面向21世纪工科数学改革教材

高等数学

赵学军　傅　强　于光磊　编著

重 庆 大 学 出 版 社

面向21世纪工科数学改革教材

高 等 数 学

赵学军 傅 强 于光磊 编著

重庆大学出版社

高等数学
赵学军　傅　强　于光磊　编著
责任编辑　刘茂林
*
重庆大学出版社出版发行
新　华　书　店　经　销
重庆通信学院印刷厂印刷
*
开本:787×1092　1/16　印张:26.75 字数:665 千
1997 年 2 月第 1 版　1997 年 2 月第 1 次印刷
印数:1—2000
ISBN 7-5624-1192-1/O・133　定价:28.00 元
(川)新登字 020 号

前　言

随着现代科学技术的迅猛发展，数学已渗透到各个领域，数学的思想与观点发生了深刻的变化．以古典微积分为主要内容的传统高等数学教材与现代科技中数学的广泛应用之间的距离越来越大，这就对高等工科学校中的高等数学这一门重要的基础理论课提出了更高的要求．仅仅使学生具有传统的微积分学修养是不够的，必须具备现代数学的观点和思想，提高学生数学素质，培养学生应用数学工具去分析和解决现代科技问题的能力，从而达到培养跨世纪工程技术人才的目的．因此，高等数学教材的改革势在必行．为了在这方面进行探索，我们编写了这本教材．这本教材打破了传统教材的体系，根据现代科学技术的需要，在考查了应用数学实现过程的同时，分析了不同数学内容在应用数学中的不同功能，用尽可能少的篇幅，向学生展示了应用数学的本质及现代应用数学的基本观点、思想和方法，并吸收了传统教材的优点，为进一步应用数学工具和学习现代数学知识打下初步基础．

在这本教材的编写中，我们力求做到既要在现代数学的高起点上展开，又要考虑到重点高等工科学校学生的实际接受能力．作为讲义，它已在重庆大学某些专业进行过四届试点教学，收到较好的效果．通过认真总结，其后又聘请了各有关专家对教材进行评审，并汇集了学生的意见，在此基础上对讲义进行反复修改，成为现在这本教材．

本教材共分三篇，第一篇包括向量代数与欧几里德空间、映射与函数、函数的连续性、函数的光滑性、导数的应用；第二篇包括定积分、多元函数的积分、流形上的积分；第三篇有数学模型、距离空间与线性赋范空间、有限维逼近与幂级数、希尔贝特空间与傅立叶级数、数学模型的精确解等内容．根据专业和学生实际情况，有些内容可以删减．数学模型一章的目的主要是为了教材内容的承上启下，体现对数学的认识过程，同时也使学生对应用数学工具解决实际问题有一个初步的了解．由于教材中涉及到某些线性代数知识，因此宜将线性代数与本课程平行进行教学．

本教材总体框架的构思和设计雏形由于光磊提出．第一篇由赵学军执笔，第二篇由傅强执笔，绪和第三篇由于光磊执笔．此项教学改革工作一直受到我系领导的高度重视，并得到教务处、光机系、力学系、计算机系领导以及校领导和校内许多专家的大力支持．特别是吴言荪教授、杨万年教授、赵中时教授的关心和帮助，赵中时教授还参加了整个框架的讨论，提出了很多有益的建议，并仔细阅读了初稿．

由于这本教材仅仅是一种尝试，经验不足，且限于编者水平，教材中还存在许多问题，也难免有错误，衷心希望同行和读者批评指教．

编　者

1995年8月于重庆大学

绪

自 20 世纪以来，科学技术得到了极大的发展，新的科学技术领域的产生令人目不暇接，人类文明的面貌日新月异. 现代科学技术最主要的特点之一是数学与自然科学、社会科学之间广泛、深入的相互渗透和作用，推动了科学技术的发展，同时也促进了数学自身的迅速发展. 数学已经成为科学的基础和工具，数学的发展程度是一个国家科技实力强弱的主要标志之一；一个科技工作者业务水平的高低，在很大程度上取决于数学修养的水平. 一种典型的看法是，不用数学的学科就不成其为科学，著名科学家钱学森认为，数学的发展已经使它成为独立于自然科学和社会科学以外的、与这两类科学领域有同等地位的科学.

由于数学知识海洋的博大，到目前为止，对于什么是数学仍无一个统一的公论，我们赞成如下的观点：数学是研究不同事物(抽象的和客观的)之间和相同事物的不同侧面之间在形与量上的联系的科学，数学大致上可分为理论数学和应用数学两大类. 理论数学主要研究抽象数学概念及这些概念之间的联系，这些数学概念可能是由于数学本身发展的需要而提出来的，另一些则可能从不同的科学领域抽取具有相同表现的形与量，加以抽象、概括而得到的；应用数学主要从数学以外的某个领域抽取事物间相互依存的形和量的关系，加以概括，抽象成为数学问题，应用已有的数学知识或发展新的数学工具，来求得未知关系或揭示未知关系的性质. 所以应用数学一般都有客观的背景，应用数学的过程是：观测实验→建立数学模型→利用、发展旧数学或创造新的数学工具→求得问题的解答→与观测实验结果对照比较. 要完成以上过程，首先必须根据观测实验结果及已知规律建立数学模型，这就要求对事物的运动方式和存在形式进行数学描述，即应用数学工具的最基本的功能——自然科学的语言. 高等数学是应用数学的基础，具有理论数学的许多特点，而以应用数学为发展方向，其过程是：

掌握数学的语言功能(认识函数、微分积累)→建立数学模型(建模基本原理)→揭示未知规律(寻找函数).

应用数学的重点是利用、发展旧数学或创造新的数学工具来求得问题的解答，高等数学作为应用数学的基础，重点则是认识函数. 本教材的第一、二两大部分，即认识函数与微分的积累，就是从不同的方面，对函数进行研究. 第一部分为极限理论和函数的微分学，其主要思想是：先研究函数在某点附近的局部性质，然后建立局部性质与整体性质之间的桥梁，从而用局部性质来研究函数的整体性质，以及局部性质与整体性质之间的关系. 基本方法是采用以直代曲、以线性代替非线性、以有限逼近无限，从而达到以简单研究复杂的目的，而实现这一目的的主要手段就是极限理论.

教材的第二部分研究函数的积分学，是对函数更进一步的认识. 积分是微积分的核心，它在表达客观世界非均匀分布的量和积累方面是十分有力的工具，而客观世界的量绝大部分是非均匀分布的. 首先研究如何表达非均匀分布的量，即定义积分，然后研究流形上的积分与流形边界上的积分之间的关系. 由积分的实际意义，实际上也研究了客观世界不同量之间的联系.

教材的第三部分为数学模型和寻找函数，高等数学是应用数学的基础，而应用数学的问题

一般都有与其它学科有关的客观背景.我们要应用数学工具来研究其它学科里的问题就必须首先建立这些问题与数学之间的联系,用数学语言来描述这些问题并表达有关的量,这就是数学模型.我们首先阐明建立数学模型的基本原理和数学模型的本质,然后用来自不同学科的典型实例来说明如何利用建立数学模型的基本原理来建立数学模型,最后,介绍如何将数学模型转化为便于用现代数学工具处理的形式.

在建立了数学模型以后,接下来的任务就是通过模型来研究未知的量,在一些模型当中,未知量已由已知量表达出来,我们只需对它们之间的函数关系进行研究就行了.而更多的数学模型中我们要求的量是隐含在模型当中的,这就需要我们通过数学模型来揭示未知函数的性质,这是非常困难的问题.一般采用三种方法来解决这问题,1. 通过对模型的具体分析,了解未知函数的一些性质.此方法需要较深的数学知识,这里不作讨论,有兴趣的同学可通过更进一步的学习,增进自已在这方面的能力;2. 用简单函数来逼近未知函数,求出简单函数.这是目前用得最多的方法,通过它可以了解函数的近似性质,同时这种方法在数学理论方面也有实际意义,我们在这里将通过它简要介绍现代数学的一些基本概念、思想和方法;3. 利用数学手段求出问题的精确解.这种方法适用的范围很窄,因为一般模型的精确解是很难求或根本无法求出的,在这一部分我们将介绍几类特殊的可以求出精确解的模型的解法,其中求知函数只有一个变量.

当然,以上叙述的三种方法并不是孤立的,它们之间有非常密切的关系,特别是后两种方法,强烈地依赖于第一种方法.高等数学是应用数学的基础,并不就是应用数学.希望同学们今后不断学习现代数学的知识,你将发现,丰富的数学知识会使你获得人生道路上的机会和力量.

下面是几个实际的例子,看看你是否有能力解决其中的一些问题,或者在今后的学习中,是否能获得解决这些问题的能力.

一、在一条直线上有两个运动的物体,运动的方向相同,在初始时刻两物体相距为 d,后面的物体运动的速度始终比前面的物体运动的速度要快,问后面的物体是否一定能追上前面的物体?请讲明你的理由.

二、在一个铅垂平面上的两个固定的、高低不一样的点,现在要设计一条连结这两点的路线,使从高点到低点自由滑落的质点不离开这一路线且滑落的时间最短,问路线应怎样设计?为什么?

三、把一条绳子的两端连接后放到一平面上,若绳子是充分柔软的,且绳子上任意两点不重叠,问把绳子放成什么形状,绳子在平面上围的面积最大?为什么?

四、某生产家具的工厂,专门生产办公桌和课桌,已知每生产一张办公桌需要柏木 $\frac{2}{3}\mathrm{m}^2$ 和松木板 $\frac{2}{3}\mathrm{m}^2$;每生产一张课桌需要柏木 $\frac{1}{3}\mathrm{m}^2$ 和松木板 $1\mathrm{m}^2$,木板厂将供应他们每平方米 27 元的柏木板 $\frac{400}{3}\mathrm{m}^2$ 和每平方米 18 元的松木板 $200\mathrm{m}^2$,根据市场调查,每张办公桌可以卖 45 元,每张课桌可以卖 42 元,问该厂应该生产多少张办公桌和多少张课桌,能够获利最多?

五、现在有 100 个容器分别为 100 个人持有,容器容量分别是 1L、2L、3L……100L,这 100 个人在一个水龙头前排队接水,已知水龙头的出水是为 $m(1+t)$L/s,其中 t 为开始接水后经过的时间,向所有 100 个人如何排队,才能使他们节约的时间最多?为什么?

六、某架设电线的工程队要在相距 100m 的两点架设电线杆，然后架设电线，按安全要求，电线的高度必须距地面 10m 以上，又已知电线的强度是承受 200kg 的张力，每米电线的重量是 0.1kg，问电线杆至少应有多高？这里假定地面是水平的，电线充分柔软.

读者在学习这套教材的过程中会发现自己已经获得了解决这些问题中某些问题，甚至解决全部问题的能力，但这并不等于你的数学修养已经足够，因为等待我们去解决的问题仍然很多，科学技术的进步已经并将要向我们提出更具挑战性的难题. 不论你的数学水平达到了怎样的层次，都需要我们去继续努力学习、探索.

目　录

第一篇　认识函数

第二篇 微分积累

第三篇 数学模型与寻找函数

第一篇 认识函数

数学是研究抽象的或客观的不同事物之间和同一事物的不同侧面之间在形与量上的联系的科学.把形和量可能的状态全体称为集合,把集合与集合之间的某种联系称为映射.因此数学也是研究集合与映射的科学.高等数学作为数学的入门课程,研究几类特殊的集合与特殊的映射,主要研究 n 维欧氏空间及其基本性质,也简要介绍几个抽象空间(如线性赋范空间、希尔伯特空间等)的基本概念;高等数学研究的映射主要是 n 维欧氏空间到 m 维欧氏空间的映射,也引进一些从欧氏空间到抽象空间、从抽象空间到抽象空间的映射的概念.

要研究这些集合与映射以及用适当的集合与映射去刻画事物并揭示事物与事物之间的本质联系,首先必须认识这些集合与映射,也就是了解这些集合与映射的概念、性质及使用方法.而高等数学中又以研究一种特殊的映射——函数为重点,因此本篇作为高等数学的第一篇称为认识函数,其基本内容是欧氏空间、极限理论和函数的微分学.其主要思想是:在简要介绍欧氏空间及其元素的基本性质的基础上,首先研究函数在某点附近的局部性质,然后建立局部性质与整体性质之间的桥梁,从而用局部性质来研究函数的整体性质,以及局部性质与整体性质之间的关系.基本方法是采用以直代曲、以线性代替非线性、以有限逼近无限,从而达到以简单研究复杂的目的,而实现这一目的的主要工具就是极限理论.

本篇第一章介绍向量代数与欧氏空间.函数是一种从欧氏空间到欧氏空间的映射,向量是表示和刻画欧氏空间中元素的有力工具,因此首先介绍向量代数与欧氏空间.第二章介绍映射与函数的基本概念和几种常用的映射.第三章介绍极限理论与函数的连续性.第四章介绍函数的微分与函数的光滑性.函数的连续性和光滑性是函数的两个重要的局部性质,研究局部性质的基本工具是极限与微分.第五章介绍导数与微分的几个简单应用,其中介绍了函数的几个整体性质以及研究这些整体性质的基本方法.

第一章　向量代数与欧氏空间

欧氏空间(也称欧几里德空间)是最基本最重要的一类空间,是一种特殊的集合.高等数学首先研究的映射是两个欧氏空间或欧氏空间中两个子集之间的映射.在研究这种映射之前,先介绍欧氏空间及其子集.向量是研究和表示欧氏空间中元素的一个基本工具,因此本章首先对向量和它的代数运算作了重点介绍,然后以向量形式介绍人们赖以生存的空间——三维欧氏空间及其元素的性质,之后把这些概念和性质推广到一般的 n 维空间中去.最后介绍空间中的一些特殊的子集,如直线、平面、曲线和曲面等.

§1　向量及其坐标表示

一、空间直角坐标系

数轴上任一点的位置由一个实数确定,平面上任一点的位置由两个实数组成的有序数组确定.同样,空间中任一点 M 的位置可以由三个实数 x、y、z 组成的有序数组 (x,y,z) 确定.

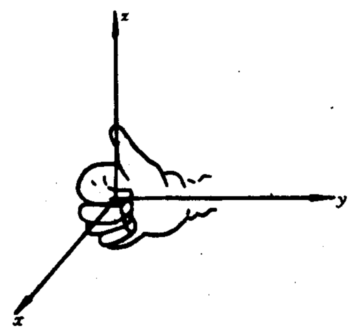

图 1-1

在空间中过定点 o 作三条互相垂直的具有相同单位长度的数轴 ox,oy,oz,这样就构成了一个**空间直角坐标系** ***o-xyz***. oz 轴的正向按右手法则规定:用右手握住 oz 轴,当四个手指从 ox 轴正向旋转 $\pi/2$ 到 oy 轴正向时,大姆指的指向则为 oz 轴的正向.这种坐标系叫做右手系(如图 1-1).三条坐标轴 ox、oy、oz 两两决定一个平面,有 xoy 面,yoz 面和 zox 面,叫做**坐标面**.三个坐标面把整个空间分为 8 个部分,每一部分叫做卦限,共有 8 个卦限(如图 1-2).

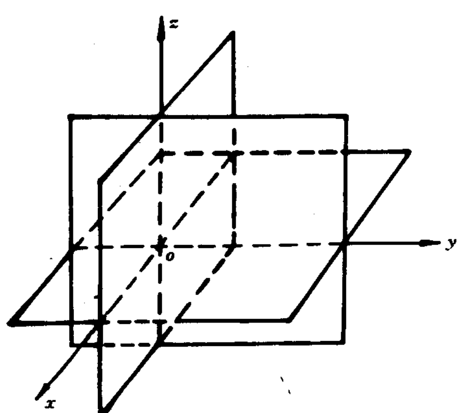

图 1-2

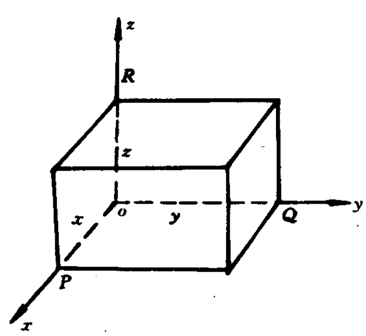

图 1-3

设 M 为空间中任一点，过 M 作三个平面分别与坐标轴垂直，设垂足依次为 P、Q、R，它们在相应坐标轴上的坐标依次为 x、y、z（如图 1-3）. 这样对任一点 M 就有唯一的一组有序数组 (x,y,z). 反之，对任一有序数组 (x,y,z) 在 ox 轴、oy 轴、oz 轴上依次取坐标为 x、y、z 的点 P、Q、R，分别过这三点作与该点所在坐标轴垂直的平面，则三平面的交点 M 就是实数组 (x,y,z) 对应的唯一的空间点. 这样就建立了空间点 M 与三元有序实数组 (x,y,z) 的一一对应关系，称 x,y,z 为 M 的**直角坐标**，并将点 M 表示为 $M(x,y,z)$.

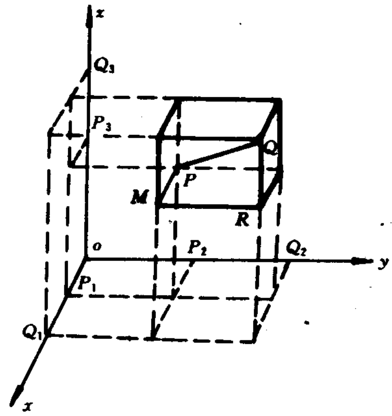

图 1-4

利用点的坐标表示，可以把空间几何量转化为代数量，称这种方法为坐标法.

例 1 求空间两点间的距离.

解 设 $P(x_1,y_1,z_1)$、$Q(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点，如图 1-4. 作以 PQ 为对角线的正六面体，则

$$\|PQ\|^2=\|PM\|^2+\|MR\|^2+\|RQ\|^2$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

所以 P 与 Q 之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

二、向量的概念

在中学已经学过两种物理量，一种量如长度、距离等只有大小；另一种量如位移、速度等既有大小又有方向.

定义 1 只有大小的量称为**数量**（或**标量**），用 a、b、c 等表示. 既有大小又有方向的量称为**向量**（或**矢量**），用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等表示.

一个向量可以用一条有向线段 AB 表示，AB 的长度表示 $\boldsymbol{a}$ 的大小，从始点 A 到终点 B 的方向表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向. 如图 1-5.

图 1-5

定义 2 向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为 $\boldsymbol{a}$ 的**模**，记为 $\|\boldsymbol{a}\|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**，$\boldsymbol{a}$ 的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^\circ$，$\boldsymbol{a}^\circ$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量. 模为 0 的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$，零向量的方向不确定，可以是任意的. 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

由于一切向量的共同特点是它们都有大小和方向，所以一般只研究与始点无关的向量，称为自由向量. 因此，如果两个自由向量的模相等且方向相同，则称这两个**向量相等**.

坐标轴本身可以认为是无穷向量. 坐标轴上的大小为单位长度、方向为该轴正向的向量称为该轴的**基本单位向量**. ox，oy，oz 轴的基本单位向量分别记为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$. 原点到空间点 P 的向量称为点 P 的**向径**，于是空间每一点都对应一个向径.

由于一条有向线段可表示一个向量，反之一个向量可表示一条有向线段，这样就把向量与空间几何量——有向线段联系起来了，于是可以用向量来研究几何量. 这种方法称为**向量法**，它与前面讲的用坐标研究几何量的坐标法一样，也是一种很重要的方法，以后常把坐标法和向量法结合起来使用. 为实现这种结合，把向量放到坐标系中去考虑，讨论向量的坐标，以便用代数方法研究有关向量的问题.

三、向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 3 两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的**和**是以这两个向量为邻边的平行四边形的对角线向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 1-6.

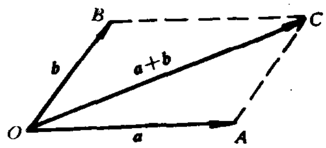

图 1-6

这种作向量加法的方法称为**平行四边形法则**.

由向量的定义，图 1-6 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，从而 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{AC}$，可见向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和等于将 $\boldsymbol{b}$ 移到其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合时，从 $\boldsymbol{a}$ 的始点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量，这种作加法的方法称为**三角形法则**.

利用三角形法则可以推出多个向量相加的**多边形法则**：把 n 个向量依次首尾连接起来，从第 1 个向量的始点到第 n 个向量的终点的向量则为这 n 个向量之和. 如图 1-7 为 4 个向量相加的情形.

向量的加法满足交换律和结合律：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

其正确性不难从图 1-6 和图 1-8 中得出.

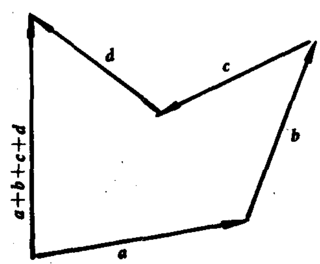

图 1-7

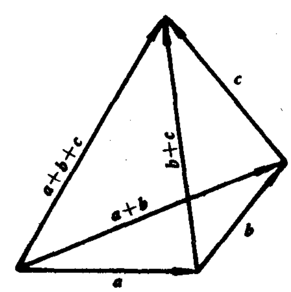

图 1-8

对任意向量 $\boldsymbol{a}$ 有：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

定义 4 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差定义为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

如图 1-9，显然当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 两始点重合时，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是从 $\boldsymbol{b}$ 的终点到 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量.

2. 数与向量的乘法

定义 5 设 λ 为实数，$\boldsymbol{a}$ 为向量，乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是这样一个向量：其模为 $|\lambda|\,\|\boldsymbol{a}\|$，其方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反.

由此定义有：

(1) $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；

(2)若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在非零常数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$;

(3)规定 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}(\lambda\neq0)$,则 $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ 或 $\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{a}^{\circ}$

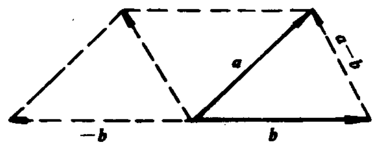

图 1-9

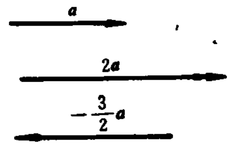

图 1-10

对于任意实数 λ、μ,数与向量的乘法满足下列运行规律:

(Ⅰ)结合律　　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(Ⅱ)分配律　　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

前两个式子容易由定义 5 直接验证,而第三个式子,可由图 1-11 按三角形法则和相似三角形的性质得到.

例 2　证明任何三角形两边中点的连线平行于第三边且等于第三边的一半.

证明　如图 1-12,E、F 为边 AB、AC 的中点,则

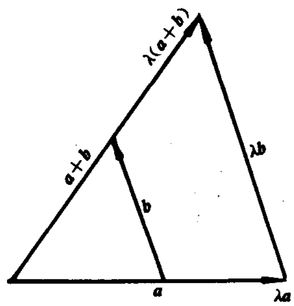

图 1-11

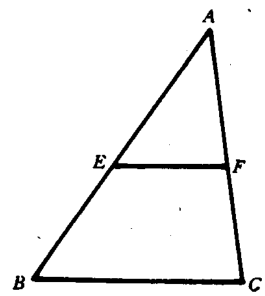

图 1-12

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AF}-2\overrightarrow{AE}=2(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE})=2\overrightarrow{EF},$$

即
$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

例 3　证明两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 共线(或平行)的充要条件是:存在两个不全为 0 的实数 λ、μ 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=0$.

证明　必要性:若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}(k\neq0)$,即 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}=0$. 取 $\lambda=1,\mu=-k$,则有 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=0$.

充分性:若 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=0$,且 $\lambda\neq0$. 则 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}$,令 $k=-\dfrac{\mu}{\lambda}$,则 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$. 因 $\boldsymbol{a}$ 非零,从而 $\mu\neq0$,所以 $k\neq0$,故 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线(或平行)时,则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **线性相关**,否则称为**线性无关**.

例 4　证明向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面(或平行于同一平面)的充要条件为:存在不全为 0 的实数 λ,μ,γ,使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=0$.

证明　必要性:若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,如图 1-13 所示,将 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的始点重合,由 $\boldsymbol{c}$ 的终点分别引

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的平行线得交点 A_1,B_1，则存在 λ,μ 使

$$OA_1=\lambda\boldsymbol{a},OB_1=\mu\boldsymbol{b}$$

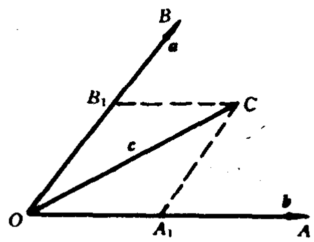

图 1-13

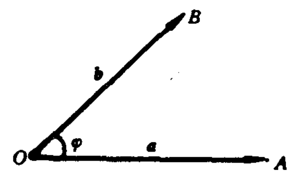

图 1-14

从而 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，即 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=0$，取 $\gamma=-1$，必要性得证.

充分性：设 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=0$，但 $\lambda\neq0$，则

$$\boldsymbol{a}=-\frac{1}{\lambda}(\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}).$$

即 $\boldsymbol{a}$ 在由 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 所确定的平面内，从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面或平行于同一平面时，称 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ **线性相关**，否则称 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ **线性无关**.

四、向量的投影

定义 6 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两非零向量，平移使它们的始点重合，则两向量正向之间的不超过 π 的角称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$.

设有 u 轴和非零向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，如图 1-15. 过 $\boldsymbol{a}$ 的始点 A 和终点 B 分别作垂直于 u 轴的平面 π_1、π_2，分别与 u 轴交于 A_1、B_1，其坐标分别为 u_1,u_2.

定义 7 向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的分量，有向线段 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 在 u 轴上的代数长 u_2-u_1 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影，记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 a_u.

定理 1 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴的夹角为 φ，则

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\cos\varphi.$$

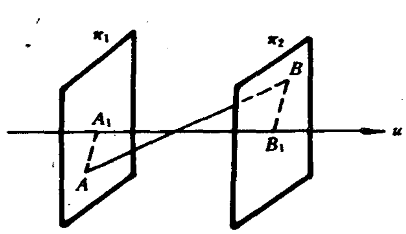

图 1-15

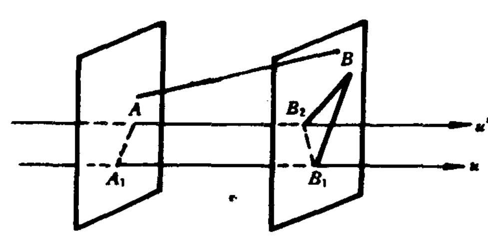

图 1-16

证明 如图 1-16，过 $\boldsymbol{a}$ 的始点 A 作与轴 u 平行且同向的轴 u'，则

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\mathrm{Prj}_{u'}\boldsymbol{a}=AB_2=\|\boldsymbol{a}\|\cos\varphi.$$