形形色色的曲线

上海教育出版社

23

中学生文库

形形色色的曲线

蒋声

上海教育出版社

责任编辑　赵　斌
　　　　　韩希塘
封面设计　姜品珠

内容提要

本书运用高中平面解析几何和微积分初步知识，讨论形形色色曲线的性质和应用．叙述深入浅出，可供高中生阅读和供中学数学教师参考．书中介绍的曲线种类较多，有些还是第一次在中文资料里出现，因而对有关专业的大学生也有一定参考价值。

中学生文库　形形色色的曲线

蒋　声　　上海教育出版社出版
（上海永福路123号）

江苏启东印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行
开本 787×1092 1/32　印张 6　字数 124,000
1985年2月第1版　1985年2月第1次印刷
印数 1- 27,000 本

统一书号：7150·3320　　定价：0.58 元

前　言

各种各样的曲线，形状千姿百态，性质丰富多采，应用举不胜举．无论从哪一方面看，用“形形色色”这四个字来形容曲线，都显得十分恰当．这本以《形形色色的曲线》为题的小册子，就是试图在中学数学知识的基础上，谈谈各种著名的、美丽的和有用的特殊曲线．读者看这本书，一方面可以把刚刚学过的解析几何与微积分知识用起来，另一方面可以增长知识，弄清楚一些有趣事实的数学原理。

你知道电影里是用什么方法来产生光芒四射的效果吗？那里就是利用了某一种曲线的性质，而且这种曲线还有许多奇妙的性质，以至于一位大名鼎鼎的数学家特地在遗嘱里吩咐要把它刻在自己的墓碑上．你一定知道两个物体从不同的高度一起下落，下面的物体先落地，然而你是不是知道，两个物体同时从不同的高度沿着某一种曲线下滑，却能同时滑到终端？……诸如此类，本书当然都要介绍．不过，为了让读者能从阅读中获得最大的乐趣，在前言里还是少说为宜．一面阅读，一面思考，一面联想，或许更有意思些。

为了把一些专门知识通俗地叙述出来，本书难免出现各种缺点和错误，恳请读者多多批评指正。

作　者

1983年8月1日于扬州

目录

ZHONG XUE SHENG WENKU

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1. 用折纸法画抛物线

高中的学生都知道，抛物线是与一个定点 F 及一条定直线 a 距离相等的点的轨迹. F 叫做这条抛物线的焦点，a 叫做它的准线。

抛物线用圆规直尺是作不出来的，可是用一张矩形的纸却可以“折出”一段抛物线. 图1.1中，有一张矩形纸片，设它的一条边为准线 a. 在纸片内部居中的地方取一个点 F 作为焦点，用笔在 F 的位置做上记号. 然后把纸片折一次，使得 a 边正好通过 F，或者说 a 边上有一点与 F 重合，然后抹平纸片，得到一条折痕 l（为了看得清楚，不妨用笔把直线 l 描出来）。继续这样折下去，得到若干条折痕，你会发现这些折痕“围出”一条抛物线的轮廓(图1.2). 只要画一条与这些折痕都相切的光滑曲线，就能得到所要画的抛物线了.

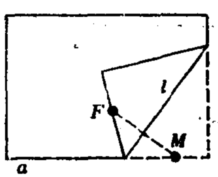

图 1.1

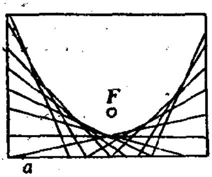

图 1.2

这种方法很有趣，要证明所得曲线确是抛物线也不难. 如图1.3，根据折法，直线 a 上的点M关于折痕 l 与 F 点对

称. 作$MP\perp a$, 交l于P; 连PF, 则$PF=PM$, 即P到定点F的距离等于到定直线a的距离, 所以点P在以F为焦点、a为准线的抛物线上. 其次, 设Q是l上不同于P的任意一点. 连QF, QM, 作$QN\perp a$, 设垂足为N, 那么由直角三角形斜边大于直角边的性质, 有

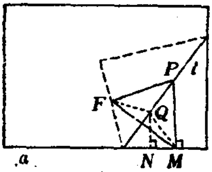

图 1.3

$$QF=QM>QN,$$

总之, $QF\neq QN$, 所以Q点不在这条抛物线上. 直线l与这条抛物线有且只有一个公共点P, 并且由折纸方法知道l不会垂直于a, 因而l一定是这条抛物线的一条切线. 同理, 每条折痕都是这抛物线的一条切线. 若干条折痕包围住同一条抛物线, 就把这条抛物线的轮廓清楚地显示出来了.

2. 用折纸法画椭圆

上面一节使我们想到了抛物线的兄长——椭圆. 椭圆是到两个定点的距离之和等于定长的点的轨迹. 这两个定点叫做椭圆的焦点.

椭圆能不能用折纸法作出呢? 也能. 具体作法如下.

先用圆规在纸上画一个圆, 小心地沿着圆周剪下一张圆形纸片来. 设圆心是O, 在圆内任取一点F(不能取O), 用笔在F的位置做上记号. 如图2.1, 把圆纸片翻起一角, 使圆周正好通过F, 或者说使圆周上有一点M落到F的位置上, 然

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

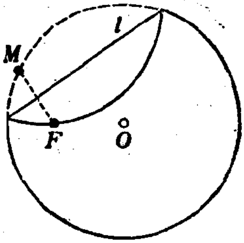

图 2.1

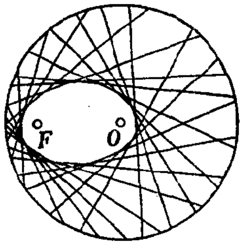

图 2.2

后抹平纸片，得到一条折痕 l（为了看得清楚，也不妨用笔把直线 l 描出来）．这样继续折下去，就得到若干条折痕．你会发现，这些折痕围出一个椭圆的轮廓（图 2.2）．画一条与这些折痕都相切的光滑曲线，就得到所要画的椭圆了．

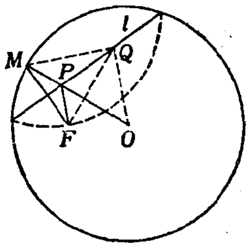

图 2.3

为什么这样画出的曲线一定是椭圆呢？读者可以仿照上一节自己证证看．我们只是把证明需要的辅助图形画成图 2.3，并且告诉你 F 与 O 正是椭圆的焦点．

3. 百发百中

人们常用"百发百中"来赞美神枪手．但是我们这里说的"百发百中"，却是指一个有趣的小游戏．

如图 3.1，用硬纸做一个椭圆形的盒子，并且在椭圆形盒底的一个焦点上放一粒钮扣，作为子弹，在另一个焦点处竖立

一个钢笔套，作为靶子．你不需要瞄准，把钮扣子弹沿着盒底面内的任何方向弹射出去，经过盒壁反射后，都一定命中靶子．真是不折不扣的百发百中呢！

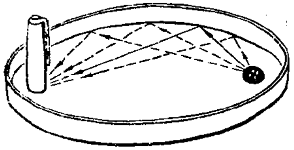

图 3.1

这个游戏的原理，在物理方面是利用了反射定律，在数学方面是利用了椭圆的切线和法线的性质．反射定律告诉我们，当一束光线被平面镜反射时，反射光线与镜面法线的夹角(反射角)，总是等于入射光线与法线的夹角(入射角)．当反射镜的表面形状是曲面时，可以把一小块曲面近似地当成一小块平面，因而"反射角等于入射角"这一定律仍然适用．现在我们的盒底是椭圆形的，而椭圆的法线有一个特殊的性质：若 P 是椭圆上的任意点，F_1 和 F_2 是两个焦点，则法线 PN 平分 $\angle F_1PF_2$(图 3.2)．因此，如果有一束光线沿 F_2P 方向射到椭圆上，经反射后一定沿 PF_1 方向射出．P 是椭圆上的任意点，所以从一个焦点 F_2 沿任何方向射出的光线，经过椭圆反射后都通过另一个焦点 F_1．把射出光线换成射出钮扣，经过椭圆盒壁反射后，那当然总是会击中放在另一个焦点 F_1 处的钢笔套啦．

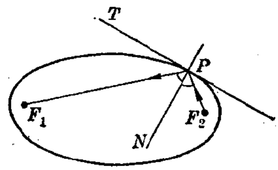

图 3.2

4. 双曲线为摄影师帮忙

现在该来谈谈双曲线了．双曲线是到两个定点的距离之差等于定长的点的轨迹．这两个定点叫做双曲线的焦点．把双曲线绕着两个焦点的连线在空间旋转一周，所得到的曲面叫做双叶旋转双曲面．有一种灯具的反射镜的表面就是做成这种曲面的形状(如图4.1)．这种镜面有一个特点，把光源放在一个焦点上，那么它所发出的光线经过镜面反射以后，好像都是从另一个焦点发出来似的．

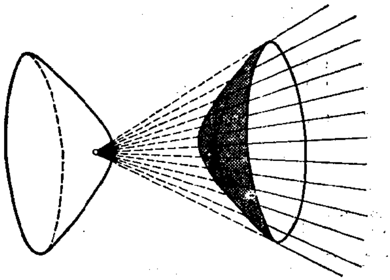

图 4.1

这样做出的灯具有什么好处呢？原来在室内拍照片时，由于自然光线不足，常常需要借助闪光灯或其它照明灯具．为了把被摄对象照得更亮，摄影师总想把灯尽可能放近些．但是一般自然光线接近于平行光线，因而均匀柔和；而灯光则是中心放射式的，灯放得越近，光线的放射性效应越明显．为了既获得足够的亮度，又使光线尽可能地均匀柔和，专门为摄影师设计的照明灯，就往往利用双曲线的光学性质，把反光镜的表面做成双叶旋转双曲面的形状，并让灯丝恰好位于焦点．

5. 让光线多跑两趟

1672 年，卡塞格林发明了一种天文望远镜．这种望远镜巧妙地利用了曲线的性质，被人们叫做卡塞格林反射式天文望远镜．图 5.1 就是这种望远镜的示意图．

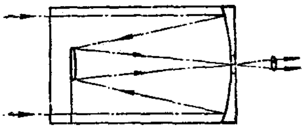

图 5.1

图中的矩形边框表示望远镜的镜筒，左边是筒口，右边是筒底．紧靠筒底的曲线表示一面口径很大的反射镜，它的截面是抛物线弧．大反射镜的正中有一个小洞，和筒底正中的小窗口连在一起．左边靠近筒口的地方还有一面较小的反射镜，小反射镜的截面是双曲线弧，并且双曲线的一个焦点恰好与抛物线的焦点重合，双曲线的另一个焦点在镜筒底部中心的小窗附近．

这种望远镜的工作原理是这样的：假定图 5.1 中的点划线表示光线，箭头表示光线前进的方向．来自遥远星空的平行光线，进入卡塞格林望远镜的镜筒以后，直奔筒底，在那里受到抛物线大反射镜的反射，掉转头来，朝着筒口方向，对准抛物线的焦点射去．在到达目的地之前，就已遇到拦路的双曲线小反射镜．由于这些光线的投射目标恰好也是双曲线的一个焦点，所以在小反射镜的反射之下，这些光线转身重新射向镜筒底部，并且对准双曲线的第二个焦点射去(为什么？读者自己想一想)，在那里聚焦成像．而成像处附近正是镜筒底部的

小窗口，所以在镜筒后面的观测者可以透过目镜观测到天空的景象.

卡塞格林反射式天文望远镜最巧妙的地方，在于它把抛物线和双曲线组合起来，让进入镜筒的光线在聚焦过程中往返奔波，多跑两趟，因而镜筒的长度比光线实际走过的路程短得多，这样就能使仪器的体积缩小，重量减轻，既经济，又方便．所以，在现代的激光雷达和无线电接收装置中也都喜欢采用卡塞格林的反射系统.

6. 杰尼西亚的耳朵

据传说，在意大利西西里岛有一个山洞，很久以前，叙拉古的暴君杰尼西亚把他的一些囚犯关在这个山洞里．囚犯们多次密谋逃跑，但是每次的计划都被杰尼西亚发现了．起初，囚犯们怀疑自己的同伴中有内奸．他们彼此指责，互相猜疑，但是始终没有发现任何一个囚犯告密．后来渐渐觉察到囚禁他们的山洞形状古怪，洞壁把囚犯们的话都反射到狱卒的耳朵里去了．囚犯们诅咒这个山洞是"杰尼西亚的耳朵"．从图 6.1 可以看出，山洞的剖面近似于椭圆，犯人聚居的地方恰好在一个焦点附近．狱卒在另一

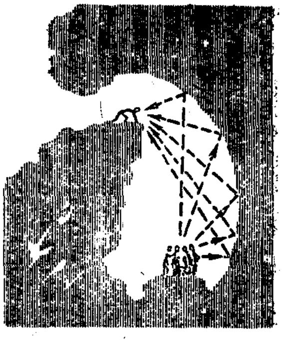

图 6.1

个焦点偷听，无论囚犯们怎样压低嗓门，他们的声音照样被狱卒偷听得清清楚楚.

这个传说表明，椭圆形的反射面不但能使从一个焦点发出的光线在另一个焦点会聚，而且能使从一个焦点发出的声音在另一个焦点聚焦. 人们曾经发现一个古希腊音乐厅的墙壁正是椭圆形的，乐池位于一个焦点附近. 在这个音乐厅里，乐队演奏的声音会在另一个焦点重新会聚起来. 美国有一个教堂也有类似的设计. 这种设计的出发点不得而知. 其实声音的聚焦并不是好事，因为在另一焦点附近的听众固然连演奏或演讲者的细声慢语都能听见；但是在室内其它地方，音响效果却差得多. 因而，现代在设计音乐厅、影剧院、大会堂等大型建筑物时，建筑设计人员都很注意设法避免声聚焦.

7. 抛物线与屋顶

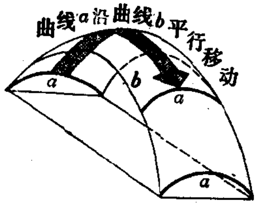

图 7.1

如图7.1，一条曲线 a 可以沿着另一条曲线 b 平行移动(即在移动过程中曲线 a 上任意两点的连线与初始位置平行). 一条曲线沿着另一曲线平行移动所产生的曲面，叫做平移曲面.

在图7.1中，动曲线 a 是开口向下的抛物线，定曲线 b 也是开口向下的抛物线，这样得到的平移曲面叫做椭圆抛物面. 而在图7.2中，动曲线 a 仍是开口向下的抛物线，定曲线

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com