

# 工程或然率

Probability Concepts  
in Engineering  
Planning and Design

原著者：洪華生 鄧漢忠

譯述者：蔡 益 超

中國土木水利工程學會

# 工程或然率

Probability Concepts  
in Engineering  
Planning and Design

原著者：洪華生 鄧漢忠

譯述者：蔡 益 超

中國土木水利工程學會

# 原 序

在設計與規劃工程系統時，許多不確定性是無可避免的。因此在學習工程分析方法時，應包括估計這些不確定性對整個系統的影響與如何設計的方法與觀念。基於此一原因，或然率的理論（及其有關的統計學、決策理論等）恰可提供模擬這些不確定性並分析其對工程設計影響的數學基礎。

或然率與統計學在分析樣本資料與品質管制上的貢獻人所盡知。但或然率觀念的精義，可應用到任一特定的問題上去。事實上，這些概念在處理不確定性上是必須的，且是最適切的。所以或然率與統計決策理論在處理各種工程設計與規劃上扮演著富有意義的角色。這些工程問題包括：(1)在不確定性的條件下如何將一工程問題用數學模式化，並估計該工程系統的反應；(2)在考慮不確定性的情況下，如何有系統地發展出一套設計範疇；(3)如何推論危險度及利用決策理論作危險度 - 利潤間的最適分析。本書主要的目的在強調或然率與統計決策理論在工程上的廣泛應用，特別著重有關營建與工業管理；地質、結構及機械設計；水文與水資源規劃；能源與環境問題；海洋工程；交通規劃、航空照相與測量工程等問題。

我們主要著重或然率觀念在工程上的實際應用及其相關性。許多工程問題我們不做詳細的數學推導，而僅利用其結果來舉例說明某種物理現象的或然率模式。因此，我們僅討論基本的或然率數學理論，並採用非抽象的方式來解釋，以強調其與工程的關係。為了加速認識與鑑賞或然率概念的實際意義，牽涉到的數學必須要越少越好，因此抽象的數學觀念，我們盡量例舉許多的工程問題來解釋，並在習題中準備許多類似的問題以資練習。為了舉例及陳述某一概念，我們常把實際工程問題理想化、簡單化，實際上的工程問題當然常比我們所例舉的要複雜得多。

本書適合願意閱讀基本或然率概念及想知道如何應用或然率觀念的從業工程師們之用。我們用工程上的例子來解釋數學上的概念，對讀者們特別有幫助。我們希望這種寫法，將推動工程師及學工程的學生認識或然率理論在應用上的潛力，而把學習或然率當作其從事工程師職業學養的一部份。我們相信對某些適當的工程分析與設計問題，這些概念，乃是解決該問題的最基本工具。

本書計分上、下兩冊，上册討論或然率及統計學的基本概念與方法。此乃屬於在不確定性條件下如何將工程問題數學模式化所需具備的基本知識。下冊則偏重深進一層的概念與應用，其中包括統計決策理論、極限值統計學、危害度分析、可靠度分析及或然率設計、或然率網路設計、鵠候理論與蒙帝卡羅模擬技術等。

本冊計分九章，每章探討某些主題，同時也是其後各章的基礎。每章的末附有討論，除再度提出本章的要點外，兼述本章與其後各章間的關係。第一章強調或然率學在許多工程問題上的需要及其意義。第二至四章則發展或然率的基本概念與最重要的或然率數學模式，每一處在觀念推衍後必例舉工程及物理問題加以闡述。第五至七章研討推論統計的方法，第八章討論貝氏或然率學，最後一章（第九章）則介紹品質控制要義。

上册係設計作為工程或然率學及統計學的入門教本，僅需具基本微積分的數學知識即可。因此本書可供各年級工科學生使用。筆者認為給大二學生使用甚為恰當。本書材料除第九章外，原係供給美國伊利諾大學土木工程系二年級學生必修課“工程或然率學”之用。本書除可用於工學院各系外，亦可由數學系、統計學系開給工科學生修習。雖然數學上的討論或許不能讓數學家滿意，但本書當作工程或然率學的入門教本確是很恰當的。我們認為將或然率概念與方法第一次介紹給工程師時應以與工程、物理有關的方式來介紹，這樣可使讀者深入認識數學概念下在實際上的應用。

下冊可供工學院大學部高年級及研究所一年級學生之用，它討論有關危害度分析及決策分析在系統規劃與設計上的應用。

本書的單位兼用英制及國際制，如問題與單位有關時，該問題的推導與討論均用同一種制度。

許多在伊利諾大學教授基本土木工程學科的現任與過去的同事提供無數的建議來編排本書的順序與習題的內容，這些同事包括 M.Amin, A. Chilton, H.M. Karara, N.khachaturian, C.P.Siess, W.H. Walker, Y. K. Wen, 與 B.C. Yen 等位教授。本人對其建議由衷感謝。本人同時感謝許多修習本課的學生，由他們的學習經驗，發問的問題與討論，對本書材料的體裁貢獻良多。幾位出版評審家有建設性的批評與建議，同樣深受本人的感謝；其中特別包括康奈爾大學 R. Sexsmith 教授；奧克拉荷馬州

立大學 J. H. Mize 教授及普渡大學姚治平教授的建議。最後本人感謝 N. M. Newmark 教授在其主持伊利諾大學土木系所建立鼓勵學術研究及創造發展的氣氛。

最後，本人感謝 Connie Crispen 為本書打字及修改手稿；Eldon Boatz 為本書準備例題。

A. H-S Ang 洪華生

W. H. Tang 鄧漢忠

# 目 錄

## 第一章 或然率在工程上的分量

|                        |    |
|------------------------|----|
| 1.1 緒 言 .....          | 1  |
| 1.2 真實世界資料的不確定性 .....  | 3  |
| 1.3 不確定性下作設計與下決策 ..... | 11 |
| 1.4 控制與標準 .....        | 16 |
| 1.5 結 論 .....          | 17 |

## 第二章 或然率的基本概念

|                  |    |
|------------------|----|
| 2.1 事件與或然率 ..... | 19 |
| 2.2 集合理論概要 ..... | 22 |
| 2.3 或然率數學 .....  | 36 |
| 2.4 結 論 .....    | 60 |
| 2.5 習 題 .....    | 60 |

## 第三章 隨機現象的解析模式

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 3.1 隨機變數 .....      | 80  |
| 3.2 常用的或然率分佈律 ..... | 97  |
| 3.3 多隨機變數 .....     | 133 |
| 3.4 結 論 .....       | 145 |
| 3.5 習 題 .....       | 146 |

## 第四章 隨機變數的函數

|                      |     |
|----------------------|-----|
| 4.1 緒 言 .....        | 170 |
| 4.2 推導的或然率分佈 .....   | 170 |
| 4.3 隨機變數函數的各次矩 ..... | 191 |
| 4.4 結 論 .....        | 202 |
| 4.5 習 題 .....        | 203 |

## 第五章 由觀測資料推定參數

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 5.1 統計推論在工程上所佔的地位 ..... | 219 |
| 5.2 參數推定的典型方法 .....     | 221 |
| 5.3 結 論 .....           | 254 |
| 5.4 習 題 .....           | 255 |

## 第六章 或然率分佈數學模式的決定

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 6.1 緒 言 .....            | 261 |
| 6.2 或然率紙 .....           | 262 |
| 6.3 假設的或然率分佈之正確性試驗 ..... | 274 |
| 6.4 結 論 .....            | 281 |
| 6.5 習 題 .....            | 281 |

## 第七章 迴歸與相關分析

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 7.1 線性迴歸分佈基本公式推導 ..... | 286 |
| 7.2 多變數線性迴歸 .....      | 297 |
| 7.3 多線性迴歸 .....        | 300 |
| 7.4 迴歸分析在工程上的應用 .....  | 307 |
| 7.5 相關分析 .....         | 315 |
| 7.6 結 論 .....          | 319 |
| 7.7 習 題 .....          | 319 |

## 第八章 貝氏統計方法

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| 8.1 緒 言 .....           | 329 |
| 8.2 基本觀念 - 離散變數情況 ..... | 330 |
| 8.3 連續變數情況 .....        | 336 |
| 8.4 貝氏概念在取樣理論中的應用 ..... | 344 |
| 8.5 結 論 .....           | 354 |
| 8.6 習 題 .....           | 355 |

## 第九章 品質保證與接受取樣

|                  |     |
|------------------|-----|
| 9.1 屬性接受取樣 ..... | 360 |
| 9.2 變數接受取樣 ..... | 369 |
| 9.3 多重取樣 .....   | 375 |
| 9.4 結 論 .....    | 376 |
| 9.5 習 題 .....    | 376 |

## 附錄A 或然率表

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| A.1 標準常態分佈或然率表 .....                  | 380 |
| A.2 $t$ 分佈 $p$ - 百分率值 .....           | 383 |
| A.3 $\chi^2$ 分佈 $\alpha$ - 百分率值 ..... | 384 |
| A.4 柯 - 司試驗中 $D_n^\alpha$ 的臨界值 .....  | 385 |

## 附錄B 組合公式

|                  |     |
|------------------|-----|
| B.1 基本關係 .....   | 386 |
| B.2 有順序的序列 ..... | 386 |
| B.3 二項式係數 .....  | 387 |
| B.4 多項式係數 .....  | 388 |
| B.5 司帝令公式 .....  | 389 |

## 附錄C 卜桑分佈的推導

## 附錄D 參考書目

# 第一章

## 或然率在工程上的分量

### 1.1 緒 言

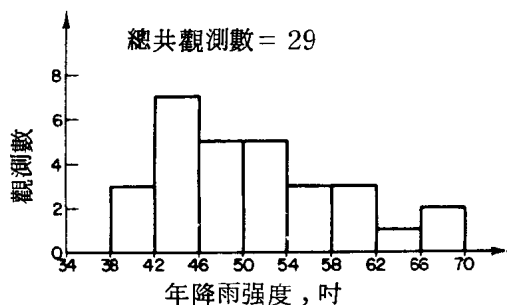
將問題列出一個數學模式，然後作數量的分析與估計，是近代解決工程問題的方法。有些方法已發展得相當精巧，包含了數學模式與分析、電子計算機模擬（simulation）與最適化技術（optimization techniques）等。但不論數學模式的可靠的程度如何，此外尚包括實驗得來的經驗模式，這些模式均係在理想化的假設與情況下來預測問題結果的。因此，用這些模式來求解問題，有時可能與真正的情形有所出入。

作工程設計時，即使可得的資料的品質與數量不完全時亦得下決策。因此，需要在不確定的情形下分析問題，因而根據此決策分析出的結果，便不能完全採信。除了許多資料常常得由相似（甚至不同）的環境來推論，或由模式來推導，因此有各種程度的不完美。許多工程問題，與自然的過程與現象有關，這些均為與生俱來的隨機現象，天生就是不定的。因此，無法確定地來描述。基於這些理由，工程規劃與設計中所需要下的決策（decision making），就必需在不確定的情況下來進行。

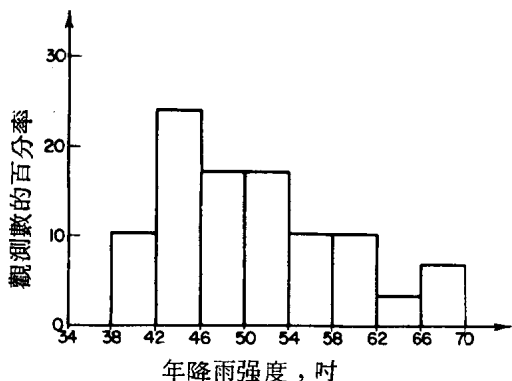
此種不確定性（uncertainty），一定對工程設計與規劃有影響。此種不確定性，在數量上的推測，以及估計其對工程系統的作用，與設計的影響，需要用到或然率理論的觀念與方法。更進一步來看，工程系統的設計與規劃，既然在不確定的條件下進行，則設計出的結果必具有危險度（risk）。因此下決策時需考慮到危險度與經濟效益間的關係。這些均屬於應用或然率學的範圍。

由上看來，或然率學在工程上的分量是相當重要。由資料的描述，以至發展工程設計與下決策的基礎。一些特殊的資料描述、工程設計及決策厘定問題，將在以下幾節中加以描述。

## 2 工程或然率



(a) 以觀測到的次數表示



(b) 以總共觀測數的百分率表示

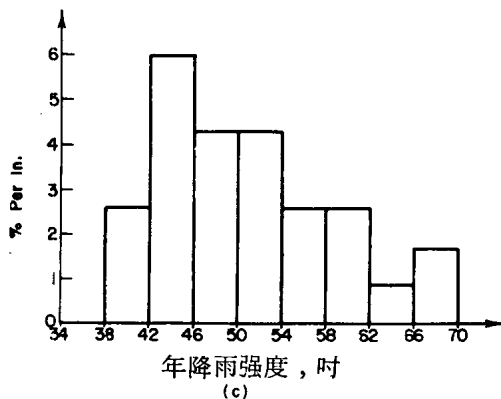


圖 1.1 降雨強度直方圖(a)以觀測到的次數表示(b)以總共觀測數的百分率表示 (c)降雨強度的頻率圖

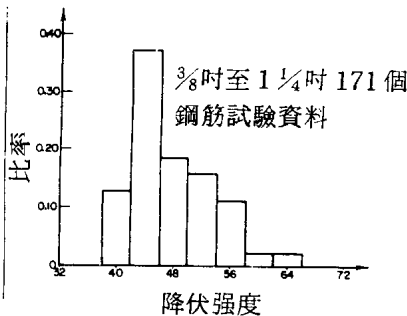


圖 1.2 中等強度鋼筋降伏強度的直方圖 Julian 1957 年資料

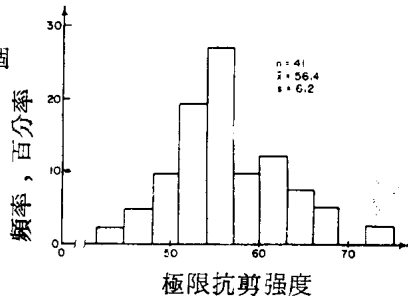


圖 1.3 接頭電焊處極限抗剪強度直方圖 (Kulak, 1972)

## 1.2 真實世界資料的不確定性

### 1.2.1 不確定性與隨機性

許多工程師處理的現象與過程，均具有隨機性 (randomness)，也即，真正的結果或多或少不能預測得很準確。譬如，我們做實驗觀察時，其結果也非每次均為相同（即使該實驗在完全相同的條件下進行）。換句話說，測得或觀察所得的值，有一範圍。更進一步看，某些值發生的機會可能比其他值發生的機會多，這些實驗資料的特性，可從繪出的直方圖 (histogram) 或頻率圖 (frequency diagram) 看出，如圖 1.1 至 1.17 所示。這些圖均代表某些有意義的工程問題所涉及的資料。（在這些圖中，圖 1.5、1.6、1.7、1.10、1.13、1.14 及 1.17 中理論或然率密度函數 (probability density functions) 亦一併繪入。這些理論函數的意義，及其與實驗頻率圖間的關係，將在第三章與第六章中詳加討論）。

許多物理現象的資料如圖 1.1 至 1.17 所示。列出該圖的目的，就是要說明大部份工程上的資料具有相當可觀的變異性 (variability)。

直方圖，為表示實驗資料變異性的圖。就某一組實驗數據而言，其直方圖可依下列的方法製作之：

由實驗觀測的結果，在橫坐標上選出一段範圍足夠包含最大與最小的

#### 4 工程或然率

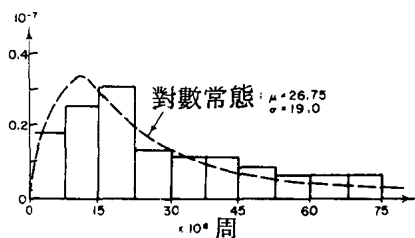
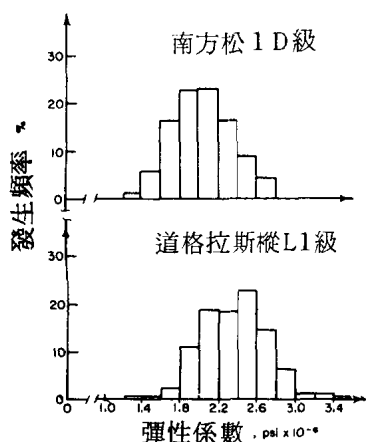


圖 1.4 木材彈性係數直方圖 圖 1.5 75 S-T 鋁疲勞壽命頻率圖  
(Galligan 與 Snodgrass 1970) (Pugsley 1955)

觀測值，然後將此範圍分成認為方便的等分，計算實測數據落在各個等分的數目上，繪一垂直線，其高度可代表該等分內實測數據的個數。我們亦可將垂直線的高度，表示成此等分實測到數據的個數，佔全體數據個數的

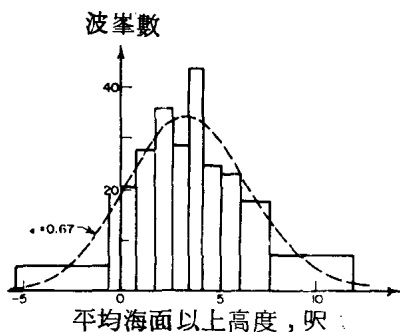


圖 1.6 平均海面上波浪高度頻率圖; Cartwright 與 Longuet-Higgins (1956)

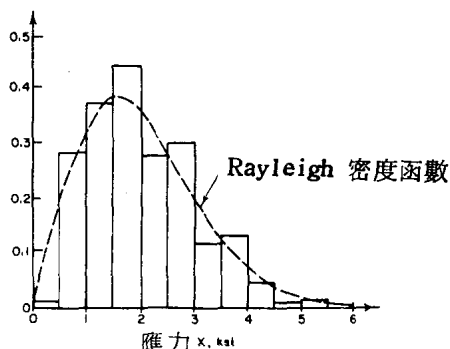


圖 1.7 船中央材料彎曲應力頻率圖; Hoffman 與 Lewis (1969)

表 1.1

| 年份   | 降雨強度 (吋) |
|------|----------|
| 1918 | 43.30    |
| 1919 | 53.02    |
| 1920 | 63.52    |
| 1921 | 45.93    |
| 1922 | 48.26    |
| 1923 | 50.51    |
| 1924 | 49.57    |
| 1925 | 43.93    |
| 1926 | 46.77    |
| 1927 | 59.12    |
| 1928 | 54.49    |
| 1929 | 47.38    |
| 1930 | 40.78    |
| 1931 | 45.05    |
| 1932 | 50.37    |
| 1933 | 54.91    |
| 1934 | 51.28    |
| 1935 | 39.91    |
| 1936 | 53.29    |
| 1937 | 67.59    |
| 1938 | 58.71    |
| 1939 | 42.96    |
| 1940 | 55.77    |
| 1941 | 41.31    |
| 1942 | 58.83    |
| 1943 | 48.21    |
| 1944 | 44.67    |
| 1945 | 67.72    |
| 1946 | 43.11    |

百分比。譬如考慮紐約 Esopus 溪流域每年降雨量，1918 年到 1946 年間的記錄列如表 1.1。研究這些資料，將會發現觀察到的降雨量，介於 39.91 至 67.72 吋之間。在 38 至 70 時間，每 4 吋爲一等分，每等分內降雨量發生的年數以及佔所有觀察年數的比率，列如表 1.2。

將各個降雨量區間的觀測數繪在縱坐標，便可得到 Esopus 溪流域降

## 6 工程或然率

表 1.2

| 區間      | 觀測數 | 佔所有觀測數的比率 |
|---------|-----|-----------|
| 38-42   | 3   | 0.1034    |
| 42-46   | 7   | 0.2415    |
| 46-50   | 5   | 0.1724    |
| 50-54   | 5   | 0.1724    |
| 54-58   | 3   | 0.1034    |
| 58-62   | 3   | 0.1034    |
| 62-66   | 1   | 0.0345    |
| 66-70   | 2   | 0.0690    |
| 總數 = 29 |     | 1.0000    |

雨量的直方圖如圖 1.1a 所示。若將觀測數佔全體觀測數的比率繪在縱坐標，則其直方圖如圖 1.1b 所示。

爲了將經驗的頻率分佈（如所繪的直方圖），與理論的或然率密度函數比較起見，我們得將其改爲頻率圖（frequency diagram）。此時，僅需將直方圖中的縱坐標數除以直方圖的總面積便可。譬如，圖 1.1a 的直方圖，可將其縱坐標數值，除以  $29 \times 4 = 116$ ，便得相對應的頻率圖。或由圖 1.1b 的直方圖除以  $4 \times 1 = 4$ ，亦可得到頻率圖如圖 1.1c 所示。爲代表 Esopus 流域降雨量的頻率圖。

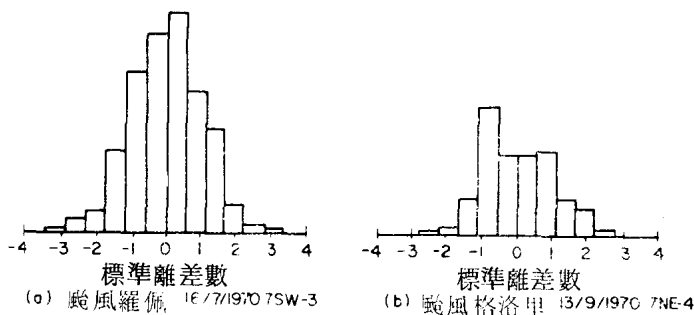


圖 1.8 颱風來襲時高樓測得風壓的相對分散度；Lam Put (1971)

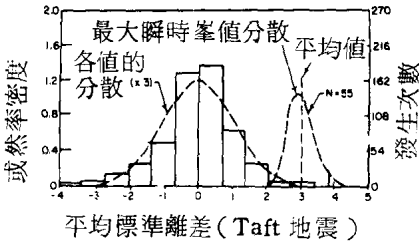


圖 1.9 地震引起土壤剪應力的相對分散度

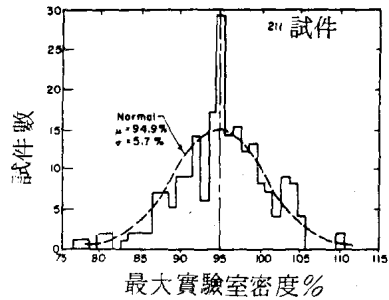


圖 1.10 夯實後火山灰級配密度直方圖；Pettitt (1967)

直方圖或頻率圖，表示各個觀測值的相對發生頻率（relative frequencies）。就某些工程上的應用而言，由這些觀測資料算出的某些數量，往往比完整的直方圖更為有用。這些數量主要包括，平均值（mean-value）或平均（average）與分散度（measure of dispersion）。這些量，在統計上可由直方圖算得。但一般，稱為樣本平均值（sample mean），與樣本標準離差（sample standard deviation）。將於第五章中詳細討論。

很顯而易見的，某變數記錄到的資料如有分散的情形，如圖1.1至圖1.17所舉的例子一般。則變數值便不可能確定地予以預估。此種變數稱為隨機變數（random variable）它的值及其在某範圍內的值，僅能用或

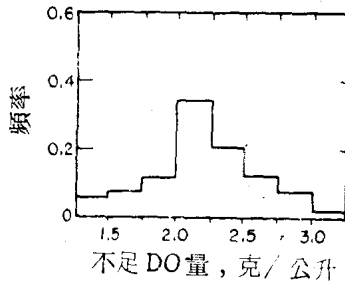
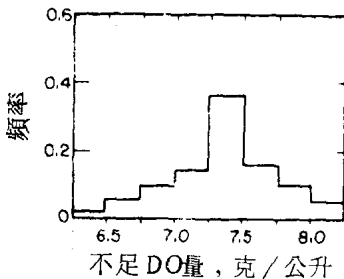


圖 1.11 Ohio 河溶氧量不足之直方圖；Kothandaraman 與 Ewing (1969)

## 8 工程或然率

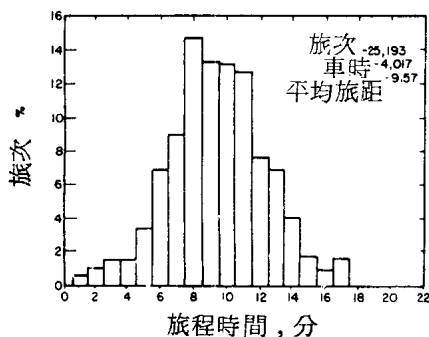


圖 1.12 O-D 旅程頻率分佈, cv  
Sioux Falls, S. D., 1956 ; 美國  
商業部 ( 1965 )

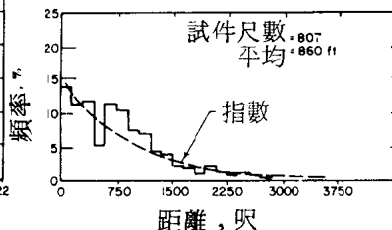


圖 1.13 停車場距目的地距離  
頻率分佈, Kanafani ( 1972 )

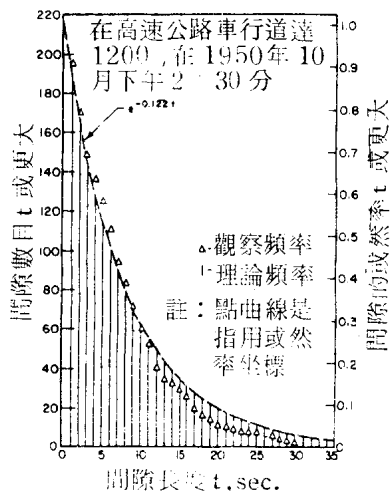


圖 1.14 高速公路上汽車間隙  
長度直方圖, Gerlough ( 1955 )

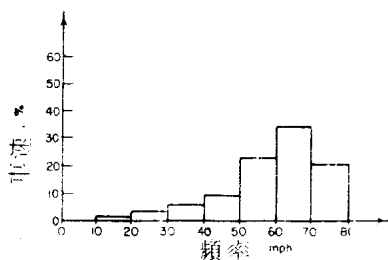


圖 1.15 5237 次轎車相撞之  
推定車速 Viner ( 1972 )

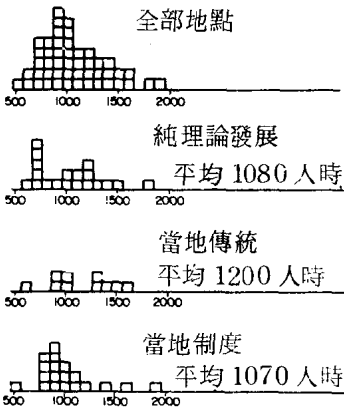


圖 1.16 英國房屋建造所需時間直方圖 Forbes (1969)

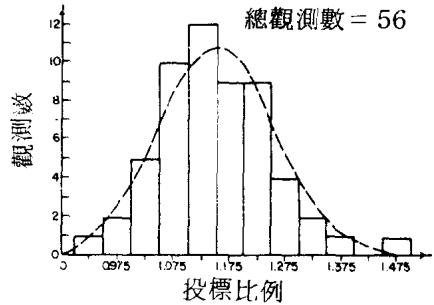


圖 1.17 德州西南部公路投標分佈 ; Cox (1969)

然率值來預測。

當同時處理兩個或兩個以上的隨機變數時，某一變數的性質，可能與其他變數值具有若干有關係。兩個隨機變數的成對觀測值，可繪在二維空間上，如圖 1.18 至圖 1.22 所示。它可表示樣本點的分散特性 (scatter or dispersion)，稱為散佈圖 (scattergrams)。因為有分散性，所

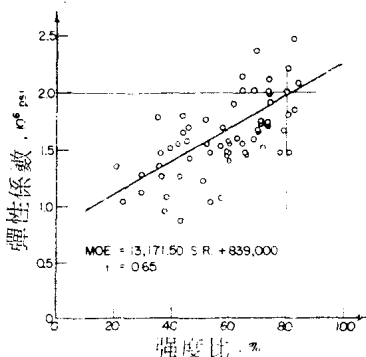


圖 1.18  $2 \times 10$  風乾樑木之彈性係數與強度比線性迴歸 ; Littleford (1967)