经人教社授权配合人教版初中新教材使用

北京九所名校

金牌解题

初三几何

全一册

本册主编　倪斯杰

教师编写组

北京二中
北京四中
北京八中
北京八十中
北京大学附中
清华大学附中
北京师范大学附中
北京师范大学实验中学
中国人民大学附中

团结出版社　知识出版社

编者的话

《北京九所名校·金牌解题》出版以来，深得教师、家长的好评，尤其是受到了广大中学生的欢迎。在广泛征求社会各界意见的前提下，我们对本套丛书进行了较大幅度的修订，力求贯彻国家教育部关于中学教学和升学考试改革的精神，紧扣人民教育出版社修订出版的2003年春季初中教材，以质求存，以新取胜。

本套丛书在体例设置上有较大的特色，具体表现为：

（一）体例结构合理。本书有讲、有练、有分析，并将“讲”、“练”、“析”有机结合起来，既对知识进行有序整理，又能体现以能力训练为主的思想，同时还能对学生进行多向解题思路的指导。

（二）思维训练层递。我们在各科练习栏目中，特别推出了**铜牌题→银牌题→金牌题**层递练习：

铜牌题为双基题，侧重于基础知识和基本技能的训练；

银牌题为提高题，侧重于学科知识的融会贯通和灵活运用；

金牌题为综合题，侧重于综合能力的强化训练，注重学生的发散思维和创造思维培养，并注意学科间的渗透。这种梯级递进式的训练，对培养学生的学科意识和跨学科意识都大有裨益。三类题目均有历年中考经典题目的解析，以提高学生的应考能力和素质。

（三）名校名师编著。本套丛书是由久负盛名的九所全国名牌中学的一线骨干教师编写的。他们将多年的丰富教学经验和科研成果融入丛书中，并以高度的社会责任感，在原版基础上进行了修改。修订后的《北京九所名校·金牌解题》体现着最新的教学理念和教研教改成果，同时也凝聚着老师们的心血。我们怀着最诚挚的敬意向他们表示感谢。同时希望作者们的智慧、我们的汗水合而为一，化为学生学习的动力，去摘取他们前进道路上的一枚枚“金牌”！

编者

2002年12月

目　录

第六章　解直角三角形

第七章　圆

◉第四节　多边形和圆

JIN PAI JIE TI

第六章　解直角三角形

第一节 锐角三角函数

《知识解析》Zhi shi jie xi

知识要点

1.知识点：

(1)锐角三角函数的定义：

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$ 为锐角，$\angle C$ 为直角

$\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{邻边}}$　　$\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}$

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}$　　$\cot A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}$

即：$\sin A=\dfrac{a}{c}$；$\cos A=\dfrac{b}{c}$；$\tan A=\dfrac{a}{b}$；$\cot A=\dfrac{b}{a}$.

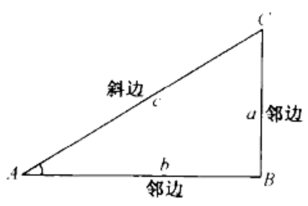

图 6－1

几点说明：

① 从定义中可以看出正弦、余弦、正切、余切都是在直角三角形中定义的，要避免在任意三角形中套用.

②$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$，$\cot A$ 分别是正弦、余弦、正切、余切的数学表达符号，是一个整体，不能理解为 sin 与 A，cos 与 A，tan 与 A，cot 与 A 的乘积.

③ 在直角三角形中，正弦、余弦、正切、余切分别是直角三角形的两边的比值，没有单位，它只与 $\angle A$ 的大小有关，而与三角形的边长无关，当锐角 A 确定之后，这些比值都是固定值.

(2)锐角三角函数的概念：

锐角 A 的正弦 $\sin A$、余弦 $\cos A$、正切 $\tan A$、余切 $\cot A$ 都叫做 $\angle A$ 的锐角三角函数.

几点说明：

① 对于三个大写字母表示的角，它的三角函数中，角的符号"∠"不能省略，例如"sin∠ADB"不能写成"sinADB".

② 在 Rt△ABC 中，由 $a > 0, b > 0, c > 0, a < c, b < c$ 可知 $0 < \sin A < 1$, $0 < \cos A < 1, \tan A > 0, \cot A > 0$.

(3) 特殊角 0°,30°,45°,60°,90° 角的三角函数值：

函数＼角 α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

记忆方法：

① 利用表格记忆各特殊角三角函数值，如上表.

② 根据三角函数的定义结合图形记忆 30°、45°、60° 的各个三角函数值.（如图 6－2、6－3）

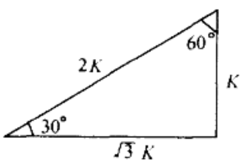

图 6－2

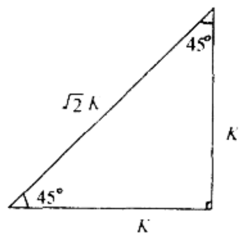

图 6－3

(4) 互为余角的三角函数关系：

若 $A + B = 90°$，则

$$\sin A = \cos B = \cos(90° - A), \cos A = \sin B = \sin(90° - A)$$
$$\tan A = \cot B = \cot(90° - A), \cot A = \tan B = \tan(90° - A)$$

几点说明：

① 上述关系由三角函数定义可得，例如：$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B$.

② 此结论适用于两锐角互余的情况，它们可以不是同一个直角三角形中的两个锐角.

③ 利用互余两角之间的三角函数关系，可以进行三角关系式的化简和有关的计算和证明.

(5) 同角的三角函数关系：

① 平方关系：$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$　　(1)

② 倒数关系：$\tan A \cdot \cot A = 1$　　(2)

③ 比值关系：$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$，$\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$　　(3)

几点说明：

① 平方关系利用锐角三角函数的定义并结合勾股定理可得到，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$ 为锐角，$\angle C$ 为直角，因为 $\sin A = \dfrac{a}{c}$，$\cos A = \dfrac{b}{c}$，所以 $\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\dfrac{a}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{c^2}$，由勾股定理知：$a^2 + b^2 = c^2$，所以 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$；倒数关系和比值关系利用三角函数的定义可得.

② 对于上述关系的变形也应熟记，如(1)式可变形为 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$，$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$；(2)式可变形为 $\tan A = \dfrac{1}{\cot A}$，$\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$；(3)式可变形为 $\sin A = \tan A \cdot \cos A$，$\cos A = \cot A \cdot \sin A$，利用这些关系式及其变形可进行同角三角函数之间的相互转化.

(6) 锐角三角函数值的变化规律：

当角在 $0° \sim 90°$ 之间变化时，正弦值、正切值随角度的增大而增大，余弦、余切值随角度的增大而减小. 可简记为："正弦、正切，角大值大；余弦、余切，角大值小".

利用三角函数值的变化规律，可根据角的大小，比较其同名三角函数值的大小，也可根据两个角的同名三角函数值的大小，比较两个角的大小.

2. 重点：

(1) 弄清正弦、余弦、正切、余切的定义.

(2) 熟记 30°、45°、60° 角的三角函数值.

3. 难点：

锐角三角函数的定义.

4. 误点：

30° 与 60° 的三角函数值易混淆，0° 与 90° 的三角函数值易混淆. 应结合互余两角的三角函数关系加以区别，例如：$\sin 30° = \cos 60°$，$\sin 0° = \cos 90°$.

重点　难点精析

例 1　如图6－4，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$ 于 D，若 $AB = 16$，$BC = 12$. 求 $\sin\alpha$ 的值.

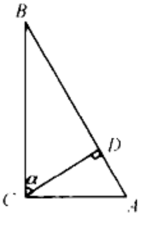

图 6－4

分析： 要求 $\sin\alpha$，必须把 $\angle\alpha$ 放在某个直角三角形中，如图可知，$\angle\alpha$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，根据锐角正弦概念，$\sin\alpha = \dfrac{\angle\alpha \text{ 的对边}}{\text{斜边}}$，即 $\sin\alpha = \dfrac{BD}{BC}$，因此只需求 BD 即可. 此外，还可以发现，$\angle\alpha = \angle A$，因此只要求出 $\sin A$，它就等于 $\sin\alpha$.

解法一： $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$CD \perp AB$ 于 D

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle CBD$. $\therefore BC^2 = AB \cdot BD$.

$\because BC = 12$，$AB = 16$，$\therefore BD = 9$.

$\therefore \sin\alpha = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.

解法二: $\because Rt\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$, $\therefore \angle A + \angle B = 90°$.

$\because CD \perp AB$ 于D, $\therefore \angle\alpha + \angle B = 90°$. $\therefore \angle\alpha = \angle A$.

$Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90°$, $BC = 12$, $AB = 16$

$\therefore \sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$. $\therefore \sin\alpha = \sin A = \dfrac{3}{4}$.

例 2　计算:(1) $\tan^2 30° + 2\sin60° \cdot \cos45° + \tan45° - \cot60° - \cos^2 30°$;

(2) $\dfrac{\sin30° - \tan45°}{\cot30° - 2\cot45°}$.

分析:特殊锐角的三角函数值必须熟练记忆.计算时注意根式的运算,结果应化简.

解:(1) $\tan^2 30° + 2\sin60°\cos45° + \tan45° - \cot60° - \cos^2 30°$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12} + \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2) $\dfrac{\sin30° - \tan45°}{\cot30° - 2\cot45°} = \dfrac{\frac{1}{2} - 1}{\sqrt{3} - 2} = \dfrac{1}{4 - 2\sqrt{3}} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}}{16 - 12} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}$

例 3　化简:(1) $\sqrt{1 - 2\tan60° + \tan^2 60°}$;

(2) $\sqrt{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1}$(其中 $0° < \alpha < 90°$).

分析:第(1)小题可化为$\sqrt{(1 - \tan60°)^2}$,根据公式$\sqrt{a^2} = |a|$可得$|1 - \tan60°|$.将$\tan60°$代入即可进一步化简,第(2)小题同样可得$|\sin\alpha - 1|$,因$\sin\alpha = \dfrac{\angle\alpha\text{的对边}}{\text{斜边}}$,而在直角三角形中,斜边为最长边,所以对于任何锐角α, $0 < \sin\alpha < 1$,同理$0 < \cos\alpha < 1$.这个性质会经常用到.

解:(1) $\sqrt{1 - 2\tan60° + \tan^2 60°} = \sqrt{(1 - \tan60°)^2} = |1 - \tan60°| = |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$;

(2) $\sqrt{\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + 1} = \sqrt{(\sin\alpha - 1)^2} = |\sin\alpha - 1|$

$\because 0° < \alpha < 90°$, $\therefore 0 < \sin\alpha < 1$.

$\therefore$ 原式 $= 1 - \sin\alpha$.

例 4　(1)已知: $\cos43°26' = 0.7262$,求 $\sin46°34'$;(2)求$\dfrac{\tan35°}{\cot55°}$.

分析:本题所求都不是特殊锐角三角函数值,不能代入数值,但可发现角度间关系,即$43°26'$与$46°34'$互余,$35°$与$55°$也互余.因此应考虑应用互余两角的三角函数关系.

解:(1) $\because 43°26' + 46°34' = 90°$, $\therefore \sin46°34' = \cos43°26' = 0.7262$.

(2) $\because 35° + 55° = 90°$, $\therefore \dfrac{\tan35°}{\cot55°} = \dfrac{\tan35°}{\tan35°} = 1$.

例 5　已知α为锐角,且 $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$,求 $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 和 $\cot\alpha$ 的值.

分析: $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$,即$\angle\alpha$的对边比斜边为$\dfrac{3}{5}$,不妨设$\angle\alpha$的对边为$3k$,斜边为$5k$,则由勾股定理可求出$\angle\alpha$的邻边为$4k$,再根据锐角三角函数定义可求其余三角函数值.

另外,同一个锐角的三角函数之间有平方关系,倒数关系和商的关系,利用它们也可以

求其他三角函数,如根据 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可求 $\cos\alpha$,进一步再求 $\tan\alpha$ 和 $\cot\alpha$.应注意锐角三角函数值都是正的,求 $\cos\alpha$ 开方时应取正值.

解法一: 如图6-5,设 α 为 Rt△ABC 的一个锐角,$\because \sin\alpha=\frac{3}{5}$,设 $BC=3k$,$AB=5k$,由勾股定理 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(5k)^2-(3k)^2}=4k$.

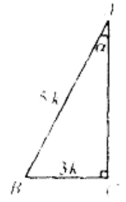

图6-5

$\therefore \cos\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{4k}{5k}=\frac{4}{5}$,

$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{3k}{4k}=\frac{3}{4}$,

$\cot\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{4k}{3k}=\frac{4}{3}$.

解法二: $\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$,$\alpha$ 为锐角.

$\therefore \cos\alpha>0$.$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$.

$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$.$\therefore \cot=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{4}{3}$.

例6 计算:(1) $\tan41^\circ\cdot\tan43^\circ\cdot\tan45^\circ\cdot\tan47^\circ\cdot\tan49^\circ$;

(2) $\frac{1-\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}-\tan\alpha\cdot\cot\alpha$.

分析: (1)题利用三角函数关系 $\tan\alpha=\cot(90^\circ-\alpha)$,$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$ 可进行计算.

(2)题利用三角函数关系 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,$\tan\alpha\cdot\cos\alpha=1$ 可进行计算.

解: (1) $\tan41^\circ\cdot\tan43^\circ\cdot\tan45^\circ\cdot\tan47^\circ\cdot\tan49^\circ$

$=\tan41^\circ\cdot\tan43^\circ\cdot\tan45^\circ\cdot\cot43^\circ\cdot\cot41^\circ$

$=(\tan41^\circ\cdot\cot41^\circ)\cdot(\tan43^\circ\cdot\cot43^\circ)\cdot\tan45^\circ=1$

(2) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}-\tan\alpha\cdot\cot\alpha$

$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}-1=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}-1=1-1=0$

例7 不求值,判断式子的符号:$(\cos25^\circ-\cos50^\circ)(\tan40^\circ-\tan55^\circ)$

分析: 要判断两式乘积的符号,只需知道这两个式子是正是负,而这两个式子又是两个三角函数值的差,要判断两数差是正是负,应知道两数谁大谁小.这可以根据三角函数的增减性判断.

解: 锐角的余弦值随角度的增大而减小,

$\because 25^\circ<50^\circ$ $\therefore \cos25^\circ>\cos50^\circ$.$\therefore \cos25^\circ-\cos50^\circ>0$

而锐角的正切值随角度的增大而增大,

$\because 40^\circ<55^\circ$,$\therefore \tan40^\circ<\tan55^\circ$.$\therefore \tan40^\circ-\tan55^\circ<0$.

$\therefore (\cos25^\circ-\cos50^\circ)(\tan40^\circ-\tan55^\circ)<0$.

例8 选择题:已知 $\angle\alpha$ 为锐角,$\cos\alpha=0.75$,则 α 的范围是(　　)

A. $0^\circ<\alpha<30^\circ$　　　　B. $30^\circ<\alpha<45^\circ$

C. $45^\circ < \alpha < 60^\circ$　　　　D. $60^\circ < \alpha < 90^\circ$

分析：我们知道 $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$，根据锐角三角函数的增减性，要判断 α 的范围，只需知道 $\angle\alpha$ 的余弦值的范围.

解：$\because \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$，而 $\frac{\sqrt{2}}{2} < 0.75 < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore 30^\circ < \alpha < 45^\circ$，因此选 B.

例 9　如果 $\angle A$ 为锐角，$\cos A = \frac{1}{4}$，那么　　（　　）

A. $0^\circ < A \leqslant 30^\circ$　　　　B. $30^\circ < A \leqslant 45^\circ$

C. $45^\circ < A \leqslant 60^\circ$　　　　D. $60^\circ < A \leqslant 90^\circ$

分析：$\because \cos A = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$，$\cos A = \frac{1}{4} > 0 = \cos 90^\circ$

当角度在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之间变化时，余弦值随着角度的增大（或减小）而减小（或增大）.

$\therefore 60^\circ < A < 90^\circ$　应选 D.

例 10　当$45^\circ < x < 90^\circ$ 时，有

A. $\sin x > \cos x > \tan x$　　　　B. $\tan x > \cos x > \sin x$

C. $\cos x > \sin x > \tan x$　　　　D. $\tan x > \sin x > \cos x$

分析：$\because 45^\circ < x < 90^\circ$，不妨取 $x = 60^\circ$

$\therefore \sin x = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos x = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$，$\tan x = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\because \sqrt{3} > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$，　　$\therefore \tan x > \sin x > \cos x$.

$\therefore$ 应选 D.

例 11　计算：$(\sqrt{7} - \sin 36^\circ)^0 \cdot \frac{\cos 30^\circ \cdot \tan 60^\circ}{\cos 60^\circ + \sin 45^\circ} + \left(\frac{\sin 30^\circ - \cos 45^\circ}{\sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ}\right)^{-1} \cdot \cot 45^\circ$.

分析：若 $a \neq 0$ 时，$a^0 = 1$. $\because \sqrt{7} - \sin 36^\circ \neq 0$. $\therefore (\sqrt{7} - \sin 36^\circ)^0 = 1$.

此项中的 $\sin 36^\circ$ 是一项干扰支，因为 $\sin 36^\circ$ 不是特殊值，求不出来，致使解题陷入僵局，其实不需要求 $\sin 36^\circ$ 之值，只需要知道$\sqrt{7} - \sin 36^\circ \neq 0$ 即可. 因而，解题时，必须善于排除干扰支，准确使用数学概念，求出正确答案. 对于特殊角三角函数值的计算，一要准确无误代入三角函数值，二要按照实数的运算法则进行运算，三是运算的结果必须是最简关系式.

解：原式 $= 1 \cdot \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} + \left(\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}\right)^{-1} \cdot 1 = \frac{3}{\sqrt{2} + 1} + (1 - \sqrt{2})^{-1}$

$= 3(\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = 3\sqrt{2} - 3 - 1 - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 4$

例 12　已知方程$3x^2 - 4\sqrt{3}x + 3k = 0$ 的两根为 $\tan\theta$，$\cot\theta$，求 k 和θ（θ 为锐角）

分析：$\because \tan\theta$，$\cot\theta$ 为二次方程 $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 3k = 0$ 的二根，根据根与系数关系式，

$\therefore \begin{cases} \tan\theta + \cot\theta = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \\ \tan\theta \cdot \cot\theta = k. \end{cases}$

$\because \tan\theta \cdot \cot\theta = 1, \therefore k = 1.$

$\therefore$ 原方程为 $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0. \therefore x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \sqrt{3}.$

即 $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cot\theta = \sqrt{3}$ 或 $\tan\theta = \sqrt{3}, \cot\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

故 $\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 60^\circ$

例 13 在 $\triangle ABC$ 中,三边之比 $a:b:c = 1:\sqrt{3}:2$,则 $\sin A + \tan A$ 等于( )

A. $\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$　　B. $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

解:$\because a:b:c = 1:\sqrt{3}:2$ $\therefore$ 可设 $a = k, b = \sqrt{3}k, c = 2k (k > 0)$

$\therefore a^2 + b^2 = k^2 + (\sqrt{3}k)^2 = 4k^2 = (2k)^2 = c^2$

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,且 $\angle C = 90^\circ$

根据三角函数定义,可知:

$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}, \tan A = \frac{a}{b} = \frac{k}{\sqrt{3}k} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \sin A + \tan A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}}{6}$. $\therefore$ 应选 A.

知识引申 Zhi shi yin shen

例 14 如图6-6,已知 AD 是直角 $\triangle ABC$ 的斜边 BC 上的高,在 $\triangle ADB$ 及 $\triangle ADC$ 中分别作内接正方形,使每个正方形有两条边分别在 DB、DA 及 DC、DA 上,而两个正方形的第四个顶点 E、F 各在 AB、AC 上,求证:$AE = AF$.

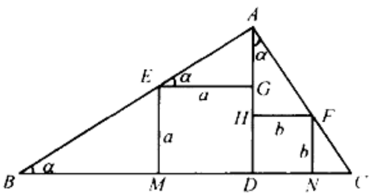

图 6-6

解:设 $\angle ABC = \alpha$,正方形 $EMDG$ 与正方形 $DNFH$ 的边长分别为 a, b.

$\because AD = AG + DG = a \cdot \tan\alpha + a,$

$AD = AH + DH = b \cdot \cot\alpha + b,$

$\therefore a\tan\alpha + a = b\cot\alpha + b.$

$\therefore a = \frac{b(1+\cot\alpha)}{1+\tan\alpha} = \frac{b\cot\alpha(1+\cot\alpha)}{1+\cot\alpha} = b \cdot \cot\alpha = AH$

$\because AE = \frac{a}{\cos\alpha}, AF = \frac{AH}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha}, \therefore AE = AF.$

例 15 如图6-7,Rt$\triangle ABC$ 中,有正方形 $DEFG$,D、G 分别在 AB、AC 上,E、F 在斜边 BC 上,求证:$EF^2 = BE \cdot FC$.

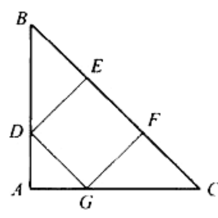

图 6-7

解:在 Rt$\triangle ADE$ 中,$\tan B = \frac{DE}{BE}$,

在 Rt$\triangle GFC$ 中,$\tan C = \frac{GF}{CF}$,

$\because \angle B + \angle C = 90^\circ, \therefore \tan B = \tan(90^\circ - C) = \cot C$

$\therefore \frac{DE}{BE} \cdot \frac{GF}{CF} = \tan B \cdot \tan C = \cot C \cdot \tan C = 1.$

$\because DE = GF = EF, \therefore EF^2 = BE \cdot CF$

例 16　如图6－8，在 $\triangle ABC$ 外侧作正方形 $ABDM$ 和 $ACEN$，过 D、E 向 BC 作垂线 DF、EG，垂足分别为 F、G，求证：$BC = DF + EG$.

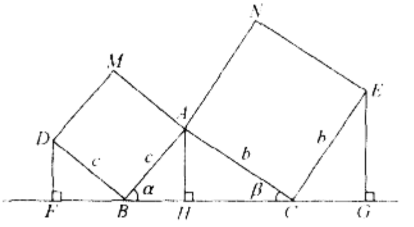

图 6－8

解：在 Rt$\triangle EGC$ 中，$\sin(90° - \beta) = \frac{EG}{b}$.

$\therefore EG = b\cos\beta$.

在 Rt$\triangle DBF$ 中，同理，$DF = c\cos\alpha$（设 b，c，α，β 如图）

$\therefore EG + DF = b\cos\beta + c\cos\alpha$.

在 Rt$\triangle ABH$ 中，$BH = c\cos\alpha$，在 Rt$\triangle ACH$ 中，$CH = b\cos\beta$.

$\because BC = BH + CH, \therefore BC = b\cos\beta + c\cos\alpha, \therefore BC = EG + DF$.

例 17　设顶角 $A = 108°$ 的等腰三角形的高为 h，$\angle A$ 的三等分线及其外角的四等分线分别为 p_1, p_2，求证：$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} = \frac{1}{h^2}$.

解：如图6－9，设 $\triangle ABC$ 的底边上的高 $AH = h$，$\angle A$ 的三等分线 $AD = p_1$，$\angle A$ 的外角四等线 $AE = p_2$，$\angle BAC = 108°$，$AB = AC$，$\therefore \angle BAH = \frac{1}{2}\angle BAC = 54°$，$\angle BAD = \frac{1}{3}\angle BAC = 36°$，$\therefore \angle DAH = \angle BAH - \angle BAD = 54° - 36° = 18°$.

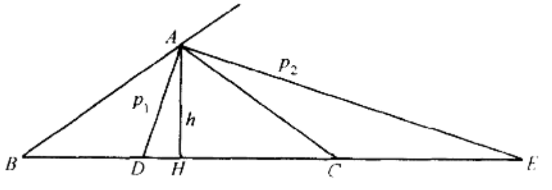

图 6－9

在 Rt$\triangle ADH$ 中，$\cos 18° = \frac{h}{p_1}$,

$\because \angle CAE = \frac{1}{4}(180° - 108°) = 18°$,　$\angle ACB = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$,

$\therefore \angle AEC = 18°$

在 Rt$\triangle AHE$ 中，$\sin 18° = \frac{h}{p_2} \therefore \frac{h^2}{p_1^2} + \frac{h^2}{p_2^2} = \cos^2 18° + \sin^2 18° = 1$,

$\therefore \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} = \frac{1}{h^2}$

例 18　如图6－10，已知 $\angle BAC = 90°$，$AD \perp BC$，$DE \perp AB$，$DF \perp AC$，垂足分别为 D、E、F. 求证：$\frac{AB^3}{AC^3} = \frac{BE}{CF}$

解:设$\angle ABC=\alpha$,则$\angle DAF=\angle CDF=\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\cot\alpha=\dfrac{BE}{DE}\Rightarrow BE=DE\cdot\cot\alpha\\ \tan\alpha=\dfrac{CF}{DF}\Rightarrow CF=DF\cdot\tan\alpha\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{DE}{DF}\cdot\dfrac{\cot\alpha}{\tan\alpha}=\dfrac{DE}{DF}\cdot\cot^2\alpha\\ \cot\alpha=\dfrac{AF}{DF}=\dfrac{DE}{DF}(\because AF=DE)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

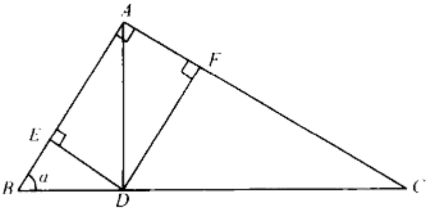

图 6－10

$\dfrac{BE}{CF}=\cot^3\alpha$

$\cot\alpha=\dfrac{AB}{AC}\Rightarrow\dfrac{AB^3}{AC^3}=\cot^3\alpha\Rightarrow\dfrac{AB^3}{AC^3}=\dfrac{BE}{CF}$

例 19　如图6－11,在正方形$ABCD$中,AE平分$\angle BAC$交BC于E,交OB于F,求证:$EC=2OF$

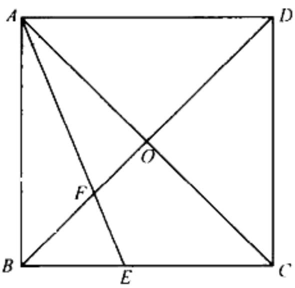

图 6－11

略解:$\because\angle BEF=\angle ACB+\angle EAC=45^\circ+\angle EAC$,

$\angle BFE=\angle ABD+\angle BAE=45^\circ+\angle BAE$,

$\because\angle EAC=\angle BAE$,$\therefore\angle BEF=\angle BFE$,

$\therefore BE=BF$　进而可知$AD=DF$

设正方形$ABCD$边长为1,又设$\angle BAE=\angle CAE=\alpha$,

则$OA=OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

在$Rt\triangle ABE$中,$BE=AB\cdot\tan\alpha=BF$,$BF=OB-OF$
$=OB-OA\cdot\tan\alpha$

$\therefore AB\tan\alpha=OB-OA\tan\alpha$.

$$\therefore\tan\alpha=\frac{OB}{AB+OA}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}-1.$$

$\therefore OF=OA\cdot\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)$.

$EC=BC-BE=1-1\cdot\tan\alpha=1-\sqrt{2}+1=2-\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.

$\therefore EC=2OF$.

金牌解题
Jin pai jie ti

铜牌题

一、选择题

1.已知α为锐角,$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$,则$\alpha=$　　　　(　　)

A. 30°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 90°

2. Rt△ABC 中，$\angle C = 90^\circ$，$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\sin B =$　（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

3. Rt△ABC 中，$\angle C = 90^\circ$，$AB = 5$，$BC = 3$，则 $\tan A =$　（　　）

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

4. α 为锐角，$\tan\alpha = \cot 43^\circ$，则 $\alpha =$　（　　）

A. 43°　　B. 45°　　C. 47°　　D. 49°

5. 已知 $45^\circ < \alpha < 90^\circ$，则 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ 的大小关系是：　（　　）

A. $\sin\alpha > \cos\alpha$　　B. $\sin\alpha = \cos\alpha$　　C. $\sin\alpha < \cos\alpha$　　D. 无法判断

6. 化简 $|\cos 50^\circ - \cos 20^\circ| =$　（　　）

A. $\cos 50^\circ - \cos 20^\circ$　　B. $\cos 20^\circ - \cos 50^\circ$

C. $(\cos 50^\circ - \cos 20^\circ)$ 或 $\cos 20^\circ - \cos 50^\circ$　　D. 无法判断

7. 计算 $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \tan 0^\circ =$　（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

8. α 为锐角，且 $\tan\alpha = 1$，则 $\cos\alpha =$　（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

9. $\angle A$ 为锐角，$\sin A = \frac{12}{13}$，则 $\cos(90^\circ - A) =$　（　　）

A. $\frac{12}{13}$　　B. $\frac{5}{13}$　　C. $\frac{5}{12}$　　D. $\frac{12}{5}$

10. α 为锐角，且 $\sin\alpha = 0.8$，则　（　　）

A. $0^\circ < \alpha < 30^\circ$　　B. $30^\circ < \alpha < 45^\circ$

C. $45^\circ < \alpha < 60^\circ$　　D. $60^\circ < \alpha < 90^\circ$

11. 查表得：$\cot 37^\circ 24' = 1.307\,9$，$2'$ 的修正值是 $0.001\,6$，则 $\cot 37^\circ 26' =$　（　　）

A. 1.307 9　　B. 1.309 5　　C. 1.306 3　　D. 无法计算

12. 已知 α 为锐角，$\sin\alpha = \frac{2}{3}$，则 $\cos\alpha =$　（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

13. 在 Rt△ABC 中，各边的长度都扩大 2 倍，那么锐角 A 的各三角函数值　（　　）

A. 都扩大 2 倍　　B. 都缩小到一半　　C. 没有变化　　D. 不能确定

14. 如果 α 为锐角，那么 $\sin\alpha + \cos\alpha$ 的值是　（　　）

A. 小于 1　　B. 等于 1　　C. 大于 1　　D. 不能确定

15. 下列各式中，正确的是　（　　）

A. $\sin 60^\circ > \cos 30^\circ$　　B. $\cos 60^\circ > \cos 30^\circ$　　C. $\tan 60^\circ > \tan 30^\circ$　　D. $\cot 60^\circ > \cot 30^\circ$

16. 若直角三角形有一个内角是 30°，则 3 个角的正弦比为　（　　）

A. $1:\sqrt{3}:2$　　B. $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$　　C. $1:\sqrt{2}:2$　　D. $\sqrt{2}:\sqrt{3}:2$

17. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，下列各式正确的是　(　　)

A. $a = c\cot B$　B. $a = c\cos B$　C. $a = c\tan B$　D. $a = c\sin B$

18. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\sqrt{\cos B - \frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2} - \sin C\right)^2 = 0$，则 $\angle A$ 的度数是　(　　)

A. $90°$　B. $60°$　C. $45°$　D. $30°$

19. 下列各式中，错误的是　(　　)

A. $\sin 35° - \sin 34°50' < 0$　B. $\cot 8° > \cot 8°4'$

C. $\cot 78°25' < \cos 78°23'$　D. $\tan 43°1' < \tan 43°3'$

20. 如果 $45° < A < 90°$ 时，下列不等式成立的是　(　　)

A. $\tan A > \cos A > \sin A$　B. $\cos A > \tan A > \sin A$

C. $\sin A > \tan A > \cos A$　D. $\tan A > \sin A > \cos A$

21. 若 $\alpha + \beta = 90°$，以下各式正确的表达式是　(　　)

A. $\sin\alpha = \sin\beta$　B. $\tan\alpha = \cot(90° - \beta)$

C. $\sin\alpha = \cos\beta$　D. $\tan(90° - \beta) = \tan\beta$

22. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\frac{b}{a}$ 是 $\angle A$ 的　(　　)

A. 正弦　B. 余弦　C. 正切　D. 余切

二、填空题

23. A 为锐角，$\sin(90° - A) = \frac{3}{5}$，则 $\cos A =$ ________，$\tan A =$ ________.

24. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\frac{a}{b}$ 是________角的正切，$\frac{a}{c}$ 是________角的余弦，$\frac{b}{c}$ 是________角的正弦.

25. $\sin^2 46° + \cos^2 46° - \tan 46° \cdot \cot 46° =$ ________.

26. $\sqrt{(1 - \cot 30°)^2} + \sqrt{(1 - \sin 60°)^2} =$ ________.

27. $\cos^2 1° + \cos^2 2° + \cdots + \cos^2 89° =$ ________.

28. $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对边分别为 a，b，c. 若 $a = 15$，$b = 8$，那么 $\sin A + \sin B + \sin C =$ ________.

29. 将 $\cos 21°$、$\cos 37°$、$\sin 41°$、$\cos 46°$ 的值按由小到大的顺序排列是：________.

30. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，$a = 6$，$b = 8$，那么 $\sin A =$ ______，$\tan B =$ ______.

31. 若 $\alpha + \beta = 90°$，且 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$，则 $\cos\beta =$ ________.

三、解答题

32. 计算：

(1) $\tan 60° \cdot \cos 60° + \cos 60° - \sin 60°$　(2) $\sin 30° \cdot \cos 45° - \cos 30° \cdot \sin 45°$

(3) $(1 + \tan 30° - \sin 60°)(1 - \tan 30° + \sin 60°)$　(4) $\dfrac{2\cos 60° + \tan 45° + \sin^2 45°}{\sin^2 30° + \sin^2 60°}$

(5) $\dfrac{\cos60^\circ - \tan45^\circ}{\cot30^\circ - 2\cot45^\circ}$　　(6) $\sqrt{1 - 2\tan60^\circ + \tan^2 60^\circ}$

33. 已知：如图 6 - 12，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90^\circ$，$CD \perp AB$ 于 D，$AD = 2$，$BD = 4$，求 $\angle ACD$ 的四个三角函数.

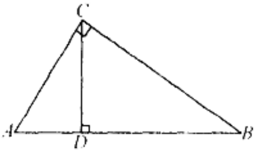

图 6 - 12

34. 已知 $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$，且 $\angle\alpha$ 是锐角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$，$\cot\alpha$.

35. 当 $a = \sin45^\circ$，$b = \sin60^\circ$ 时，求 $\dfrac{a^2 + ab}{a^2 + 2ab + b^2} \div (a^2 - ab + b^2) \div \dfrac{a^3 + b^3}{b}$

36. 求 $\tan1^\circ \cdot \tan2^\circ \cdot \tan3^\circ \cdot \cdots \cdot \tan87^\circ \cdot \tan88^\circ \cdot \tan89^\circ$ 的值.

37. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，$\sin A = \dfrac{2}{3}$，求 $\cot B$.

38. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，$\tan A = \dfrac{12}{5}$，$\triangle ABC$ 的周长为 45cm，求 BC 的长.

39. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，$a = \sqrt{15}$，$b = 3\sqrt{5}$，求 $\angle A$ 及 $S_{\triangle ABC}$.

40. 求值：$\cos^2 37^\circ + \tan15^\circ \cdot \cot15^\circ + \tan48^\circ + \cos^2 53^\circ - \cot42^\circ + \tan45^\circ$

41. $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 是 $\triangle ABC$ 的三个内角. 求证：$\sin\dfrac{A + B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$.

42. 计算 $\dfrac{2\sin45^\circ}{\tan45^\circ + 3\cot60^\circ} - \dfrac{\cos45^\circ}{\sin30^\circ - \cos30^\circ}$ 的值.

43. 在等腰 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，如果 $AB = 2BC$，求 $\angle B$ 的 4 个三角函数值.

44. 化简 $\dfrac{(a\sin 90^\circ)^2 - (b\cot 45^\circ)^2}{2a^2\sin 30^\circ - 4ab\cos 60^\circ + (b\cot 45^\circ)^2}$

银牌题

45. 在 $\triangle ABC$ 中，它的边与角同时满足下列两个条件：(1) $\sin C = 1$；(2) $\sin A$、$\cos B$ 是方程 $4x^2 - cx + 1 = 0$ 的两个根，求 a，b，c 及 $S_{\triangle ABC}$.

46. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，则 $\sin B + \cos B$ 的值　　(　　)

A. 大于 1　　B. 小于 1　　C. 等于 1　　D. 不确定

48. 计算 $\sqrt{1 - \sin^2 10^\circ} + \left|\sin 10^\circ - \dfrac{1}{2}\right| - \sqrt{\sin 90^\circ - 2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}$ 的值.

49. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别是 a、b、c，若 a、b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (c+4)x + 4c + 8 = 0$ 的根，且 $9c = 25a\sin A$.

(1) 求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形；(2) 求 $\triangle ABC$ 的三边长.

50. $Rt\triangle ABC$ 两条直角边 a、b 满足 $3a^2 - ab - 4b^2 = 0$，求 $\sin B$ 和 $\cos B$ 的值.

51. 如图 6－14 所示，在锐角 $\triangle ABC$ 中，求证：

(1) $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$；

(2) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ab\sin C$.

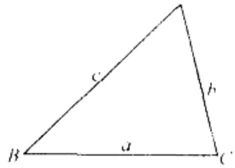

图 6－14