

918017

高等学校教材

河流模拟



武汉水利电力学院 谢鉴衡 主编



TV131·6

3422

918017

TV131·6

3422

高等学校教材

河流模拟

武汉水利电力学院 谢鉴衡 主编

水利电力出版社

高等学校教材

河 流 模 拟

武汉水利电力学院 谢鉴衡 主编

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 18.125印张 410千字

1990年4月第一版 1990年4月北京第一次印刷

印数0001—1110册

ISBN 7-120-01038-7/TV·344

定价3.65元

内 容 提 要

本书主要介绍河流模拟技术，分为数学模型、河工模型两篇。前者包括基本方程式、数值方法基础、一维及平面二维泥沙数学模型。后者包括量纲分析，相似论基础，定床、动床河工模型试验，其它各种模型试验、模型试验的设备及运行。

本书重点突出，有所创新，除系统阐述基本理论外，也注重介绍我国河流模拟技术的经验和成果。

本书除作为水利院校的教材外，还可供有关部门泥沙科技工作者学习参考。



前 言

本书系以1981、1982年出版的《河流泥沙工程学》上、下册中有关河床变形计算及河工模型试验部分为基础, 改编增补而成。这样做的目的是为了将当前预测河床变形的两个重要手段合并成一门统一的“河流模拟”技术, 藉以发挥其在解决实际问题过程中各自独立但又相辅相成的作用。

本书前四章介绍数学模型, 内容包括基本方程式、数值方法基础、一维及平面二维数学模型; 后六章介绍河工模型, 内容包括量纲分析, 相似论基础、定床及动床河工模型、其它各种模型、河工模型的试验设备及运行。限于篇幅, 数学模型仅限于介绍基本理论及应用较广的方法, 河工模型则以泥沙模型为重点, 兼及其它。

绪论及第五、六、七、八、九、十章由谢鉴衡编写, 第一、二章由魏良琰编写, 第三、四章由李义天编写。全书由谢鉴衡主编统稿, 刘建军主持了全书的整理、缮写及制图工作。

清华大学惠遇甲教授在本书编写及送审过程中提出了不少宝贵意见, 谨此致谢。

编 者

1988年6月

34.04/07

目 录

前言	
绪论	1

第一篇 数 学 模 型

第一章 数学模型的基本方程	4
第一节 数学模拟的意义	4
第二节 控制体与基本控制方程	6
第三节 一维问题的基本控制方程	8
第四节 浅水二维问题的基本控制方程	15
第五节 河床变形方程	22
第六节 基本方程的应用	25
第二章 数值方法基础	36
第一节 河流力学控制方程的基本特性	36
第二节 特征线的概念	43
第三节 特征线数值方法	50
第四节 有限差分方法	61
第五节 有限元方法简介	80
第三章 一维泥沙数学模型	86
第一节 基本方法及模型分类	86
第二节 非耦合解恒定饱和输沙模型	88
第三节 非耦合解恒定非饱和输沙模型	93
第四节 非耦合解非恒定非饱和输沙模型	111
第五节 耦合解非恒定非饱和输沙模型	116
第六节 一维模型的扩展	119
第四章 平面二维泥沙数学模型	121
第一节 基本方程及模型分类	121
第二节 准二维泥沙数学模型	123
第三节 平面二维泥沙数学模型	135
第一篇主要参考文献	140

第二篇 河 工 模 型

第五章 量纲分析法	141
第一节 量纲与单位	142
第二节 物理方程式的和谐性及齐次性	145

第三节 一般量纲分析方法的具体运用	147
第四节 π 定理及其具体运用	148
第六章 相似论基础	152
第一节 相似现象的相似特性	152
第二节 关于相似指示数和相似准则的定理	155
第三节 相似条件	162
第七章 定床河工模型试验	166
第一节 正态定床河工模型试验	166
第二节 变态定床河工模型试验	172
第三节 试验中的几个问题	181
第四节 定床河工模型试验设计实例	188
第八章 动床河工模型试验	191
第一节 悬移质动床河工模型试验	191
第二节 推移质动床河工模型试验	204
第三节 试验中的几个问题	212
第四节 动床河工模型试验设计实例	221
第五节 系列模型试验	228
第九章 其它各种模型试验	238
第一节 热量及杂质传输模型试验	238
第二节 潮汐模型试验	245
第三节 波浪模型试验	251
第四节 冰雪模型试验	258
第五节 气流模型试验	262
第十章 河工模型试验的设备及运行	267
第一节 模型试验的设备	267
第二节 模型制造	276
第三节 试验程序及资料的整理和分析	279
第二篇主要参考文献	282

绪 论

河流在自然情况下及在修建整治建筑物后所发生的演变过程, 对人类生产活动影响甚大, 有必要作出预报, 作为制订工程规划并进一步控制这一演变过程的依据。河流模拟正是预测这一演变过程的重要研究手段, 它包括数值模拟和实物模拟(简称数模和物模)两个组成部分。数模和物模的实际运用可以分别追溯到40年和100年以前; 但是, 在理论上发展到比较完善, 在实践上得到广泛应用, 还是最近20年内的事; 至于将两者组合在一起, 成为一门研究河床演变的专门技术, 本书是继沈学汶主编“河流模拟 (Modeling of Rivers)”之后的另一次尝试。不同之点是, 沈著属于论文汇编, 而本书则属于系统化的专著, 并以模拟河流中的水沙运动及河床演变为重点。

人们对河床演变过程的认识, 通常是从野外实际查勘及观测开始的。对河流所进行的长期野外查勘及观测, 和对收集到的实际资料所进行的由表及里、由此及彼的综合分析, 使人们逐步形成了对由具体河段到整个河流以至不同河流的河床演变的规律性认识, 这种规律性认识随着观测手段日益现代化、观测精度日益提高、观测项目日益齐全而不断深化。它们尽管大部分只具有定性性质, 但对于解决工程实际问题仍有十分重要的意义, 早期关于河床演变的定性的规律性认识, 曾长期作为古代工程师指导工程实践的依据, 其中不乏成功先例, 但也有不少失败教训。这是因为, 指导工程实践不能仅仅满足于定性的规律性认识, 而必须代之以定量的规律性认识; 何况没有定量的规律性认识, 定性的规律性认识也可能出现失误。

为对河床演变作出定量预测, 不少研究工作者在寻求控制水沙运动及河床演变的基本方程式及各种具体问题的边界条件方面作出了卓有成效的理论探讨。但是, 由于这些方程式往往比较复杂, 求它们的解析解在数学上存在难以克服的困难; 而求它们的数值解, 又由于缺乏高效率的计算工具, 难以实现。这种状况使得在相当长的时间内, 不得不局限于求解比较简单的问题, 而且, 即使是这样的问题还要作很多不应有的简化。由此导出的一些简单的函数关系式和简单的运算过程, 虽然也能定量地回答一些问题, 但其使用范围和计算精度不能不受到很大的限制。当然, 出现这种状况不单纯是由于基本方程式过于复杂, 也由于基本方程式还不够完备。上述为数模的初级阶段, 这一阶段一直延续到本世纪40年代到50年代初期。

在数模处于初级阶段, 难以定量回答复杂实际问题的同时, 物模得到了迅猛发展, 从弗汝德 (W.Froude) 在1870年进行船舶模型试验, 并提出著名的弗汝德相似律起, 已有近120年历史; 从雷诺 (O.Reynolds) 在1885年运用弗汝德相似律进行默西 (Mersey) 河模型试验起, 也有近100年历史。由于物模相似准则很容易从不同力的一般表达式的对比关系导出, 而白金汉 (J.Buckingham) 提出的用于求一般相似准则的 π 定理也已在1914年问世, 再加上即使研究十分复杂的水流和泥沙运动的三维问题, 在物模中也不存在

象数模中那样难以克服的困难，物模在较长时期内得到了初步的发展。

然而，随着大存贮量、高运算速度的电子计算机的出现，停滞多年的数模获得了新的发展势头，人们已不再象以前那样，倾注全力寻求可以允许的简化并进而导出方程式的解析解，而是直接进行数值计算；研究的对象也由比较简单的一维问题逐步发展到比较复杂的二维以至三维问题。就现状来说，对长距离的一维河床变形预测，数模以其周期短，投资少的巨大优势，与物模相比，在应用上已居于统治地位；对短距离的二维河床变形预测，数模正在向物模发出强有力的挑战。至于三维河床变形预测，由于边界条件过于复杂，特别是这种复杂边界条件下的水沙运动规律目前了解甚少，要使数模达到实际运用阶段，还需作更多的工作。

目前，数模和物模已发展成预测河床演变及与之相应的水沙运动的两个重要手段，它们各有其优先使用的领域。例如，数模多用于研究一维问题，物模多用于研究三维问题，而二维问题则两种模型均可用来研究。另外，这两种模型的使用还与工程的重要性及研究所处的阶段有关。对于很重要的工程，可能两种模型均需在不同甚至相同的场合使用，以收各取所长及相互印证之效；对于不很重要的工程，为了缩短研究周期及节约投资，也许仅使用数模即可。在工程的规划阶段，使用数模不但能够回答所提出的问题，而且有可能在短期内对多种方案进行数模试验，以寻求优化方案，从而具有更大的优越性。在工程设计阶段，为深入研究某些问题，特别是三维性较强的问题，可能需进一步使用物模。

至于对研究河段进行野外观测，则在任何情况下都是需要的。即使它们只能提供一些定性的认识，但因为研究对象是原型，既不存在数模计算参数是否选择得当问题，也不存在物模缩尺影响问题，这些定性认识仍然是十分可贵的。另外，对研究河段进行的野外观测还可为数模及物模提供计算及设计参数，以及检验及率定模型所必需的各种资料，而这种资料是必不可少的。其它如通过野外观测进行类似河段的对比，只要有可能，也是应该力争做到的。

如前所述，数模目前正处在迅猛发展的过程之中。研究的着眼点主要涉及两个方面，一个方面是基本方程式中的输沙公式及阻力公式，它们和其它方程式不同，不是严格的理论公式，具有较多的经验性质。特别是现有的这类经验公式一般仅适用于比较简单的情况（即一维、恒定均匀流、均质沙和输沙平衡的情况）。对于二维以至三维、非均匀流以至非恒定流、非均质沙和非输沙平衡情况，这些公式将发生何种变化，虽然已作了一些研究工作，但问题并未彻底澄清，要使构造的模型符合实际，还需作很多工作。另一个方面是计算方法，为了扩大数模的使用范围，提高计算精度，保持计算成果的稳定和收敛，也为了减少信息贮存量和加快运算速度，在计算方法上还存在多种选择，在具体计算技术的运用上还大有潜力可挖。近年来，数模进展神速，主要表现在计算方法的创新和改进上。显然，要使预测河床演变的数模方法日趋完善，今后在以上两个着眼点上狠下功夫是十分必要的。本书有关数模部分共分四章。第一、二两章分别讨论基本方程式及计算方法问题，第三、四两章相继介绍现有一维和二维数模计算的具体方法，正是从上述考虑出发的。

和数模不同，物模要相对成熟一些，作为物模理论基础的相似论已趋于定型。定床河工模型试验早已达到成熟阶段，试验成果的可靠性是无庸置疑的。近20年来，动床河工模

型试验在模型的设计及运行方面已积累了极为丰富的经验，试验成果的可靠性也有了显著提高。目前的研究工作主要集中在进一步完善动床模型试验方法上。重点研究的问题有：各种变态，诸如几何变态、比降变态及时间变态等对试验成果的影响；性能优良的轻质沙的选择与制备及其力学性质的研究等。本书有关物模部分共分六章，第五、六两章集中阐明物模的理论基础，量纲分析法与相似论基础；第七、八两章依次介绍定床及动床河工模型试验；第九章讲述包括热量及杂质传输模型、潮汐模型、波浪模型、冰雪模型及气流模型在内的其它各种模型，目的在于扩大读者视野。本来这些物模所回答的问题，相当一部分也可用数模来回答，在数模部分之所以未加介绍，是为了避开对有关现象的基本规律作比较长的阐释，这些阐释对数模必不可免，对物模则是可以避开的；第十章对河工模型试验的设备及运行作了简介。

在前面的论述中，我们反复强调了数模和物模这两种研究手段的有效性，但这并不意味着我们认为这两种研究手段已经完全成熟了。就目前它们所能解决的问题来看，它们确乎已经相当成熟了。就它们应该解决但目前由于种种困难尚不能解决的问题来看，它们还远没有达到成熟阶段。例如，研究河床的平面变形，也即河岸的冲刷问题，两种模型目前都无能为力，现有的一些建议距实际应用还有相当大的距离。从这一点出发，可以认为，河流模拟还是一种大有发展前途的新技术。

另外，在本书中我们是将数模和物模作为两种互不依赖的方法各自独立使用的，实际上，两者有时是可以结合使用，起到相辅相成、取长补短的作用的。举例来说，一维长河段数模可以为这一长河段中的二维短河段物模提供边界条件，这种结合可以避免做长河段物模而消耗很大的投资。复杂边界的定床物模可以提供复杂的流场资料，供数模作为计算河床冲淤变化之用，这种结合可以避免做动床物模而消耗很大的投资。总之，作为研究手段来说，这两种模型是可以相互渗透的，在这一方面已经积累的经验还有待进一步发展。

第一篇 数 学 模 型

第一章 数学模型的基本方程

第一节 数学模拟的意义

数学模拟方法正在成为研究河流泥沙问题的重要手段。以往的研究主要是通过野外和实验室的实际观测或水力模型试验,即通常所说的河工模型试验。在当前,已经有越来越多的理论和应用研究借助于数学模拟来进行。这两种手段相辅相成,互补长短,正在给今后泥沙研究的发展带来深刻影响。

广义说来,凡是通过数学提法来定量描述特定的物理过程并回答某些理论或实际问题的方法,都是数学模拟方法。数学模拟的实现可以通过电子计算机,也可以通过其它物理装置。电子计算机按工作方式可以分为模拟计算机和数字计算机,前者以连续方式来模拟物理现象,而后者则以离散方式来模拟物理现象。模拟计算机价格比较便宜,但通用性和精确度都不如数字计算机,所以,在数学模拟中广泛采用的主要是数字计算机。有些物理现象虽然本质上不相同,但对它们的数学提法都颇为相似,借助于这种相似,人们可以利用一种物理现象来模拟其它的物理现象,例如渗流或热传导问题的电场比拟。尽管它们都是通过物理装置进行模型试验,但所测量的结果却是通过数学控制方程的相似,来换算到完全不同的另一种物理现象,这也属于数学模拟。实现这些模拟的物理设备,可以看作是一台模拟计算机。我们今天已有高效能的数字计算机来解方程组,已经不必再借助于这类模拟。因此,我们今后提到数学模拟,一般都是指数字计算机上所实现的数值模拟。

挟沙水流问题是非常复杂的水、沙以及其它物质(例如海水、异质污染物等)的两相或多相流问题。目前人们已有的认识还很有限,理论上还有不少基本问题有待解决和深入,但已有的成就和经验已经能在一定程度上满足工程实践的需要。早在50年代初期,苏联罗辛斯基(К.И.Росинский)和库兹明(И.А.Кузьмин)已经使用一维数学模型对大型水库的淤积和坝下游冲刷进行长时期和长距离的河床变形计算,二维数学模型也曾偶而用于坝区局部河段的冲刷计算;美国人对水库库首淤积计算进行了类似的工作^[1];我国在50年代后期也开始用一维数学模型进行水库淤积^[2]及河流裁弯取直的变形计算^③;西德汉森^[4](W.Hansen)在50年代中期已开始研究河口、海岸水流泥沙运动的二维数学模型。所有这些研究由于当时计算条件的限制,不得不作较多的简化,从而影响到计算成果的精度和广度。

近20年来,计算机功能的迅速增强和使用的日益普及,推动了泥沙数学模型的蓬勃发

① 参看文献:谢鉴衡等,下荆江系统裁弯后的河床演变研究,武汉水利电力学院研究报告,1959。

展。目前,一维数学模型已广泛用于模拟长河段的长期变形,如修建水利枢纽后上游及下游的长距离冲淤变化,以及河口、海湾因潮流输沙引起的河床变形等。一维模型只能给出河段平均冲淤深度的沿程变化情况,但已基本上能满足工程需要。如需了解短河段的河床变形细节,如水工或河工建筑物对河道冲淤变形的影响,则应采用二维以至三维数学模型。由于问题复杂,这类模型还有待进一步发展完善。

与水力模型相比,数学模型有一些突出的优点。首先,水沙运动是大范围的环境问题,模型在实现与原型的相似方面存在许多难以克服的困难。其次,水力模型往往需要占用规模巨大的场地、耗费大量设备、材料和人力,费用高昂、加之水力模型的建造往往只适用于某一特定问题,改变问题或者改变边界条件,往往需要全部或局部拆除,重新设计建造,因而试验的周期较长。此外,在运行中还需要随时注意消除或补偿环境因素引起的误差(如气温变化以及模型沉陷等)。水力模型的这些困难在数学模型看来,都比较容易处理。数学模型的所有条件都以数值给出,不受缩尺和试验条件的限制,可以严格控制并随时改变边界条件及其它条件;随着计算机的迅速升级换代、功能不断加强、成本不断降低,相对来说费用比较便宜。数学模型具有通用性,只要研制出适合的应用软件,就可以应用于不同的实际问题,因而数学模型具有高效的特点。数值模拟还具有理想的抗干扰性能,重复模拟可以得到完全相同的结果,这是水力模型难以达到的。但是数学模拟要能实现,必须先为它建立整套的控制方程和封闭条件以及有效的计算方法。如果数学描述不能正确反映实际问题,就不能指望数学模拟能够给出合理的结果。目前,泥沙研究的许多重要方面还得依靠经验,这些经验对于数学模型的封闭也是不可少的,如果应用不当,就会脱离实际。因此,数学模拟是有局限的。要提高它的效能尚有待于泥沙理论和实践经验的发展。反过来,数学模拟也能为理论研究作出贡献,通过数值试验可以证实或否定某些设想,发现某些规律,目前这类研究还很缺少。

目前已经建立的水-沙运动数学模型,主要是针对悬移质泥沙的,并且只适用于低含沙量和细颗粒的情形。一般认为,泥沙颗粒对水流脉动具有良好的跟随性,除了沉降运动以外,没有其它的相对运动。根据对空气中雾化硅油滴的计算^[5],当粒子直径为 $5\mu\text{m}$ 时,粒子速度仅为流速的80%,相位则滞后 $70\mu\text{s}$,而当粒径减小到 $1\mu\text{m}$ 时,粒子速度可达流速的99.9%,相位差缩短到 $3.2\mu\text{s}$ 。据估计^[6]当泥沙颗粒直径为 0.06mm 时,它的特征时间约为 10^{-3}s 。现有理论尚不能满意地处理粒子与流体、粒子与粒子之间的相互作用,而且,有关紊流脉动的机制也还研究得不够。数学模型的控制方程是按照连续介质力学的方法建立起来的,只有当泥沙颗粒的特征长远小于问题的特征长并且在体积(或长度)元素中包含足够多的沙子时,连续性假设才是适用的。如果要对局部区域作细致的研究,往往要把网格加密,如果连续性得不到保证,这是没有意义的。

对于数学模拟来说,采用有效的计算方法也是很重要的。对连续问题的离散化会带来离散误差,计算机的位数限制则带来舍入误差。如果计算方法不好,非物理的数值效应可能会导致背离物理图景的计算结果,因此,数值模拟的成功,还有赖于正确构造离散化格式,选择适当的计算方法。

在这一章里,我们将建立河流泥沙问题的数学模型,我们将给出一般形式的控制方程

组，以便从理论上尽可能包容现有的各家模型。为此，我们也准备给出各种应用模型的简化方程，作为一般方程的特殊情形。一些物理和数学上细节的讨论，以及积分形式控制方程的给出，目的在于帮助读者能由此结合实际情况和经验，发展或提出更适当的模型。

第二节 控制体与基本控制方程

如上节所述，在引进了连续性假设之后，就可以把河流、湖泊、水库和各种水域中的水-沙两相运动当作连续介质的流动，从而也就可以用流体力学的一般方法来对它们进行研究（通常可以应用欧拉方法或拉格朗日方法，也就是控制体方法或系统方法）。由于拉格朗日方法应用上的困难，最常用的还是欧拉方法。但是，自然界的物理定律都是对物质系统建立起来的，这些定律一般都涉及到系统的各种参数在运动中的变化，如密度的变化、速度的变化、动量的变化等等。用拉格朗日方法来表示这些变化是很自然的；而用欧拉方法时则必须引入随流微商的概念，即是说，我们必须沿着物质的真正流动方向而不是流场中的任意方向来描述各种参数的变化。这样，欧拉方法中其实也引入了局部拉格朗日方法的概念。在水力学中，流体微团的各种参数的随流微商是大家所熟悉的，但是我们还需要涉及到物质系统的有关随流微商。为了使欧拉方法能用来描述系统的运动，下面将给出有关随流微商的表达公式。这些公式在任何一本比较现代的流体力学（水力学）教材中都可以找到、这里不再重复推导了。

由基本定律所联系的物理量，可以分为两类：一类是与系统中介质的质量相关的量，叫做广延量，如系统的体积、质量、动量、能量等；另一类正好相反，是与系统中介质的质量无关的量，叫做强度量，如压强、温度等；另外，单位质量的广延量（比广延量）也是强度量，如比能，速度等。习惯上，一般用大写字母表示广延量，小写字母表示强度量。设以 Φ 表示系统的广延量， τ 是系统的体积， ρ 是密度，相应地，强度量中 φ 可以定义为

$$\varphi = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\rho\Delta\tau} = \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\tau} \quad (1-1)$$

由此，系统的广延量 Φ 可表示为

$$\Phi = \int_{\Omega} \rho\varphi d\tau \quad (1-2)$$

Ω 是系统所在的区域。

让 φ 分别等于1、速度或比能，我们就可以表示系统的质量、动量或能量；让 $\rho\varphi = s$ 即含沙量，就可以表示系统中泥沙的质量。

现在，我们依照欧拉方法取控制体，它可以是一个微小的体积元素；可以是两个相邻过水断面之间的微小河段；可以是高度等于水深的微小柱体；也可以是任何形式的有限体积。控制体选择上的灵活性可以方便地直接建立一维、二维、三维的微分方程或代数关系，取决于控制体有几个微分尺度；而一维恒定流问题，常常取有限的控制体以简化计算。

对于任何形式的控制体，一般广延量的随流微商可以用等价的固定空间（控制体、控制面）上的运算来表示，计算公式为

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \varphi d\tau = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \varphi d\tau + \int_{\partial\Omega} \rho v_n \varphi d\sigma \quad (1-3)$$

式中左端是广延量 $\int_{\Omega} \rho \varphi d\tau$ 的随流微商；右端第一项是控制体中同一广延量的时间偏微商，

它反映流场的非恒定性；第二项是强度量 φ 在控制面 $\partial\Omega$ （即区域 Ω 的边界）上的通量，反映流场的非均匀性。 v_n 是控制面上系统物质的速度在外法线上的投影，因此，通量的符号当 v_n 从控制体内部指向外部时为正，反之为负。显然，对于一个恒定而均匀的流场，控制体广延量的随流微商是等于零的。

如果控制体的形状固定不变，上面公式中右端的微分号和积分号便可以互换，于是得出第二种形式的控制体公式

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \varphi d\tau = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varphi) d\tau + \int_{\partial\Omega} \rho \varphi v_n d\sigma \quad (1-4)$$

利用高斯公式，控制面上的通量（面积分）可以化为体积分

$$\int_{\partial\Omega} \rho \varphi v_n d\sigma = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \varphi \vec{v}) d\tau \quad (1-5)$$

式（1-4）可以化为第三种形式的控制体公式

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \varphi d\tau = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \varphi) + \nabla \cdot (\rho \varphi \vec{v}) \right] d\tau \quad (1-6)$$

这种形式是在建立三维基本控制方程时所惯用的。

描述水-沙运动的基本物理定律，主要是质量守恒定律和牛顿第二运动定律。前者用以建立浑水、泥沙（必要时还有清水）的连续方程和浑水运动方程。如果涉及温度的变化，例如与工厂、热（核）电站冷却用水及热水排放有关的泥沙运动问题，还需要涉及热力学第一定律即广义的能量守恒定律，用来建立能量方程。在解不唯一的情形下，要想得到能够描述真实物理过程的解答，还必须涉及热力学第二定律，用来建立熵方程。不过，就本书所限定的范围来说，我们将只限于应用质量守恒定律和牛顿第二运动定律。对于不可压缩等温流体，能量方程可以从运动方程导出，因而不是一个独立的方程，尽管在实际工程中也常常用到能量方程，但没有必要专门从能量守恒定律去建立它。

如果用 ρ 表示清水的密度， ρ_s 表示泥沙的密度， ρ_r 表示一点上水-沙混合物微团的密度，用 S 表示该微团中泥沙的分密度即含沙量，这样清水的分密度就应当是 $\rho(1-S/\rho_s)$ ，即单位体积浑水中清水的质量。由这样的定义，浑水密度可定义为

$$\rho_r = \rho \left(1 - \frac{S}{\rho_s} \right) + S \quad (1-7)$$

或者

$$\rho_r = \rho + \frac{\Delta\rho}{\rho_s} S \quad (1-8)$$

这里 $\Delta\rho = \rho_s - \rho$

将质量守恒定律用于控制体中浑水系统的质量，就可以给出浑水连续方程

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho_p d\tau = 0 \quad (1-9)$$

这表示系统的总质量在运动过程中保持不变。若将质量守恒定律用于浑水中的固相泥沙，就可以给出泥沙连续方程

$$\frac{D}{Dt} \int_V S d\tau = 0 \quad (1-10)$$

将牛顿第二定律用于浑水系统，就可以给出浑水运动方程

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho_p \vec{v} d\tau = \vec{F} \quad (1-11)$$

式中 $\vec{v}$ 是流场中一点的速度向量；左端的积分代表控制体中浑水的总动量，右端的 $\vec{F}$ 表示所有外力的和。

在下面两节中，我们将应用控制体来直接建立浅水一维和浅水二维问题的基本方程组。所谓浅水，并非指水深的绝对大小，而是指水深与波长或纵向特征长（一维问题）或水平特征长（二维问题）之比是小量。例如河道中的洪水波，河口、海岸附近的潮汐波，海洋里的地震津波（海啸），一般地都可当作浅水波处理，因为它们都具有很长的波长，水深的大小用波长作为尺度来衡量自然是浅水了。浅水的假定等价于沿水深（或过水断面）压强按静水压强分布，这与大家熟知的缓变流的概念是一致的。某些情况下静水压力的假定会被破坏，例如，当波高与水深相比不是小量时，孤立波就属这种情形。这在河道中发生滑坡、溃坝或其它急剧的瞬时变化时，常常可以观察到。孤立波属于更一般的所谓椭圆余弦波（简称椭余波）的极端情形，在椭余波中，压强在水深上的分布是不同于静压分布的。在大多数情形下，浅水长波假定（也就是静水压力假定），是很好的近似。

第三节 一维问题的基本控制方程

本节将应用控制体直接建立一维问题的基本控制方程。如图 1-1，取两个距离为无限小量 Δx 的过水断面之间的河段做为控制体。设河流断面面积为 A ，冲淤断面面积为 A_0 ，河底与水平面的夹角为 α ，河底纵坡 $i_b = \sin \alpha$ ，水深为 h ，河底高度为 y_0 。通常河道纵坡都很

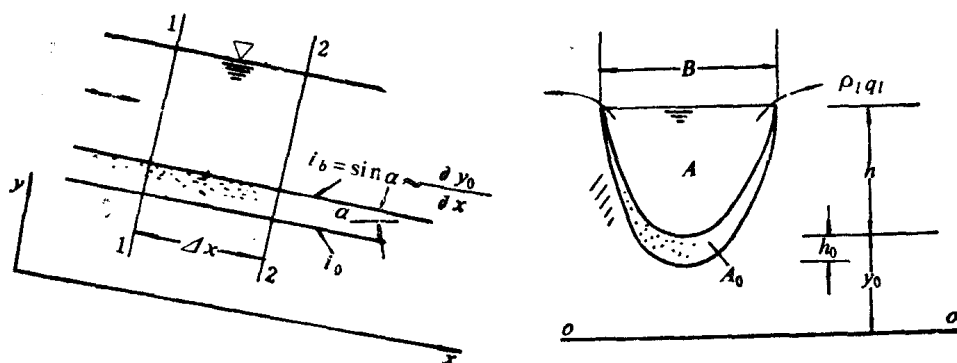


图 1-1 一维河段的控制体示意图

小, 可以近似取 $i_s = \partial y_s / \partial x$, 这里 x 是沿河流纵向选取的水平坐标, 用来近似河流的纵向坐标, 而水深则可近似取铅垂深度。

如上所述, 可以使 $\rho\phi$ 分别代表浑水密度、浑水中泥沙的分密度以及浑水动量, 因此, 可以统一地给出这些量的广延量的随流微商的一维表达式。由于控制体包含过水断面, 而过水断面的形式是随时间变化的, 所以应该采用式 (1-3) 形式的控制体公式。这时体积元素 $d\tau = dA\Delta x$, dA 是取在过水断面上的面积元素; 控制体区域 Ω 的边界面 $\partial\Omega$ (控制面) 由上游过水断面 1—1、下游过水断面 2—2, 河底面和水面四部分所构成。为了便于研究守恒关系, 我们将过水断面 A 和冲淤断面 A_0 合并在一起考虑。设自由面上有向两岸的溢流 (分流) 或两岸向河道的汇流量 q_i , 以单位河道长度计, 相应的浑水密度 ρ_i 或泥沙分密度 (含沙量) s_i 的取值当溢流时为河流的近岸含沙量; 而当汇流时应取决于汇流的具体条件。

这样, 在一维情形, 控制体公式 (1-3) 可表示为

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho\phi d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{A+A_0} \rho\phi dA\Delta x - \int_{A_1} \rho\phi u dA + \int_{A_2} \rho\phi u dA + \rho_i q_i \Delta x \quad (1-12)$$

在冲淤断面 A_0 中不考虑对流运动, 因此, 断面 A_1 上的积分可取 $A_1 = A$, 积分号前的负号是因为已经设 A_1 是上游断面, 在 A_1 上的流动方向是由外部进入控制体内, 如果流速 u 的正方向是下游方向, 它的外法线上的投影就应取负号。同样的理由以及由于断面 2—2 与断面 1—1 之间只相隔无限小的距离, 由连续性的考虑, 可以将断面 2—2 上的通量积分由断面 1—1 上的积分按泰勒级数展开, 即

$$\int_{A_2} \rho\phi u dA = \int_{A_1} \rho\phi u dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_{A_1} \rho\phi u dA \Delta x + \dots$$

代入式 (1-12)

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho\phi d\tau = \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_A \rho\phi dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_0} \rho\phi dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho\phi u dA + \rho_i q_i \right) \Delta x + \dots \quad (1-13)$$

记号 “...” 表示省略了 Δx 的高阶小量。

下面给出一维问题的基本控制方程。

一、浑水连续方程

在式 (1-13) 中取 $\phi = 1$, $\rho = \rho_r$ 代入式 (1-9), 得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \int_A \rho_r dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_0} \rho_r dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho_r u dA + \rho_i q_i \right) \Delta x + \dots = 0$$

除以 Δx , 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \rho_r dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_0} \rho_r dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho_r u dA + \rho_i q_i + \text{无限小量} = 0$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 式中无限小量的极限等于零。由此得浑水连续方程为

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_A \rho_r dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_0} \rho_r dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A \rho_r u dA + \rho_l q_l = 0 \quad (1-14)$$

这是一个瞬时方程，实际应用时应时均化，将有关参数上方加一横杠表示时均值，右上方加一撇表示脉动值。

于是

$$\rho_r = \bar{\rho}_r + \rho'_r \quad u = \bar{u} + u'$$

$$\begin{aligned} \overline{\int_A \rho_r dA} &= \int_A \bar{\rho}_r dA \\ \overline{\int_A \rho_r u dA} &= \int_A \bar{\rho}_r \bar{u} dA + \int_A \overline{\rho'_r u'} dA \end{aligned} \quad (1-15)$$

右边第二项积分中的脉动乘积项的时均值 $\overline{\rho'_r u'}$ 可以看做是因素流脉动在 x 轴方向引起的扩散，它所起的作用是使不均匀的浑水密度沿流动方向趋向于均匀，将 $\overline{\rho'_r u'}$ 与时均参数相联系，可设

$$\overline{\rho'_r u'} = -\varepsilon_x \frac{\partial \bar{\rho}_r}{\partial x} \quad (1-16)$$

式中 ε_x 是 x 方向的紊流扩散系数。

于是 (1-14) 式的时均形式为

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_A \bar{\rho}_r dA + \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_0} \rho_r dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A \bar{\rho}_r \bar{u} dA - \frac{\partial}{\partial x} \int_A \varepsilon \frac{\partial \bar{\rho}_r}{\partial x} dA + \rho_l q_l = 0 \quad (1-17)$$

这是积分形式的浑水连续方程，适用于任何形式的河道断面，包括简单断面和复式断面。对于简单断面的河道，将上式中的积分算出来，可以得到用断面平均参数表示的微分方程

$$-\frac{\partial}{\partial t} (A \rho_m) + \frac{\partial}{\partial x} (AU \rho_m) + \rho_s \frac{\partial A_s}{\partial t} + \rho_l q_l = 0 \quad (1-18)$$

这里略去了紊流扩散项，因为它与对流作用相比甚小。式中 ρ_m 是过水断面上的平均浑水密度， U 是平均流速， ρ_s 是床沙的饱和湿密度（即床沙与饱和空隙水的混和密度），参照式 (1-7) 和 (1-8) 有

$$\rho_m = \rho(1 - S/\rho_s) + S \quad (1-19)$$

或

$$\rho_m = \rho + \frac{\Delta \rho}{\rho_s} S \quad (1-20)$$

以及

$$\rho_s = \rho(1 - \rho'/\rho_s) + \rho' \quad (1-21)$$

或

$$\rho_s = \rho + \frac{\Delta \rho}{\rho_s} \rho' \quad (1-22)$$