in E)$的任意一个邻域内既有属于 E 的点,也有不属于 E 的点,则称 z_1 为 E 的**边界点**.

(3)若点集 E 的每个点都是 E 的内点,则称 E 为**开集**.

(4)若点集 D 的任意两点都可以用完全属于 D 的折线相连,则称 D 为**连通集**.

(5)连通的开集称为**区域**.区域与它的边界一起构成**闭区域**或**闭域**,记作 $\overline{D}$.

(6)有界区域,无界区域,单连通区域,多连通区域(略).

6. 复变函数

1)概念(略)

2)函数的极限

定义 设复变函数 $w=f(z)$在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.若有一个确定的复数 A,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,$|f(z)-A|<\varepsilon$,则称 A 为当 z 趋于 z_0 时 $f(z)$的极限,记为$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$.

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$,$z_0=x_0+iy_0$,$A=a+ib$,则$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充要条件为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}u(x,y)=a,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}v(x,y)=b.$$

若$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$,$\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$,则

(i) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$;

(ii) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)g(z)=AB=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\lim\limits_{z\to z_0}g(z)$;

(iii) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0}f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}g(z)}\quad(B\neq 0)$.

定义 若$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$,则称 $f(z)$在 z_0 **连续**.

二、基本要求与重点、难点

1. 基本要求

1）熟练地对复数进行加、减、乘、除、乘方、开方和共轭运算.

2）熟练掌握和运用复数模的三角不等式.

3）能用复数及其共轭表示复数的实部、虚部及模.

4）了解复数的球面表示，正确理解无穷远点的概念.

5）弄清什么是开集、区域、闭区域、单连域与多连域.

6）弄清什么是简单曲线、简单闭曲线、光滑曲线和逐段光滑曲线. 能用复数的方程或不等式来表示一些常见的简单区域和曲线.

7）牢固掌握复变函数的概念，能把复变函数解释为复平面上两个集合间的映射，能把一个复变量的函数看作两个实的二元函数，也能把两个实的二元函数写成一个复变量函数.

8）掌握复变函数的连续性概念.

2. 重点与难点

重点　复变函数的概念及其极限和连续性.

难点　把复变函数理解为复平面上两个集合间的映射.

释疑解难

1. 复数为什么不能比较大小？

答　复数是实数的推广. 因此复数若能比较大小，它的大小顺序关系必须遵循实数顺序关系的有关性质. 例如在实数中，

若 $a>b,c>0$，则 $ac>bc$；　若 $a>b,c<0$，则 $ac<bc$.

我们用复数 i 和 0 来说明. 根据两复数相等的定义，$i\neq 0$，若 $i>0$，根据实数不等式的性质，两边同乘以“大于零”的 i，得

$$i \cdot i > 0 \cdot i. \quad 即 -1 > 0. 矛盾.$$

若 $i<0$,同样可推得 $-1>0$,矛盾.

由此可见,在复数中无法定义大小关系,即两个复数不能比较大小.但是复数的模、实部、虚部都是实数,可以比较大小.

2. 是否任意复数都有辐角?

答 否.唯有 $z=0$ 的情形特殊,它的模为零而辐角不确定.

3. 怎样理解复变函数 $w=f(z)$?

答 设 $w=u+iv, z=x+iy$,则 $w=f(z)$ 就是

$$u + iv = f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

即

$$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y). \end{cases}$$

因此,一个复变函数 $f(z)$ 与两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 相对应.

从几何意义上来说,复变函数可以看作是从 z 平面上的点集 E 到 w 平面上的点集 E^* 上的映射.

4. 设复变函数 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限存在,此极限值与 z 趋于 z_0 所采取的方式(选取的路径)有无关系?

答 没有关系. z 以任意方式趋于 z_0 时,极限值都是相同的.反过来说,若令 z 沿两条不同的曲线趋于 z_0 时极限值不相等,则说明 $f(z)$ 在 z_0 没有极限,这与高等数学中的情形是类似的.只是一元实函数中,x 只能从左、右以任何方式趋于 x_0;而这里可以从四面八方任意趋于 z_0.

5. "函数"、"映射"、"变换"等名词有无区别?

答 在复变函数中,对"函数"、"映射"、"变换"等名词的使用,没有本质上的区别.只是函数一般是就数的对应而言,而映射与变换一般是就点的对应而言的.

范例分析

例 1 设 z_1, z_2 是两个复数，求证

1) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$;

2) $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$.

【分析】 利用 $|z|^2=z\overline{z}$ 可证 1). 由 1)和 $|z|\geqslant\mathrm{Re}z$ 可证 2).

证 1)
$$
\begin{aligned}
|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\
&=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\
&=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2-(\overline{z_1\overline{z_2}}+z_1\overline{z_2})\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).
\end{aligned}
$$

2)由 1)知
$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}),$$
又
$$
\begin{aligned}
\big||z_1|-|z_2|\big|^2&=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||\overline{z_2}|\\
&=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\overline{z_2}|.
\end{aligned}
$$
∵ $$|z_1\overline{z_2}|\geqslant\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}),$$
∴ $$|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\geqslant|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\overline{z_2}|$$
即 $$|z_1-z_2|^2\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|^2.$$
两边开方，得 $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$.

其几何意义是三角形任意一边的长不小于其他两边边长之差的绝对值.

例 2 设 $|z_0|<1$，证明：若 $|z|<1$，则 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|<1$.

【分析】 若 $|z|<1$，则

$$|z|^2(1-|z_0|^2)<1-|z_0|^2,$$

$\therefore$ $$|z|^2+|z_0|^2<1+|z_0|^2<1+|z|^2|z_0|^2.$$

又 $$|z-z_0|^2=|z|^2+|z_0|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)$$
$$<1+|z|^2|z_0|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)=|1-z\bar{z}_0|^2,$$

$\therefore$ $$\left|\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\right|^2<1.$$

因为复数的模非负，所以$\left|\dfrac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\right|<1$.

例 3 设 $z+z^{-1}=2\cos\theta$($z\neq0$, θ 是 z 的辐角)，求证 $z^n+z^{-n}=2\cos n\theta$.

【分析】 由已知，θ 是 z 的辐角，这使我们想到应该用指数形式或三角形式表示 z，所以可以设 $z=re^{i\theta}$.

再从要证的等式看，左边是关于 z 的 n 次方的式子，而右边是与辐角的 n 倍相关联的式子，这自然使我们想到棣莫弗公式.

证 设 $z=re^{i\theta}$，则 $z^{-1}=r^{-1}e^{-i\theta}$，

$$z+z^{-1}=re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=(r+\frac{1}{r})\cos\theta+i(r-\frac{1}{r})\sin\theta.$$

由已知，$z+z^{-1}=2\cos\theta$，得
$$\begin{cases}r+1/r=2,\\ r-1/r=0.\end{cases}$$

解之，得 $r=1$，即 $z=e^{i\theta}$.

$\therefore$ $$z^n=e^{in\theta},\quad z^{-n}=e^{-in\theta},$$

$\therefore$ $$z^n+z^{-n}=(\cos n\theta+i\sin n\theta)+(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$
$$=2\cos n\theta.$$

例 4 试证：分别以 z_1, z_2, z_3 及 w_1, w_2, w_3 为顶点的两个三角形相似的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

【分析】 由复数的几何意义及平面几何学中关于三角形相似的判定定理和性质定理，知这两个三角形相似的充要条件是

$$\frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_1|} = \frac{|w_3 - w_1|}{|w_2 - w_1|},$$

且 $\arg(z_3-z_1)-\arg(z_2-z_1)=\arg(w_3-w_1)-\arg(w_2-w_1)$，

即
$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1}. \tag{2}$$

又由
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ w_1 & w_2-w_1 & w_3-w_1 \end{vmatrix}$$
$$=(z_2-z_1)(w_3-w_1)-(z_3-z_1)(w_2-w_1),$$

因此，(1)式与(2)式等价，故得题中结论（证略）.

例 5 满足下列条件的点集是什么？如果是区域，是单连域还是多连域？

1) $\mathrm{Im}z=3$.

解 满足条件的一切点 z 所组成的点集是过点 $3i$ 且平行于实轴的一条直线（图 1-1），它不是区域.

2) $\mathrm{Re}z>1/2$.

解 满足条件的一切点 z 所成之集是以直线 $\mathrm{Re}z=1/2$ 为左界的半平面（不包括 $\mathrm{Re}z=1/2$）（图 1-2）. 它是单连域.

3) $|z-i|\leqslant|2+i|$.

解 上式即 $|z-i|\leqslant\sqrt{5}$，因此满足条件的一切点 z 所成

之集是以点 i 为圆心，$\sqrt{5}$ 为半径的闭圆盘. 它是一个闭区域.

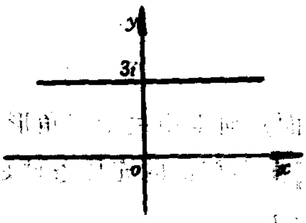


图 1-1

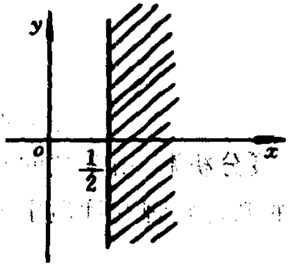


图 1-2

4) $|z+2|+|z-2|=5$.

解 根据复数差的模的几何意义和椭圆的定义，立即可知满足上式的一切点 z 所成之集是以 ±2 为焦点，$5/2$ 为长半轴的椭圆(图 1-3)，它不是区域.

5) $\arg(z-i)=\pi/4$.

解 满足上式的一切点 z 所成之集是以 i 为端点，斜率为 1 的半射线(不包括端点 i)(图 1-4). 它不是区域.

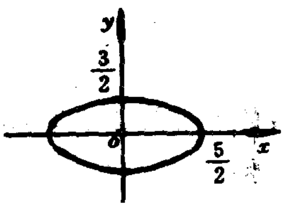


图 1-3

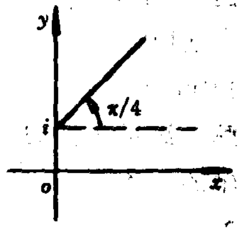


图 1-4

6) $|z|<1, \mathrm{Re}z\leqslant1/2$.

解 满足条件的一切点 z 所组成的点集是以原点为圆心，1 为半径的圆盘和以直线 $\mathrm{Re}z=1/2$ 为右边界的区域(包括 $\mathrm{Re}z=$

1/2)的公共部分(图 1-5).

7) $0<|z+1+i|<2$.

解 满足条件的一切点 z 所成之集是以 $-(1+i)$ 为圆心，2 为半径的去心圆盘(图 1-6)，它是多连域.

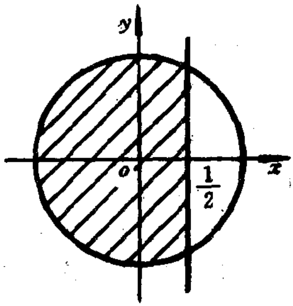


图 1-5

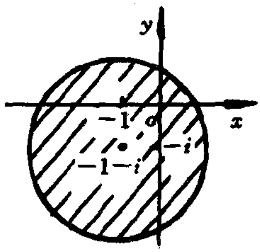


图 1-6

8) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 2$.

解 上式可化为 $|z-1|\leqslant 2|z+1|$，由此可得

$$(x+\frac{5}{3})^2+y^2\geqslant(\frac{4}{3})^2,$$

因此满足条件的一切点 z 所组成的集是以 $-5/3$ 为圆心，$4/3$ 为半径的圆盘外所有点的集合(图 1-7)，它是闭区域.

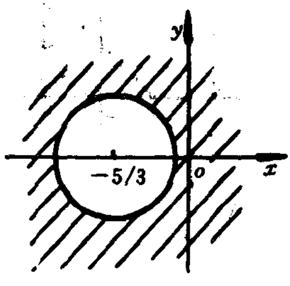


图 1-7

9) $0<\arg(z-1)<\pi/4$,

$2<\mathrm{Re}z<3$.

解 满足条件的一切点 z 所组成之点集是以直线 $\mathrm{Re}z=2$，$\mathrm{Re}z=3$ 为左、右底，以直线 $\arg(z-1)=\pi/4$ 和实轴为上、下腰的一个梯形(不包括周界)(图 1-8)，它是单连域.

10) $0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\pi/4$.

解 $\because \frac{z-i}{z+i}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$,

又
$$0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\pi/4,$$

$\therefore$
$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>0,\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0.$$

而 $x^2+(y+1)^2>0$，于是有

$$\begin{cases}-2x>0,\\ x^2+y^2-1>0,\\ -2x<x^2+y^2-1,\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}x<0,\\ x^2+y^2>1,\\ (x+1)^2+y^2>2.\end{cases}$$

它表示在圆 $(x+1)^2+y^2=(\sqrt{2})^2$ 外且属于左半平面的所有点的集合(图 1-9)，它是单连域.

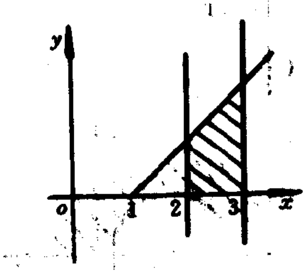


图 1-8

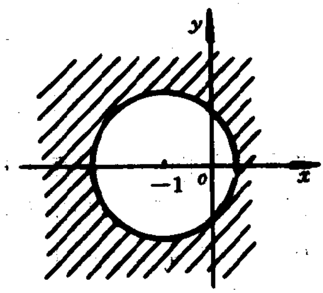


图 1-9

习题提示

2. 当 x,y 等于什么实数时，等式 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立？