积分方程

（第二版）

沈以淡　编著

北京理工大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

积分方程/沈以淡编著. —2 版. —北京：北京理工大学出版社，2002.6

ISBN 7－81013－437－X

Ⅰ. 积…　Ⅱ. 沈…　Ⅲ. 积分方程-高等学校-教材　Ⅳ. O175.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 017707 号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(办公室)　68912824(发行部)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱/chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/北京地质印刷厂
装　　订/天津高村装订厂
开　　本/787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张/15.5
字　　数/380 千字
版　　次/2002 年 6 月第 2 版.2002 年 6 月第 2 次印刷
印　　数/1501～5500 册
定　　价/25.00 元

责任校对/陈玉梅
责任印制/母长新

序

本书是供科学、工程界人员学习积分方程理论与解法的一本入门教材或参考书。

电子计算机的出现，促进了计算数学的发展，在解决科学、工程问题中，有限元法及边界元法得到了广泛的应用。位势理论与积分方程(包括奇异积分方程)作为上述两种方法的数学基础，日益受到重视。

微分方程和积分方程，都是描述物理问题的重要数学工具，各有优点。场的问题，用前者处理通常比较方便，而后者在讨论源的问题时，显出它的优越性。对同一个问题，当用微分方程描述时，由于在求近似解的过程中涉及数值微分，所以往往引起较大的相对误差；而如果用积分方程来描述，因为数值积分引起的相对误差较小，虽然计算量较大，但由于累积误差较小，因而往往容易得到较理想的结果。当把区域上的微分方程化为在边界上的积分方程时，由于维数降低，计算量减少，在数学上，利用积分形式讨论存在性、惟一性往往比较方便，结果也比较完美。因此，如今“物理问题变得越来越复杂，积分方程变得越来越有用”。

积分方程论的发展，始终是与数学物理问题的研究紧密相连的。通常认为，最早自觉应用积分方程并求出它的解来的是 Abel，他在 1823 年从解决力学上的等时曲线问题引出了后来以他的名字命名的 Abel 方程。实际上，在此以前，Laplace 于 1782 年所提出的求 Laplace 变换的反变换问题，就要求解出一个积分方程。Fourier 实际上已求出了一类积分变换的反变换，这相当于解出了一类积分方程。

积分方程论是泛函分析中最早得到发展的一个重要分支。它的形成与发展，对泛函分析中许多基本概念(例如平方可积函数、平均收敛、算子等)的形成，对线性算子一般理论的创立，以至于对泛函分析整个学科的形成，都起了重要的推动作用。

利用泛函分析中全连续算子线性方程的理论，可以很简洁、方便地得到 Fredholm 线性积分方程理论的结果。但由于读者掌握积分方程这一工具主要是为了解决本专业的问题，不应该对他们的数学基础作过高的要求。因此，本书以具备大学微积分、线性代数基础的读者能够掌握这一要求为出发点，来展开课程的内容。希望本书能为日后打算继续进修泛函分析的读者提供一些具体的实例和背景知识。

为了适应读者全面掌握理论和解决实际问题的需要，本书除了包含通常的线性积分方程的理论与解法之外，还列入了一般教材中不涉及的奇异积分方程、非线性方程与方程组；对求积分方程近似解及特征值近似值的数值方法，以及数学物理反问题中常出现的第一类方程，都各设一章加以叙述。

为使读者能通过尽量少的篇幅获得尽可能多的信息，并提高他们解决问题的能力，本书力求符合由浅入深的认识规律，在教学体系及内容叙述上没有因袭原有教材的框架，在结构安排及逻辑顺序上作了较细致的考虑。有些内容在结构与处理方式上均与传统有所不同。根据需要，作者增添了某些重要结论并给出证明。对某些定理，为了便于读者领会其实质及作用，对结论的文字叙述作了必要的变更。

本书内容较为充实。讨论问题时从理论及实际的具体问题出发。内容安排力求科学合理，方程的类型较全，几乎每种解法都有例题说明，便于读者掌握。为了系统地、准确地反映学科的最基本的内容，使读者在数学理论水平上有所提高，本书对重要的定理尽可能给出证明，并对其中一些定理的证明，在不失严格性的情况下加以简化，而不过分追求学科本身的完备性。

第一章介绍积分方程的分类，并从数学本身及许多领域的实际问题引出积分方程。

第二至第四章叙述线性积分方程(主要是第二类方程)的基本理论与解法。

第二章提出解 Fredholm 方程的逐次逼近法、Fredholm 方法，并建立了这种方程的基本理论——Fredholm 定理，还给出了退化核方程的解法。

第三章介绍了对称核方程的基本理论——Hilbert-Schmidt 理论，它给出了与 Fredholm 方法相互独立的另一种方法。Hilbert-Schmidt 定理还可用来处理第六章中的第一类对称核方程。此外还给出非齐次对称核方程解的公式。

把常微分方程或偏微分方程的边值问题化为积分方程来研究，是微分方程理论的一种重要方法(同时是推动积分方程理论发展的动力)，在这一章还介绍了如何利用 Green 函数把常微分方程边值问题化为积分方程。考虑到在一般教材中通常不介绍常微分方程边值问题 Green 函数的求法，因此本书把它列入附录中供读者参考。

第四章除了介绍第二类 Volterra 方程的逐次逼近法外，还介绍了把它化为常微分方程初值问题的方法，而第一类 Volterra 方程通常化为第二类方程去求解。

第五章叙述适用于各类(卷积型)方程的积分变换法，同时还介绍了在求 Laplace 变换(反变换)中有重要作用的广义乘法定理。

第六章给出了第一类 Fredholm 方程的基本定理——Schmidt-Picard 定理，还专列一节介绍解这类方程的母函数法。

第七章介绍了常用的求积分方程近似解及特征值近似值的数值方法。

第八章简要地叙述了在实际上很有用的奇异积分方程的解法及基本定理。

第九章扼要地介绍了积分方程组与非线性方程的一些重要结论，给出了可以用逐次逼近法求解的条件。

在每章后都附有较多难易适当的习题，书末的附录有些是补充预备知识用的，另一些可供读者解决实际问题时查阅。

在讲授本书时，可根据需要和可能来灵活安排课程。本书前五章可以组成所需学时数最少的课程，如时间允许可添上第六、七章。最后两章相互独立，可根据需要选用其中的一章或全部。后四章亦可不列入课程，供读者日后查阅。

在本书编写过程中，承各位师长、同行、同事的鼓励和协助，在此表示感谢。本书在为工科研究生讲授多遍的基础上定稿，但其中难免有不当之处，请各位同行及读者不吝指正。听课的研究生提出了不少有意义的问题和建议，对书稿的形成起了积极的作用。北京师范大学陈方权教授详细地审阅了全稿，并提出了许多有益的意见与建议，作者在此一并致谢。

作者于 1989 年 4 月

第二版序

本书体系新颖，介绍的内容全面，并紧密结合实际应用，反映了该学科的最新发展，因此出版后能适合读者的需要。

为了适应研究生全面掌握理论和解决实际问题的需要，本书除了包括通常的线性积分方程的理论和解法之外，还列入了一般积分方程教材中不涉及的，但在实际中很有用的奇异积分方程、非线性积分方程、积分方程组。此外，还对求积分方程近似解及特征值近似值的数值方法，以及在目前发展迅速的，数学物理反问题中常出现的第一类积分方程，都各设一章加以叙述。

本书深入浅出。为了使研究生能通过尽量少的篇幅获得尽量多的信息，并促进他们解决问题能力的提高，在教材展开时力求符合由浅入深的认识规律，而且在教学体系及内容安排上，具有独创性，突破了原有教材的框架，对结构安排及逻辑顺序，做了周密的考虑。其中一些内容，在结构及叙述方式上，均与传统教材有所不同。为了满足读者的需要，作者还增添了某些重要结论并给出证明。为了减轻读者的负担，作者还独创性地给出一些定理的简化、巧妙并具有启发性的证明。为了系统地、准确地反映学科的最基本的内容，促进读者数学理论水平的提高，本教材对重要的定理尽可能给出证明。并对其中一些定理的证明，在不失严格性的情况下加以简化。对某些定理，为了便于读者领会它的实质与作用，作者还在结论的文字叙述上进行了必要的处理。

本教材的框架、结构与内容安排，曾与来访的国外学者交流过，得到很高的评价。

本书出版后，收到一些读者热情洋溢的来信，对作者的工作给予肯定与鼓励，在此表示衷心的感谢。西安交通大学电气工程学院马西奎教授于 1995 年 9 月写信给作者。他在该校为“电磁场与微波技术”专业的研究生开设《电磁理论中的数学方法》课时，使用了本书。他在信中说：“这本书的编写思想、体系及内容，与以往的教材相比，大有不同，具有比较鲜明的特色，尤其适于工科类，便于掌握。对于工科研究生来说，学后即能解决论文过程中的积分(方程)问题。”北京理工大学科技学院范天佑教授告诉作者，他在评审某些院校的博士生毕业论文时，见到有的博士论文中就引用了作者编著的《积分方程》，说明此书颇受欢迎。他还说，此书除可做工科专业硕士研究生教材外，也可供理科专业硕士研究生参考。

作者从事积分方程的研究，结合研究工作，作者在编著本教材时，查阅了大量最新的外文文献，因此书中包含了其他同类中文书不涉及的内容。本教材中一些例题，作者还亲自上机试算过。由于本书介绍了不少最新的研究成果，因此一些研究人员，也把本教材提供的信息，作为研究工作的工具和手段。在研究课题时，把本书作为重要的参考文献。大连理工大学力学系的一位博士后，廊坊陆军导弹学院 5 室的一位研究人员等，因研究工作的需要，还来京与作者讨论《积分方程》一书中的问题。

2001 年 11 月，本书申报全国研究生教学用书。在申报过程中，北京理工大学科技学院的领导给予支持。北京理工大学出版社决定出版本书的第二版。

本书第二版由沈以淡主编，协助编写工作的有王季华、沈立、沈佳、王蓉庄、林韵、邓以红、王须蓉、石敏达、赵俊、徐漫雪等。

主编　沈以淡

2001 年 11 月 18 日于上海

目　　录

第一章　积分方程的概念、分类及来源

本章介绍与积分方程有关的概念，并对它的分类加以讨论，最后介绍一些引出积分方程的实例。

§1.1　积分方程的概念与分类

1. 基本概念

一般来说，一个在积分号下出现待求函数的方程，称为**积分方程**。

含一个未知函数的积分方程的一般形式为

$$a(x)\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)F[\varphi(t)]\mathrm{d}t + f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{1.1-1}$$

式中　$f(x)$，$a(x)$，$k(x,t)$为已知函数；$F[\varphi(t)]$是$\varphi(t)$的已知泛函；a、b为常数。$f(x)$称为自由项，$k(x,t)$称为积分方程的核。λ是参数，由于积分方程往往与特征值问题有关，因此通常把积分方程记为上述含参数λ的形式。方程可能仅对λ的某些值有解，也可能根本没有解。

当$F[\varphi(t)]$是$\varphi(t)$的线性泛函时，称为线性积分方程，它的一般形式为

$$a(x)\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x) \tag{1.1-2}$$

若$F[\varphi(t)]$是$\varphi(t)$的非线性泛函，则称为非线性积分方程。

如果自变量的个数有2个或2个以上，称为多维积分方程，本书主要讨论一维积分方程。

2. 方程的分类

积分方程可分为**线性方程**与**非线性方程**。对于线性积分方程又可以进一步加以分类。

按方程的形式分，可以分为第一类、第二类方程。

若待求的未知函数$\varphi(x)$仅出现在积分号内，称为**第一类方程**，例如

$$\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x) = 0 \tag{1.1-3}$$

若未知函数既出现在积分号内，又出现在积分号外，则称为**第二类方程**，例如

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x) \tag{1.1-4}$$

若积分限都是常数，称为 **Fredholm 方程**；若积分限中有一个是变数，则称为 **Volterra 方程**。

方程(1.1-3)是一个**第一类 Fredholm 方程**。

方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x) \tag{1.1-5}$$

称为**第二类 Fredholm 方程**。

方程

$$\lambda\int_a^x k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + f(x) = 0 \tag{1.1-6}$$

称为**第一类 Volterra 方程**；方程(1.1－4)称为**第二类 Volterra 方程**。

Fredholm 方程(1.1－5)与 Volterra 方程(1.1－4)的区别在于积分限，前者的积分限为常数，后者的积分上限为变数。如果在 $a\leqslant x\leqslant t\leqslant b$ 时取 $k(x,t)\equiv 0$，则 Volterra 方程(1.1－4)(或(1.1－6))化为 Fredholm 方程(1.1－5)(或(1.1－3))，因此可以把 Volterra 方程看成是 Fredholm 方程的特殊情况。但是由于 Volterra 方程的理论有独特之处，因此常常把它们分开来加以讨论。

对于 Fredholm 方程来说，第二类方程解的理论比较完整、完备，而第一类方程的理论至今还不够完整，但由于解决数学物理反问题的需要，第一类方程的理论日益受到重视。对于 Volterra 方程来说，在很多情况下第一类方程可以化为第二类方程，因此这两类方程的理论没有本质上的差别。

积分方程还可以按核的性质加以分类。

当 $k(x,t)$是(x,t)的连续函数，或者 $k(x,t)$在区域 $a\leqslant x,\ t\leqslant b$ 虽不连续，但平方可积，即

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,t)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

存在且取有限值时，称核 $k(x,t)$为**非奇性核**或 **Fredholm 核**。

当 $k(x,t)$具有以下形式

$$k(x,t) = \frac{h(x,t)}{|x-t|^\alpha}$$

式中 $h(x,t)$为有界函数，常数 $0<\alpha<1$，则称为**弱奇性核**。

当 $k(x,t)$具有形式

$$k(x,t) = \frac{a(x,t)}{x-t}$$

式中 $a(x,t)$关于 x，t 的偏导数存在。此时

$$\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{a(x,t)}{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t$$

在通常意义下是发散的，但如果对 $\varphi(x)$加上一定的限制，可使

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{x-\varepsilon} k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{x+\varepsilon}^b k(x,t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right]$$

存在，此时称 $k(x,t)$为 **Cauchy 奇性核**。

以上三种核所对应的方程，分别称为**非奇性核(连续核)方程**、**弱奇性核方程**、**奇异积分方程**。弱奇性核方程解的理论与非奇性核方程的理论类似，但奇异积分方程的理论与非奇性核方程的理论有本质的差别。使非奇性核积分方程的一般理论不成立的一类积分方程，统称为奇异积分方程，除了上述含 Cauchy 奇性核的方程外，它还包括积分限至少有一个为无限的积分方程，例如方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^\infty \varphi(t)\cdot\sin xt\ \mathrm{d}t$$

等等。

上述各种分类并不能包罗所有可能的积分方程，提出上述这些类型的出发点是，在实际问题或理论问题中出现的积分方程绝大部分可以归入上述方程中的某一种。

积分方程这一学科的基础是由 Fredholm 和 Volterra 奠定的，后来 Hilbert 及 Schmidt 对它的基本理论也做出了重要的贡献。

本书主要叙述第二类线性积分方程的基本理论与解法，为了适应解决实际问题的需要，对第一类方程及非线性方程、积分方程组、奇异积分方程的理论也做了适当的介绍。此外，对实际中很有效的数值解法也有较详细的说明。

§1.2 积分方程的来源

在静电学、电动力学、弹性力学、流体力学、电磁场理论、辐射学、地球物理勘探等学科中，许多问题的解决可化为解对应的积分方程。常微分方程与偏微分方程的定解问题也可以化为等价的积分方程，解偏微分方程反问题的数值方法，常常导出第一类 Fredholm 方程。

在一个过程中，如果未知函数在 x 点的值仅依赖于邻近点或其他孤立点处的值，就引出常微分方程或偏微分方程的定解问题；如果未知函数的值依赖于它在整个区域(包括边界)上的值，则往往导致积分方程或积分-微分方程。

同一个问题有时既可以用微分方程的定解问题又可以用积分方程来描述，而微分方程定解问题本身也可以化为积分方程。积分方程这一数学工具正日益受到重视，这是因为化为积分方程可以降低维数，减少所用节点的个数，缩短计算时间，节省了费用。这样，问题的处理就比较方便，解的性质也显得比较清楚。当边界不特别复杂时，采用积分方程方法更具有突出的优点。

把微分方程的定解问题化为积分方程，除了可以降低维数外，还可使得对未知函数(性质上)的限制减弱(只要满足积分方程即可)。此外，这样可以不再通过先寻求微分方程所有可能的解，到最后再利用定解条件来确定满足定解问题的解，而是把满足方程与适合定解条件，同时体现在积分方程这一个紧凑的形式中。用积分形式讨论数学问题往往更容易处理，而且能便于得到理想的结果，这对问题的解决有重要的意义。把常微分方程的定解问题化为积分方程，可以顺利地得到解的存在性与惟一性定理，就是一个典型的例子。

有些反映扩散与迁移现象的数学问题，不能用微分方程表示，为了解决这些问题，就必须用积分方程来解决，例如中子迁移理论中的一些问题等等。

以下介绍引出积分方程的一些实际问题与数学问题。为了适应各方面读者的需要，仅选择比较典型、有代表性的实例，不作全面的介绍。

1. 弹性弦的挠曲

在直角坐标系 xOy 中，有一条固定在水平轴 x 上两点 $x=0, x=l$ 的轻且柔软的弹性弦，在弦上横坐标为 x 的点 M 处，有强度为 $p(x)$ 的负载，在它的作用下，点 M 处的位移为 $y(x)$(见图 1.1)。如果位移函数 $y(x)$ 为已知，确定负载强度 $p(x)$ 的问题就化为解一个积分方程。

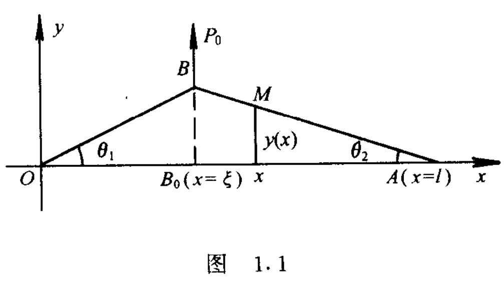

图 1.1

设弦开始时是静止的，且只受到水平张力 T_0 的作用，而张力 T_0 与其他力相比很大。由于弦是柔软的，它容易改变形状，而由弯曲或扭转引起的恢复力可忽略不计。于是弦的初始位置是水平的，即与 x 轴重合。

设在弦上横坐标 $x=\xi$ 的点 B_0 处，施以垂直方向的力 P_0，于是弦具有折线形状 OBA。

由于 P_0 与 T_0 相比很小，可设负载点 $x=\xi$ 处弦的最大挠曲 $BB_0=\delta$ 与 OB_0 及 B_0A 相比很小。因而可以认为在力 P_0 的作用下，弦的张力 T_0 保持不变。把弦在 B 点的张力与力 P_0 都投影到 y 方向，得到

$$T_0 \sin \theta_1 + T_0 \sin \theta_2 = P_0$$

式中 θ_1、θ_2 分别是 OB、BA 与 x 轴的夹角。

由于挠曲微小，θ_1、θ_2 很小，因而成立以下近似式

$$\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{\delta}{\xi}, \quad \sin \theta_2 \approx \tan \theta_2 = \frac{\delta}{l-\xi}$$

于是 $T_0 \dfrac{\delta}{\xi} + T_0 \dfrac{\delta}{l-\xi} = P_0$

因此 $\delta = \dfrac{P_0(l-\xi)}{T_0 l}\xi$

当 $0 \leqslant x \leqslant \xi$ 时，由图 1.1 可知 $y/x=\delta/\xi$，即

$$y(x) = \frac{\delta}{\xi}x = \frac{P_0(l-\xi)}{T_0 l}x$$

式中 $y(x)$是弦上横坐标为 x 的点处的位移。

当 $\xi \leqslant x \leqslant l$ 时，有

$$\frac{y}{l-x} = \frac{\delta}{l-\xi}$$

即

$$y(x) = \frac{P_0(l-x)\xi}{T_0 l}$$

记

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{l-\xi}{T_0 l}x & (0 \leqslant x \leqslant \xi) \\ \dfrac{l-x}{T_0 l}\xi & (\xi \leqslant x \leqslant l) \end{cases} \tag{1.2-1}$$

这样，相应的挠曲曲线之方程为

$$y(x) = G(x,\xi)P_0$$

当 $P_0=1$，即对于单位力

$$y(x) = G(x,\xi) \tag{1.2-2}$$

由式(1.2-1)，显然成立

$$G(x,\xi) = G(\xi,x)$$

在弦上连续分布的(单位长度上的)强度为 $p(\xi)$的负载，作用在弦上 $x=\xi$ 到 $x=\xi+\mathrm{d}\xi$ 这一微元上的力为 $p(\xi)\mathrm{d}\xi$，所产生的挠曲为 $G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi$，因此，负载分布 $p(x)$产生的挠曲为

$$y = y(x) = \int_0^l G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1.2-3}$$

(1) 对于上述弦，求负载分布 $p(x)$，使得在此分布的作用下，弦取给定的形状 $y=y(x)$。

解决这个问题就需要解上述以 $p(x)$ 为未知函数的积分方程(1.2－3)，该方程为第一类 Fredholm 积分方程。

(2) 若已知作用于弦的力随时间 t 而变，且它在点 $x=\xi$ 的强度为 $p(\xi)\sin\omega t$（ω 为正常数），则在此负载分布的作用下，弦作微振动，由于振幅微小，可设弦在振动时其上每一点的横坐标不改变，此时弦的振动可以用 $y=y(x)\sin\omega t$ 表示。设弦在 $x=\xi$ 处的(质量)密度为 $\rho(\xi)$，则在时刻 t，从点 $x=\xi$ 到 $x=\xi+\mathrm{d}\xi$ 这段弦同时受到力 $p(\xi)\sin\omega t\,\mathrm{d}\xi$ 及惯性力 $-\rho(\xi)\mathrm{d}\xi\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\rho(\xi)y(\xi)\omega^2\sin\omega t\,\mathrm{d}\xi$ 的作用。此时式(1.2－3)成为

$$y(x)\sin\omega t=\int_0^l G(x,\xi)[p(\xi)\sin\omega t+\omega^2\rho(\xi)y(\xi)\sin\omega t]\mathrm{d}\xi$$

约去公因子 $\sin\omega t$，就有

$$y(x)=\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi+\omega^2\int_0^l G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi$$

再设

$$\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)\mathrm{d}\xi=f(x)\tag{1.2-4}$$

及

$$G(x,\xi)\rho(\xi)=k(x,\xi),\quad \omega^2=\lambda$$

就得到

$$y(x)=\lambda\int_0^l k(x,\xi)y(\xi)\mathrm{d}\xi+f(x)\tag{1.2-5}$$

当函数 $p(\xi)$ 为已知，因而 $f(x)$ 为已知函数时，式(1.2－5)就是一个以 $y(x)$ 为未知函数的第二类 Fredholm 积分方程。由式(1.2－1)，$G(0,\xi)=G(l,\xi)=0$，再由式(1.2－4)，$f(0)=f(l)$。

2. 存贮问题与线性动力系统问题

设 $\varphi(t)$ 是一个随时间 t 而改变的量，且它按某种规律与过去或者未来某一时间区间内的它本身的值相联系。在数学上，$\varphi(t)$ 的变化规律可以用以 $\varphi(t)$ 为未知函数的积分方程来描述。如果自变量不是时间而是空间坐标，情况是同样的。

(1) *存贮问题* 一个商店销售某些商品，设进货与售货是一个连续过程，买进的商品可以立即出售。设在商店购进了商品后，在时刻 t 尚未售出商品的比例为 $k(t)$。现在要求确定商店进货的速率 $\varphi(t)$，使得商店所存贮商品的总价值保持不变。

设商店在时刻 $t=0$ 购进总价值为 A 的商品后开始营业，随后同时以速率 $\varphi(t)$ 进货，在时间间隔 $[\tau,\tau+\mathrm{d}\tau]$ 内，商店购进商品的价值为 $\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$，这些商品由于出售而减少。在时刻 $t>\tau$ 时，尚未售出商品的价值为

$$k(t-\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

因此，在时刻 t，尚未售出的商品，及到那时为止所购进商品的价值之和为

$$Ak(t)+\int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$$

按要求，在任何时刻 t，商店所贮存商品总价值应保持不变，于是就有

$$A=Ak(t)+\int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\tag{1.2-6}$$

这样，所需确定的进货速率 $\varphi(t)$是积分方程(1.2－6)的解。方程(1.2－6)是一个第一类 Volterra 积分方程。

如果任何一种货物可以在时间间隔 T 内出售，且每一种货物平均在时间间隔 T 内售完，则有

$$k(t)=\begin{cases}1-\dfrac{t}{T} & (t\leqslant T)\\ 0 & (t>T)\end{cases}$$

(2) 线性动力系统问题　已知一个线性动力系统的输入信号为 $x(t)$，输出信号为 $y(t)$。众所周知，$y(t)$与 $x(t)$的关系为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

式中　$g(t,\tau)$是由此动力系统确定的权函数。

如果当 $\tau>t$ 时，$g(t,\tau)=0$，且当 $t<t_0$ 时，$x(t)=0$，则上式成为

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}g(t,\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2－7}$$

这样，当要求从已知输出信号 $y(t)$来确定输入信号 $x(t)$时，就需要在给定 $y(t)$的条件下，解关于 $x(t)$的积分方程(1.2－7)。式(1.2－7)仍是一个第一类 Volterra 方程。

3. 常微分方程的定解问题

通常，微分方程的初值问题可以化为 Volterra 方程，常微分方程的边值问题可以化为 Fredholm 方程。

(1) 一阶常微分方程的初值问题　当 $f(x,y)$满足适当的连续条件，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,y) & (1.2－8)\\ y(0)=C_0 & (1.2－9)\end{cases}$$

的解满足方程

$$y(x)=C_0+\int_0^x f[u,y(u)]\mathrm{d}u \tag{1.2－10}$$

式(1.2－10)是 $y(x)$的一个积分方程。

若 $f(x,y)$关于 x 是线性的，则方程是线性 Volterra 积分方程；否则是非线性 Volterra 积分方程。显然式(1.2－10)的任何(一阶导数连续的)解，满足方程式(1.2－8)与初始条件式(1.2－9)。

类似地，关于最高阶(n 阶)导数解出的任何 n 阶微分方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

满足条件

$$y(x_0)=C_0,\ y'(x_0)=C_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=C_{n-1}$$

的定解问题，可以化为等价的非线性 Volterra 积分方程组。

(2) n 阶线性微分方程的初值问题　系数 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$连续的 n 阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=F(x) \tag{1.2－11}$$

满足初始条件

$$y(0)=C_0,\ y'(0)=C_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(0)=C_{n-1} \tag{1.2-12}$$

的定解问题，可以化为解第二类 Volterra 积分方程。

以下以二阶微分方程为例来加以说明。对于二阶方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\dfrac{dy}{dx}+a_2(x)y=F(x) & (1.2-13)\\ y(0)=C_0,\ y'(0)=C_1 & (1.2-14)\end{cases}$$

设

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x) \tag{1.2-15}$$

上式两端关于 x 积分，利用初始条件式(1.2-14)，依次得到

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x\varphi(t)dt+C_1 \tag{1.2-16}$$

$$\begin{aligned}y&=\int_0^x\left[\int_0^u\varphi(t)dt+C_1\right]du+C_0=\int_0^x dt\int_t^x\varphi(t)du+C_1x+C_0\\&=\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt+C_1x+C_0\end{aligned} \tag{1.2-17}$$

利用式(1.2-16)、(1.2-17)，可以将定解问题式(1.2-13)、(1.2-14)化为积分方程

$$\varphi(x)=\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt+f(x) \tag{1.2-18}$$

式中 $k(x,t)=-[a_1(x)+a_2(x)(x-t)]$ (1.2-19)

$f(x)=F(x)-C_1a_1(x)-C_1xa_2(x)-C_0a_2(x)$ (1.2-20)

式(1.2-18)是一个第二类 Volterra 积分方程。

求解由式(1.2-19)、(1.2-20)确定的 $k(x,t)$ 与 $f(x)$ 所对应的积分方程(1.2-18)，再把解代入式(1.2-17)就可以得到定解问题式(1.2-13)、(1.2-14)的惟一解。

对于 n 阶微分方程的初值问题，可以按与上述类似的方法，并利用下列公式

$$\int_{x_0}^x dx\int_{x_0}^x dx\cdots\int_{x_0}^x f(x)dx=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x(x-u)^{n-1}f(u)du \tag{1.2-21}$$

化为等价的第二类 Volterra 积分方程。

例 1.2.1　确定下列定解问题

$$\begin{cases}y'''-2xy=0\\ y(0)=\dfrac{1}{2},\ y'(0)=y''(0)=1\end{cases}$$

所对应的积分方程。

解　设

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\varphi(x)$$

由式(1.2-21)及初始条件可得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\int_0^x\varphi(t)dt+1$$

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt+x+1$$

$$y=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$$

把以上三式代入原微分方程，就得到积分方程。

$$\varphi(x)=x\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\mathrm{d}t+x^3+2x^2+x$$

利用微分方程定解问题与积分方程的联系，可以把某些特殊的第一类或第二类 Volterra 积分方程，化为对应的微分方程的定解问题来求解。

例 1.2.2　解积分方程

$$\int_0^x \mathrm{e}^{x-t}\varphi(t)\mathrm{d}t=x$$

解　设

$$y=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{1.2-22}$$

则　$\mathrm{e}^x y=x$，

即

$$y=x\mathrm{e}^{-x} \tag{1.2-23}$$

式(1.2-22)两端对 x 求导，得

$$y'=\mathrm{e}^{-x}\varphi(x) \tag{1.2-24}$$

而式(1.2-23)两端对 x 求导，可得

$$y'=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=(1-x)\mathrm{e}^{-x} \tag{1.2-25}$$

由式(1.2-24)、(1.2-25)，就得到原积分方程的解

$$\varphi(x)=1-x$$

例 1.2.3　解积分方程

$$\varphi(x)=\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^x$$

解　设

$$y=\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t \tag{1.2-26}$$

于是

$$y|_{x=0}=0$$

$$\varphi(x)=y+\mathrm{e}^x \tag{1.2-27}$$

由式(1.2-26)、(1.2-27)

$$y'=\varphi(x)=y+\mathrm{e}^x$$

这样，原积分方程化为常微分方程的定解问题

$$\begin{cases} y'-y=\mathrm{e}^x \\ y|_{x=0}=0 \end{cases}$$

解之，得 $y=x\mathrm{e}^x$。再由式(1.2-27)，就得到原积分方程的解

$$\varphi(x)=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x=(x+1)\mathrm{e}^x$$

n 阶线性常系数微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^n y}{dx^n}+a_1\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n y=F(x)\\ y(x_0)=C_0,\ y'(x_0)=C_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=C_{n-1}\end{cases}$$

可以化为第二类卷积型(它的核仅依赖于 $x-t$)Volterra 积分方程

$$\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}k(x,t)\varphi(t)dt+f(x)$$

式中 $$k(x,t)=-\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$f(x)=F(x)-a_1(x)C_{n-1}-a_2(x)(C_{n-1}x+C_{n-2})-\cdots-$$
$$a_n(x)\left[C_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+C_{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+C_1x+C_0\right]$$

(3) **常微分方程的边值问题** 常微分方程的边值问题可以化为第二类 Fredholm 方程。

对于边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0 & (1.2-28)\\ y(0)=y(1)=0 & (1.2-29)\end{cases}$$

令

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)$$

上式两边关于 x 积分，得到

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x\varphi(\xi)d\xi+C_1$$

上式两边再关于 x 积分，就有

$$y(x)=\int_0^x du\int_0^u\varphi(\xi)d\xi+C_1x+C_2$$

交换积分顺序，得

$$y(x)=\int_0^x\varphi(\xi)d\xi\int_\xi^x du+C_1x+C_2=\int_0^x(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi+C_1x+C_2$$

由式(1.2-29)知，$C_2=0$，且

$$\int_0^1(1-\xi)\varphi(\xi)d\xi+C_1=0$$

因此

$$C_1=-\int_0^1(1-\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

于是

$$y(x)=\int_0^x(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi-\int_0^1x(1-\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

把上式右端的第二个积分表示为$(0,x)$、$(x,1)$这两个区间上积分之和，就有

$$y(x)=-\left[\int_0^x\xi(1-x)\varphi(\xi)d\xi+\int_x^1x(1-\xi)\varphi(\xi)d\xi\right]$$

再由式(1.2-28)可得第二类 Fredholm 方程

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1G(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi \tag{1.2-30}$$

式中
$$G(x,\xi)=\begin{cases}\xi(1-x) & (0\leqslant\xi\leqslant x)\\ x(1-\xi) & (x\leqslant\xi\leqslant 1)\end{cases}$$
就是边值问题式(1.2-28)、(1.2-29)的 Green 函数，显然，它满足对称性
$$G(x,\xi)=G(\xi,x)$$

例 1.2.4 已知弦作强迫简谐振动的方程为
$$\varphi''+\lambda\varphi=f(x) \tag{1.2-31}$$
边界条件为
$$\varphi(0)=\varphi(l)=0 \tag{1.2-32}$$
求在点 x 处位移 $\varphi(x)$满足的积分方程。

解 对$\int_0^x(x-\xi)\varphi''(\xi)\mathrm{d}\xi$分部积分，可得
$$\varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\int_0^x(x-\xi)\varphi''(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1.2-33}$$
由式(1.2-31)，得
$$\varphi''(x)=f(x)-\lambda\varphi(x)$$
把上式代入式(1.2-33)，再利用 $\varphi(0)=0$，就有
$$\varphi(x)=x\varphi'(0)+\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t-\lambda\int_0^x(x-t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{1.2-34}$$
再令 $x=l$，利用式(1.2-32)，可得
$$\varphi'(0)=\frac{1}{l}\int_0^l(l-t)[\lambda\varphi(t)-f(t)]\mathrm{d}t$$
再代入式(1.2-34)，经计算，就有
$$\varphi(x)-\lambda\int_0^l k(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi=h(x) \tag{1.2-35}$$
式中
$$k(x,\xi)=\begin{cases}\xi\left(1-\dfrac{x}{l}\right) & (0\leqslant\xi\leqslant x)\\ x\left(1-\dfrac{\xi}{l}\right) & (x\leqslant\xi\leqslant l)\end{cases}$$
$$h(x)=-\int_0^l x\left(1-\frac{\xi}{l}\right)f(\xi)\mathrm{d}\xi$$
式(1.2-35)是边值问题式(1.2-31)、(1.2-32)所对应的第二类 Fredholm 方程。

4. 椭圆型方程边值问题

利用位势理论，可以把椭圆型偏微分方程的边值问题化为积分方程。方法是，把满足偏微分方程的函数，表示为单层位势或双层位势，然后选取其中的密度函数，使对应的位势满足边界条件，密度函数所适合的方程就是 Fredholm 积分方程。

例如，对二维 Laplace 方程的 Dirichlet 内问题
$$\Delta\varphi=0,\quad \varphi|_L=f$$
可以把它的解 φ 表示成以 $\rho(P)$为密度函数的单层位势：
$$\varphi(M)=\int_L\rho(P)\ln\frac{1}{r_{MP}}\mathrm{d}l_P \tag{1.2-36}$$