主　编●崔　梦
分册主编●王金生

一堂好课

yitanghaoke

讲 问 练 解 测

全在一堂好课

试 验 修 订 版 →

shiyanxiudingban

高二数学

（下）

吉林人民出版社

1堂好课

与新教材同步

试验修订版→

shiyanxiudingban

高二数学（下）

主　　编●秦　梦　　分册主编●王金生
编　　者●王金生　古跃宏　王　玮　陈洁芳

吉林人民出版社

（吉）新登字 01 号

一堂好课·高二数学·下（试验修订版）

主　　编	秦　梦	分册主编	王金生
责任编辑	张长平　王胜利	封面设计	魏　晋
责任校对	唐晓明　王治国	版式设计	王胜利

出 版 者　吉林人民出版社（长春市人民大街 124 号　邮编 130021）
发 行 者　吉林人民出版社　　　电话：0431－5678541
印 刷 者　北京市通县长凌营印刷厂

开　　本　787×1092　1/16
印　　张　7.375
字　　数　169 千
版　　次　2001 年 11 月第 1 版　　　2002 年 11 月第 1 次修订版
印　　次　2002 年 11 月第 1 次印刷
印　　数　1－50100 册

标准书号　ISBN 7-206-03747-X/G·1110
定　　价　7.50 元

出版说明

编写目的

- 减轻学生负担，提高课堂效率，让每节课都成为精品课。
- 推动新教材的普及使用，为广大师生提供学习的指导方法，把握新教材的特点。
- 培养学生自学能力，提高创新意识。

编写依据

- 最新国家课程标准和考试说明。
- 最新试验（试用）修订版教材。
- 最新华东版初中物理教材。

科目设置

- 试验（试用）修订版科目，涵盖初中阶段、高中阶段的数学、物理、化学、英语、语文、历史、地理、生物八大学科。
- 单独编写华东版初二、初三物理，其他科目通用。

编写特点

- **讲、练、测，三位一体。** 通过讲一题、练一题、测一题，把学习过程进行优化设计，轻松学习，事半功倍。
- **突出能力，命题新颖。** 全书从选材到命题都以能力立意，设问角度新，思维价值高。
- **引导思维，突破难点。** 本书精选典型题，重点指导解题方法，培养迁移能力，突出重点，能够举一反三。
- **及时反馈，因材施教。** 每课或每章（单元）后设有单元拔高训练，通过自测或小考，老师和学生及时了解知识掌握的不同程度，找出原因，采取不同措施，因材施教。

适用范围

- 使用试验（试用）修订版教材的省市。
- 使用初二、初三华东版物理教材的省市。

特别致谢

本书在编写过程中得到了参与新教材试验教学一线教师的大力帮助，使我们能够充分把握新教材的特点，编写时融进了广大一线教师的教学成果及独特的教学方法、新知识、新题型，在此我们表示衷心感谢。

吉林人民出版社综合室

目　录

第九章　直线、平面、简单几何体

9.1 平　面

重点难点考点

重点：有关平面基本性质的三个公理和三个推论.

难点：准确理解平面的概念及基本性质，建立空间概念，正确使用图形、符号、文字三种数学语言并能互译.

考点：能利用平面的基本性质进行有关的分析、推理、论证.

典型例题解析

例 1　已知空间内的三条直线 a,b,c 两两互相平行，且与直线 l 分别交于点 A,B,C. 求证：这四条直线 a,b,c,l 共面.

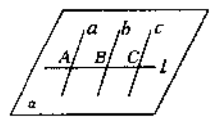

图 9 - 1

解析　如图 9 - 1 所示.

$\because a /\!/ b$，$\therefore a,b$ 确定一个平面 α.

$\because A\in a, B\in b$，$\therefore A,B\in\alpha$，又 $A,B\in l$，$\therefore l\subset\alpha$. 即平面 α 经过直线 b,l.

同理，$\because b/\!/c$. $\therefore b,c$ 确定一个平面 β. 简证 $l\subset\beta$，即平面 β 经过直线 b,l.

又 $b\cap l=B$. 由推论 2 可知，β 与 α 重合. 又 $c\subset\beta$，$\therefore c\subset\alpha$.

综上有 $a,b,c,l\subset\alpha$，故 a,b,c,l 共面.

点评　要证明若干直线共面，可先利用公理或推论说明其中的两条或三条直线共面，然后再证明其他的直线也在这个平面内即可.

例 2　如图 9 - 2 所示，M,N,P,Q 分别是正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 中棱 $AB,BC,C'D',CC'$ 的中点. 求证：M,N,P,Q 四点共面.

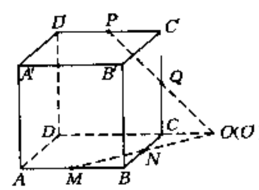

图 9 - 2

证法 1　如图 9 - 2 所示，连结 MN 并延长交 DC 的延长线于 O，

则 $\triangle MBN\cong\triangle NCO$，$\therefore CO=MB$.

连结 PQ 并延长交 DC 的延长线于 O'，

则 $\triangle PC'Q\cong\triangle QCO'$，$\therefore CO'=PC'$.

又 $MB=PC'$，$\therefore CO=CO'$. $\therefore O,O'$ 重合.

$\therefore PQ,MN$ 相交确定一个平面，故 M,N,P,Q 四点共面.

证法 2　$\because MB \underline{/\!/} PC'$，$\therefore$ 四边形 $MBC'P$ 为平行四边形. $\therefore MP/\!/BC'$.

又 $\because NQ/\!/BC'$，$\therefore MP/\!/NQ$.

$\because MP$ 与 NQ 只确定一个平面，故 M,N,P,Q 确定一个平面.

点评　一般地证明若干个点共面，可证明这些点所在的直线相交，或先证明其中的三点共面，再证其他的点也在这个平面内. 这往往就要用到有关的公理或推论.

例 3　如图 9 - 3 所示，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 不在同一平面内，如果三直线 AA_1,BB_1,CC_1 两两相交，证明：三直线 AA_1,BB_1,CC_1 共点(即交于一点).

解析　证明三线共点的一般思路是：先证明两条直线交于一点，再证明该点在第三条直线上即可.

由推论 2，设 BB_1 与 CC_1，CC_1 与 AA_1，AA_1 与 BB_1 分别确定的平面为 α,β,γ.

取 $AA_1\cap BB_1=P$，则 $P\in AA_1$，$P\in BB_1$.

又 $\alpha\cap\beta=CC_1$,则 $P\in CC_1$(公理2). 于是 $AA_1\cap BB_1\cap CC_1=P$. 故三直线 AA_1,BB_1,CC_1 共点.

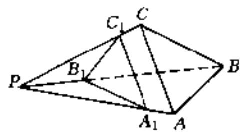

图 9-3

点评 在空间中证三线共点,通常先将三线看成某三个两两相交平面的交线,再利用平面基本性质证明.

例4 已知三个平面 α,β,γ 两两相交于不同的三条交线 a,b,c.

求证:这三条交线要么互相平行,要么交于一点.

解析 设 $\alpha\cap\beta=a$,$\beta\cap\gamma=b$,$\gamma\cap\alpha=c$,则 $a\subset\beta$,$b\subset\beta$.

在同一平面内的两直线要么相交要么平行,由此可分情况进行讨论:

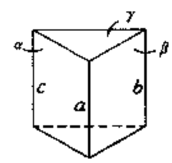

图 9-4

(1)如图9-4所示. 若 $a\parallel b$,可证得 $c\parallel b$,$c\parallel a$.

假设 $b\nparallel c$,设 $b\cap c=P$. 则 $P\in\alpha$,且 $P\in\beta\Rightarrow P\in a\Rightarrow a\cap b=P$.

这与 $a\parallel b$ 矛盾,$\therefore c\parallel b$,同理 $c\parallel a$.

(2)如图9-5所示,若 $a\cap b=P$,可证得 $P\in c$.

$\because a\cap b=P$,又 $\alpha\cap\gamma=c$,$\beta\cap\gamma=b$,

$\therefore P\in\alpha$,且 $P\in\gamma$,$\therefore$ 点 P 在 α 和 γ 的交线上,即 $P\in c$.

故 a,b,c 相交于一点 P.

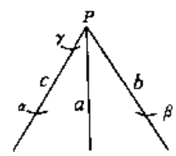

图 9-5

点评 证明空间若干条直线平行或相交,可从平面内两条直线平行或相交切入,然后利用平面的基本性质进行推理论证. 当从正面难以入手时,可考虑从反面突破,即采用反证法.

例5 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F,G,H,K,L 分别是棱 AB,BB_1,B_1C_1,C_1D_1,D_1D,DA 的中点,求证:这六点共面.

解析 如图9-6所示,连结 KF,BD.

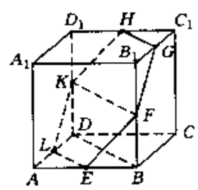

图 9-6

由题设知 $KD\underset{=}{\parallel}BF$,$\therefore$ 四边形 $BDKF$ 是平行四边形,因此 $KF\parallel BD$.

连结 EL,则 EL 是 $\triangle ABD$ 的中位线. $\therefore EL\parallel BD$.

由平行线的传递性可知,$KF\parallel EL$. 这样 KF,EL 就确定一个平面 α.

同理可证得 $GF\parallel KL$. $\therefore GF$,KL 就确定一个平面 β.

显然不共线的三点 K,F,L 既在 α 内,又在 β 内,

由公理3可知,β 与 α 重合,进而可知,$G\in\alpha$,同理可得,$H\in\alpha$. 故这六点共面.

点评 这里用到了平行线的传递性. 在平面几何里,若 $a\parallel b$,$b\parallel c$,则 $b\parallel c$. 这个性质在空间中仍然成立. 在后面的学习中将会以公理的形式给出. 另外证明两个平面重合,只要能够说明确定这两个平面的元素是相同的即可.

例6 一条直线过平面内一点与平面外一点,它和这个平面有几个公共点?并证明你的结论.

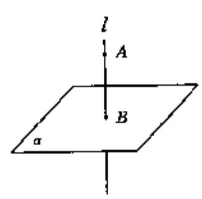

图 9-7

解析 如图9-7所示,$A\notin\alpha$,$B\in\alpha$,$A,B\in l$. 那么直线 l 与平面 α 有且只有一个公共点.

假设 l 与 α 有两个公共点,由公理1可知 $l\subset\alpha$. 又 $A\in l$,$\therefore A\in\alpha$.

这与 $A\notin\alpha$ 矛盾. 故 l 与 α 有且只有一个公共点.

点评 当从正面难以入手时,可从反面突破,合理应用有关的公理或推论,采用反证法证明.

综合能力训练

一、选择题

1. 下列命题中正确的个数是( ).

(1)如果一条直线与两条直线都相交,那么这三条直线就确定一个平面;

(2)经过一点的两条直线确定一个平面;

(3)经过一点的三条直线确定一个平面；

(4)点 A 在平面 α 内，也在直线 a 上，则直线 a 在平面 α 内；

(5)平面 α 和平面 β 相交于不在同一条直线上的三个点 A,B,C；

(6)在同一直线外的三点确定一个平面.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 下列命题中正确的是(　　).

A. 立体几何中所说的"空间图形"是指构成图形的点不都在同一个平面内

B. P,M,Q 三点共线的重要条件是 $PM+MQ=PQ$

C. 空间三点确定一个或无数个平面

D. 用平行四边形表示平面时，只表示它所圈的那一部分平面区域

3. 两个平面重合的条件是它们的公共部分有(　　).

A. 两个公共点　　B. 三个公共点　　C. 四个公共点　　D. 两条平行直线

4. 一直线和直线外不在同一直线上的三点所确定的过该直线的平面有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 至多 3 个

5. 下列推理，错误的是(　　).

A. $A\in l,A\in\alpha;B\in l,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$

B. $A\in\alpha,A\in\beta,B\in\alpha,B\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=AB$

C. $l\not\subset\alpha,A\in l\Rightarrow A\notin\alpha$

D. $A,B,C\in\alpha,A,B,C\in\beta$，且 A,B,C 不共线 $\Rightarrow\alpha$ 与 β 重合

6. 三条平行直线所确定的平面的个数是(　　).

A. 3 个　　B. 2 个　　C. 1 个　　D. 1 个或 3 个

7. 空间交于一点的四条直线最多可以确定平面(　　).

A. 4 个　　B. 5 个　　C. 6 个　　D. 7 个

8. 四条线段顺次首尾相接，它们所在的直线最多可以确定平面的个数是(　　).

A. 4 个　　B. 3 个　　C. 2 个　　D. 1 个

9. 直线 $l_1/\!/l_2$，在 l_1 上取 3 点，l_2 上取 2 点，由这 5 点能确定平面的个数是(　　).

A. 9 个　　B. 6 个　　C. 3 个　　D. 1 个

10. 如果点 N 在直线 a 上，直线 a 又在平面 α 内，则点 N，直线 a，平面 α 之间的关系可记作(　　).

A. $N\in a\in\alpha$　　B. $N\subset a\subset\alpha$　　C. $N\in a\subset\alpha$　　D. $N\subset a\in\alpha$

11. 四条直线两两相交且任三条都不交于一点，这四条直线可确定平面的个数为(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

12. 空间三个平面如果每两个都相交，那么它们交线的条数是(　　).

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 1 条或 3 条

13. 与不共线的三点距离都相等的点的个数是(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 无数个

14. 三个平面将空间分成的部分为 n，则 n 的值为(　　).

A. 4　　B. 4,6　　C. 4,6,7　　D. 4,6,7,8

15. 在空间四点中，无三点共线是四点不共面的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

二、填空题

1. 已知平面 α,β 相交，α,β 内各取两点，这四点都不在交线上，那么这四点能确定平面的个数为______.

2. 若三条直线可以确定 3 个平面，那么这三条直线的公共点数是______.

3. $\left.\begin{matrix}A\in\alpha,B\in\alpha\\A\in\beta,B\in\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha$ ________ $\beta=$ ________.

4. 空间一条直线及不在这条直线上的两个点，如果连结这两点的直线与已知直线________，则它们在同一平面内.

5. 空间四个平面两两相交，则交线的条数为________.

6. $AB,AD\subset\alpha,CB,CD\subset\beta,E\in AB,F\in BC,G\in CD,H\in DA$，若直线 EH 与 FG 相交于 P，则点 P 必在直线________上.

三、解答题

1. 求证：两两相交且不共点的四条直线必共面.

2. 定线段 AB 所在直线与定平面 α 相交，P 为 AB 外的任意一点，且 $P\notin\alpha$，直线 AP、BP 与 α 交于点 A'，B'. 求证：不论 P 在什么位置，$A'B'$ 过一定点.

3. 在棱长为 a 的正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N 分别是 AA_1，D_1C_1 的中点，过 D、M、N 三点的平面与正方体的下底面相交于直线 l.

(1)画出 l 的位置；

(2)设 $l\cap A_1B_1=P$，求线段 PB_1 的长.

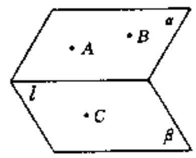

图 9 - 8

4. 如图 9 - 8 所示，已知平面 α 和 β 相交于直线 l，点 $A\in\alpha,B\in\alpha,C\in\beta$，且 $A\notin l,B\notin l,C\notin l$，直线 AB 与 l 不平行. 那么，平面 ABC 与 β 的公共直线与 l 有什么关系？为什么？若 AB 与 l 平行呢？

9.2 空间直线

重点难点考点

重点：空间内两条直线的位置关系、等角定理及异面直线所成的角.

难点：异面直线的概念及异面直线所成角的概念及其求法.

考点：空间内两条直线位置的判定，异面直线所成角的求法.

典型例题解析

例 1 如图 9 - 9 所示，已知平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=$ 直线 a，直线 $b\subset\alpha$，直线 $c\subset\beta$，$b\cap a=A$，$c// a$. 求证：b 与 c 是异面直线.

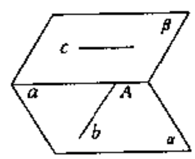

图 9 - 9

证法 1 假设 b 与 c 不是异面直线，则 b 与 c 或平行或相交.

若 $b// c$. ∵ $c// a$，∴ $a// b$. 这与 $b\cap a=A$ 矛盾，∴ b 不平行于 c.

若 b 与 c 相交. 设 $b\cap c=B$，∵ $B\in b$，且 $b\subset\alpha$，∴ $B\in\alpha$.

∵ $B\in c,c\subset\beta$，∴ $B\in\beta$. ∴ B 是 α 与 β 的公共点. 又 $\alpha\cap\beta=a$，∴ $B\in a$.

又 $B\in c$，∴ $a\cap c=B$. 这与 $a// c$ 矛盾. ∴ b 与 c 不能相交.

综上 b 与 c 是异面直线.

证法 2 假设 b 与 c 共面于 γ，则 $\gamma\cap\alpha=b,\gamma\cap\beta=c$.

∵ $a// c$，∴ $a//\gamma$，又 $a\subset\alpha$，且 $\alpha\cap\gamma=b$，∴ $a// b$.

这与 $a\cap b=A$ 矛盾. 因此 b 与 c 不可能共面. 故 b 与 c 是异面直线.

点评 反证法是一种重要的证明问题的方法，用反证法证题的程式是：

否定结论 ⇒ $A\Rightarrow B\Rightarrow C$

而 C 不合理：
- 与以前学过的公理、定理不相符
- 与本题题设冲突
- 与临时假定违背或推出自相矛盾

因此结论不能否定，故原结论成立

例 2　如图 9 - 10 所示，已知 B,C 是平面 α 与平面 β 的交线 l 上的两点，$A\in\alpha$，$D\in\beta$，$AB=BC=CD=2$，$AC=BD=2\sqrt{2}$，E,F 分别是 AC 和 BD 的中点，且 $EF=\sqrt{3}$.

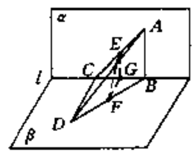

图 9 - 10

(1)求证：BC 是异面直线 AB 和 CD 的公垂线；

(2)求 AB 与 CD 所成角的大小.

解析　(1)$\because AB^2+BC^2=AC^2$，$BC^2+CD^2=BD^2$，$\angle ABC=\angle DCB=90°$，

即 $AB\perp BC$，$DC\perp BC$. 故 BC 是 AB 和 CD 的公垂线.

显然 AB 和 CD 的距离为 2.

(2)取 BC 的中点为 G，连接 EG，FG，则 $\angle EGF$ 或其补角是 AB 与 CD 所成的角.

由题设知，$EG=1$，$FG=1$，$EF=\sqrt{3}$. 在 $\triangle EGF$ 中由余弦定理可得

$\cos\angle EGF=\dfrac{1^2+1^2-3}{2\times1\times1}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle EGF=120°$.

故 AB 和 CD 所成的角应是 $\angle EGF$ 的补角，即为 $60°$.

点评　利用勾股定理的逆定理是证明线线垂直的重要方法之一. 异面直线所成角的范围是 $(0°,90°]$，求异面直线所成的角时要注意取值范围.

例 3　如图 9 - 11 所示，在空间四边形 $ABCD$ 中，$AD=AC=BD=BC=a$，$AB=CD=b$，E,F 分别是 AB,CD 的中点.

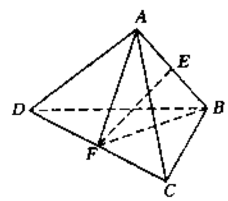

图 9 - 11

(1)求证：EF 是 AB 和 CD 的公垂线；

(2)求 AB 和 CD 间的距离.

解析　(1)在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中，

$AD=AC=BD=BC=a$，CD 是公共直线，$\therefore\triangle ACD\cong\triangle BCD$.

于是 $AF=BF$，E 是 AB 的中点，$\therefore EF\perp AB$.

同理有 $EF\perp CD$. 因此 EF 是 AB 和 CD 的公垂线.

(2)在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，$AF^2=AD^2-DF^2=a^2-\dfrac{1}{4}b^2$；

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中，$EF=\sqrt{AF^2-AE^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{1}{4}b^2-\dfrac{1}{4}b^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{1}{2}b^2}$.

例 4　如图 9 - 12 所示，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E,F 分别是 A_1B_1 和 A_1C_1 的中点，求异面直线 AE 与 CF 所成角的余弦值.

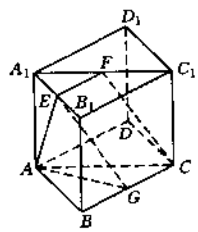

图 9 - 12

解析　根据定义把所求的角转化为平面角求，这就需要进行平移.

如图 9 - 12 所示，取 BC 的中点 G，连结 EF，EG，则 $EF\,\underline{\parallel}\,\dfrac{1}{2}B_1C_1$.

又 $GC\,\underline{\parallel}\,\dfrac{1}{2}B_1C_1$，$\therefore EF\,\underline{\parallel}\,GC$. $\therefore$ 四边形 $EGCF$ 为平行四边形. $\therefore EG\parallel CF$.

这样 $\angle AEG$ 的余弦即为所求. 为了求值，连结 AG. 在 $\triangle AEG$ 中有

$\cos\angle AEG=\dfrac{AE^2+EG^2-AG^2}{2\cdot AE\cdot EG}$.

为了便于计算，不妨设正方体的棱长为 2.

则 $AE=\sqrt{5}$，$AG=\sqrt{5}$，$EG=FC=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$.

$\therefore\cos\angle AEG=\dfrac{5-6-5}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\dfrac{3}{\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

点评　在涉及到有关中点的问题时，可再联想其他的中点进行分析，往往可以收到奇效.

例 5　如图 9 - 13 所示，两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的对应顶点的连线 AA'，BB'，CC' 交于同一点 O，且 $\dfrac{AO}{OA'}=\dfrac{BO}{OB'}=\dfrac{CO}{OC'}=\dfrac{2}{3}$.

(1)求证：$AB\parallel A'B'$，$AC\parallel A'C'$，$BC\parallel B'C'$；

(2)求$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$的值.

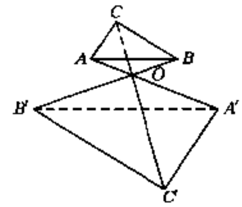

图 9 - 13

解析 (1)$\because AA'$与BB'相交于O点且$\frac{AO}{OA'}=\frac{BO}{OB'}\Rightarrow AB/\!/A'B'$,

同理,$AC/\!/A'C'$,$BC/\!/B'C'$.

(2)$\because AB/\!/A'B'$,$AC/\!/A'C'$,且AB和$A'B'$,AC和$A'C'$方向相反,

$\therefore \angle BAC=\angle B'A'C'$.

同理$\angle ABC=\angle A'B'C'$,因此$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

又$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AO}{OB'}=\frac{2}{3}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$.

例 6 如图 9 - 14 所示,在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,M,N,P分别为AB_1,BB_1,CC_1的中点.

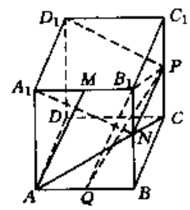

图 9 - 14

(1)求异面直线D_1P与AM,CN与AM所成的角;

(2)判断D_1P与AN是否为异面直线,若是,求其距离.

解析 作辅助线找相交线所成的角须抓住M,N,P为中点这一特性,并充分利用正方体中的垂直线段.对于(2),在判断D_1P与AN为异面直线之后,求其距离的关键在于找出公垂线段.

(1)连结A_1N,因为N,P为BB_1,CC_1的中点,

$\therefore PN \perp\!\!\!\!= A_1D_1$,从而$A_1N/\!/D_1P$.

故AM与D_1P所成的角即AM与A_1N所成的角.

易证得$Rt\triangle AA_1M\cong Rt\triangle A_1B_1N$,$\therefore A_1N\perp AM$,

故D_1P与AM所成的角为$90°$.

又设AB的中点为Q,则$B_1Q \perp\!\!\!\!= AM$.

又$\because CN \perp\!\!\!\!= B_1P$,从而$CN$与$AM$所成的角就是$\angle PB_1Q$(或其补角).

易求$B_1Q=B_1P=\frac{\sqrt{5}}{2}$,$PQ=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

在$Rt\triangle PB_1Q$中,由余弦定理得$\cos\angle PB_1Q=\frac{2}{5}$.故$\arccos\frac{2}{5}$为$CN$与$AM$所成的角.

(2)由条件知D_1P与AN分别在两个平行的平面内,

$\therefore D_1P$与AN无公共点.又$\because D_1P/\!/A_1N$,$\therefore D_1P$与AN不平行.

故它们是异面直线.

而$PN\perp$平面AB_1,$PN\perp$平面DC_1,$\therefore NP\perp D_1P$,$NP\perp AN$.

故NP是它们的公垂线段.

即D_1P与AN间的距离是 1.

例 7 单位正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,求异面直线A_1B与B_1C的距离.

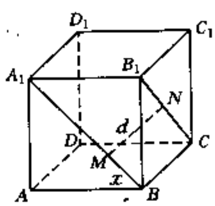

图 9 - 15

解法 1 求异面直线的距离,可考虑用异面直线上两点间距离公式,列方程组求解.

如图 9 - 15 所示,设MN为公垂线段,$MN=d$,设$BM=x$,

由正方体的对称性,则$B_1N=x$,$A_1M=CN=\sqrt{2}-x$,

而异面直线A_1B与B_1C所成的角为$60°$,

由异面直线上两点间的距离公式,得

$BB_1^2=d^2+x^2+x^2+2x^2\cos 60°=d^2+3x^2$.

$A_1C^2=d^2+(\sqrt{2}-x)^2+(\sqrt{2}-x)^2+2(\sqrt{2}-x)^2\cos 60°$

$=d^2+3(\sqrt{2}-x)^2$.

$\therefore d^2+3x^2=1$, $d^2+3(\sqrt{2}-x)^2=3$.

解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

即异面直线 A_1B 与 B_1C 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解法 2　由于正方体的对称性，当 $BM=B_1N$ 时，异面直线 A_1B 与 B_1C 上两点 M,N 的距离才能取得最小值，即公垂线段的长，于是可建立目标函数.

如图 9-16 所示，令 $BM=B_1N=x$, $MP\perp BB_1$ 于 P,

连结 PN，则 $MP\perp$平面 BB_1C_1C，故$\angle MPN=90°$.

由$\angle PBM=\angle PB_1N=45°$，得 $MP=\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $B_1P=1-\frac{\sqrt{2}}{2}x$,

$NP^2=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+x^2-2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)x\cos 45°$,

即 $MN^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+x^2-\sqrt{2}x\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

$=3x^2-2\sqrt{2}x+1$.

当 $x=\frac{\sqrt{2}}{3}$时，MN^2 取得最小值$\frac{1}{3}$,

即当 $BM=B_1N=\frac{\sqrt{2}}{3}$时，$MN=\frac{\sqrt{3}}{3}$为异面直线 A_1B 与 B_1C 的距离.

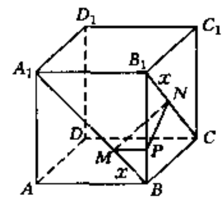

图 9-16

综合能力训练

一、选择题

1. “直线 a,b 是异面直线”是指(1)$a\cap b=\varnothing$，且 a 不平行于 b；(2)$a\subset$平面 α,$b\subset$平面 β，且 $a\cap b=\varnothing$；(3)$a\subset$平面 α,$b\not\subset$平面 α；(4)不存在平面 α，使 $a\subset\alpha$，且 $b\subset\alpha$ 成立. 上述结论正确的是(　　).
A. (1)(2)　　B. (1)(3)　　C. (1)(4)　　D. (3)(4)

2. 分别和两条异面直线平行的两条直线的位置关系是(　　).
A. 平行　　B. 相交
C. 异面　　D. 相交或异面

3. 如图 9-17 所示，在正方体 AC_1 中，异面直线 CD_1 和 BC_1 所成的角是(　　).
A. 45°　　B. 60°
C. 90°　　D. 120°

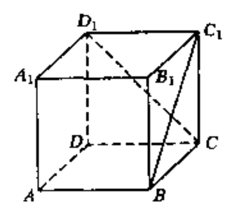

图 9-17

4. 已知 $l_1/\!/l_2$,a,b 与 l_1,l_2 都垂直，则 a,b 的关系是(　　).
A. 平行　　B. 相交
C. 异面　　D. 平行，相交，异面均有可能

5. 直线 m,n 与异面直线 a,b 相交于不同四点，则 m,n 的位置关系为(　　).
A. 平行　　B. 无公共点　　C. 相交　　D. 垂直

6. 空间四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BC$,$AC=BD$,E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点，则四边形 $EFGH$ 是(　　).
A. 菱形　　B. 矩形　　C. 梯形　　D. 正方形

7. a,b 是异面直线，$a\subset$平面 α,$b\subset$平面 β,$\alpha\cap\beta=c$，那么直线 c (　　).
A. 同时与 a,b 相交　　B. 至少和 a,b 中一条相交

C. 至多与 a,b 中一条相交　　D. 与 a,b 中一条相交，一条平行

8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，表面对角线与 AD_1 成 $60°$ 的有(　　).

A. 4 条　　B. 6 条　　C. 8 条　　D. 10 条

9. 异面直线 $a,b,a\perp b,c$ 与 a 成 $30°$角，则 c 与 b 成角的范围是(　　).

A. $[60°,90°]$　　B. $[30°,90°]$　　C. $[60°,120°]$　　D. $[30°,120°]$

10. 三条直线 a,b,c，如果 $a\perp c,b\perp c$，那么 a,b 的位置关系是(　　).

A. 相交　　B. 平行　　C. 异面　　D. 位置不确定

11. 直线 a,b 相交于点 O，且 a,b 成 $60°$角，过 O 与 a,b 都成 $60°$角的直线有(　　).

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

12. 空间四边形 $ABCD$ 的各边与两条对角线的长都为 1，点 P 在边 AB 上移动，点 Q 在 CD 上移动，则点 P 和 Q 的最短距离为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

13. 若 a,b,c 是两两垂直的三条直线，且每两条都异面，直线 d 是 a,b 的公垂线，那么 c,d 的位置关系是(　　).

A. 相交　　B. 平行　　C. 异面直线　　D. 垂直

14. 正方体的十二条棱中，组成异面直线的对数是(　　).

A. 12 对　　B. 24 对　　C. 30 对　　D. 42 对

15. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点，那么直线 AM 和 CN 所成角的余弦值是(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

二、填空题

1. 两条异面直线所成角的范围是________.

2. 过已知直线 l 外一点 A，作和 l 垂直的直线有________条.

3. 长方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 中，$\angle BAB_1=\angle B_1A_1C_1=30°$，则 AB 与 A_1C_1 所成的角是________，AA_1 与 B_1C 所成的角是________，AB_1 与 A_1C_1 所成的角的余弦值是________.

4. 角 α 和角 β 的两边分别平行，当 $\alpha=50°$时，$\beta=$________.

5. 一空间四边形的两条对角线长分别为 6 和 8，它们所成的角为 $30°$，连结各边中点所得四边形的面积为________.

6. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E,H 分别是 AB,AD 的中点，F,G 分别是 CB,CD 上的点，且$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，若 $BD=6$ cm，梯形 $EFGH$ 的面积为 28 cm^2，则平行线 EH,FG 间的距离为________.

7. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°,AC=b,BC=a,P$ 是$\triangle ABC$ 所在平面外一点，$PB\perp AB,M$ 是 PA 的中点，$AB\perp MC$，异面直线 MC 与 PB 间的距离为________.

8. 棱长为 1 的正方体 AC_1 中，O 是 $ABCD$ 的中心，那么异面直线 A_1O 与 BD_1 所成角的余弦值是________.

三、解答题

1. 如图 9-18 所示，在空间四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别是 AB 和 BC 的中点，G,H 分别是 CD 和 AD 上的点，且$\frac{DG}{DC}=\frac{DH}{DA}=\frac{1}{m}(m>2)$. 求证：直线 EH,FG,BD 相交于一点.

2. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为 BB_1,CC_1 的中点. 求 AE,BF 所成角的余弦值.

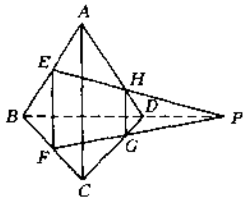

图 9 - 18

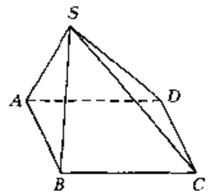

图 9 - 19

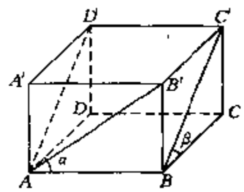

图 9 - 20

3. 如图 9 - 19 所示,S 是矩形 $ABCD$ 所在平面外一点,$SA\perp BC$,$SB\perp CD$,SA 与 CD 成 $60°$角,SD 与 BC 成 $30°$角,$SA=a$.求(1)直线 SA 与 CD 的距离;(2)直线 SB 与 AD 的距离.

4. 如图 9 - 20 所示,在长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,$\angle B'AB=\alpha$,$\angle C'BC=\beta$,求 AB' 与 BC' 所成角的余弦值.

5. 一根长为 a 的木梁,它的两端悬挂在两条互相平行的,长度都为 b 的绳索下,木梁处于水平位置,如果把木梁绕通过它的中点的铅垂轴转动一个角度 φ,那么木梁升高多少?

9.3　直线与平面平行的判定和性质

重点难点考点

重点:直线和平面平行的判定定理与性质定理.

难点:定理的运用.

考点:会用判定定理和性质定理进行有关的分析、推理、论证.

典型例题解析

例 1　已知平面 α 和平面 β 相交于直线 l,直线 $a\parallel\alpha$,$a\parallel\beta$.试判断 a 与 l 的位置关系,并证明你的结论.

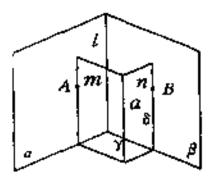

图 9 - 21

解析　如图 9 - 21 所示.观察发现:$a\parallel l$.下面我们来证明这个结论.

在平面 α 上任取一点 A,且使 $A\notin l$.

$\because a\parallel\alpha$,$\therefore A\notin a$.故点 A 与直线 a 就确定一个平面 γ,

则 γ 与 α 就相交于过点 A 的一条直线 m,易知 $m\not\subset\beta$($\because A\notin\beta$).

同理,在平面 β 任取一点 B,且 $B\notin l$,则 B 和 a 就确定一个平面 δ.

设 $\delta\cap\beta=n$.综上有 $a\parallel m$,$a\parallel n$.$\therefore m\parallel n$,而 $m\not\subset\beta$,$n\subset\beta$.$\therefore m\parallel\beta$.

又 α 过 m 与 β 相交于 l,由线面平行的性质定理可知 $m\parallel l$,而 $a\parallel m$,由公理 4 可得 $a\parallel l$.

点评　证明线线平行问题,往往可以先证线面平行,由线面平行得出线线平行,这是立体几何中,证明线线平行最常用的方法之一.

例 2　如图 9 - 22 所示,两个全等的正方形 $ABCD$ 和 $ABEF$ 所在平面相交于 AB,$M\in AC$,$N\in FB$,且 $AM=FN$.求证:$MN\parallel$平面 BCE.

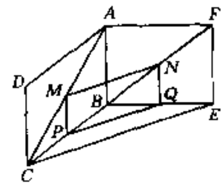

图 9 - 22

解析　要证线面平行,根据判定定理,可转化为证明线线平行.

在图 9 - 21 中,过 M,N 分别作 $MP\perp BC$,$NQ\perp BE$,垂足分别为 P,E.

$\because AM=FN$,$\therefore \mathrm{Rt}\triangle MPC\cong \mathrm{Rt}\triangle NQB$,由作法知 $MP\parallel AB$,$NQ\parallel AB$.

可知 $MP\underline{\parallel} NQ$,连结 MN 和 PQ,则四边形 $MPQN$ 是平行四边形.

$\therefore MN\parallel PQ$,又 $MN\not\subset$平面 BCE,$PQ\subset$平面 BCE,$\therefore MN\parallel$平面 BCE.

点评　在证明线线平行时,常常利用平面几何中有关的性质和定理,故平面几何的知识和方法是解决立体几何问题的工具和基础.

例3 设 a,b 是异面直线,AB 是 a,b 的公垂线,过 AB 的中点 O 作平面 α 与 a,b 分别平行,M,N 分别是 a,b 上的任意两点,MN 与 α 交于点 P.

求证:P 是 MN 的中点.

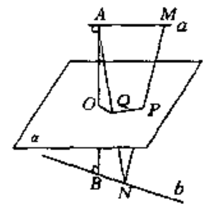

图 9-23

解析 如图 9-23 所示,连结 AN 交平面 α 于点 Q,连结 OQ,PQ.

$\because b /\!/ \alpha$,OQ 是过 b 的平面 ABN 与平面 α 的交线,$\therefore OQ /\!/ b$.同理 $PQ /\!/ a$.

在 $\triangle ABN$ 中,O 是 AB 的中点,$OQ /\!/ BN$,

$\therefore Q$ 是 AN 的中点,同理 P 是 MN 的中点.

例4 已知直线 a 平行于平面 α,A 是 α 内的任意一点,设过点 A 且与 a 平行的直线为 b,求证:直线 $b \subset$ 平面 α.

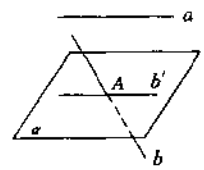

图 9-24

解析 我们先来证明一个惟一性命题:

过空间内一点与已知直线平行的直线有且仅有一条.

假设过空间内的一点 P 且与直线 m 平行的直线有两条 c,d.

$\because c /\!/ m$,$d /\!/ m$,$\therefore c /\!/ d$.这与 $c \cap d = P$ 矛盾.所以有且只有一条.

有了这个结论就可以证明本题的命题.

如图 9-24 所示,用反证法来证明.假设 $b \not\subset \alpha$,

$\because A \notin a$,$\therefore$ 点 A 和 a 就确定一个平面 β,

则 β 和 α 就相交于过点 A 的一条直线 b'.

又 $\because a /\!/ \alpha$,$\therefore a /\!/ b'$.又 $\because a /\!/ b$,

这样过点 A 就有两条直线 b,b' 与已知直线 a 平行,与已证的惟一性命题矛盾.故 $b \subset \alpha$.

例5 如图 9-25 所示,a,b 是两条异面直线,$a /\!/ \alpha$,$b /\!/ \alpha$,A,B 是 a 上两点,C,D 是 b 上的两点,AC,BC,BD,AD 分别交 α 于 E,F,G,H 四点.

(1)求证:四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

(2)若 $AE : EC = 1 : 1$,$AB = m$,$CD = n$,AB 与 CD 所成的角为 θ、求 $\square EFGH$ 的面积.

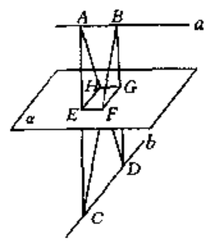

图 9-25

解析 (1)$\because a /\!/ \alpha$,$\therefore$ 直线 $AB /\!/ \alpha$.又 $\alpha \cap$ 面 $ABC = EF$,$\therefore AB /\!/ EF$.

同理 $\alpha \cap$ 面 $ABD = HG$.$\therefore AB /\!/ HG$.$\therefore EF /\!/ HG$.

同样的方法可证得 $EH /\!/ FG$.$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

(2)$\because AE : EC = 1 : 1$,$\therefore EF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$,$AB = m$,$EF = \frac{1}{2}m$.同理 $EH = \frac{1}{2}n$.

又 $EH /\!/ CD$,$EF /\!/ AB$,$\therefore \angle HEF$ 即为 AB 与 CD 所成的角.

$\therefore \angle HEF = \theta$,故 $S_{\square EFGH} = 2S_{\triangle EFH} = \frac{1}{4}mn \cdot \sin\theta$.

点评 本题的证明充分利用题设中的线面平行的条件来挖掘出线线平行的条件,进而证得结论.这种由线面平行证线线平行或由线线平行判定线面平行是常用的转化方法.

例6 如图 9-26 所示,在四面体 $ABCD$ 中,截面 $EFGH$ 平行于对棱 AB 和 CD,试问:截面在什么位置时,其截面的面积最大?

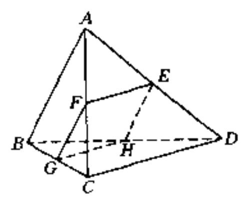

图 9-26

解析 先判断截面 $EFGH$ 的形状,再引入变量,建立面积的函数关系式,转化为函数的最值问题来解决.

$\because AB /\!/$ 平面 $EFGH$,

平面 $EFGH$ 与平面 ABC 和平面 ABD 分别交于 FG,EH,

$\therefore AB /\!/ FG$,$AB /\!/ EH$,$\therefore FG /\!/ EH$.

同理可证,$EF /\!/ GH$.

$\therefore$ 截面 $EFGH$ 是平行四边形.

设 $AB=a$，$CD=b$，$\angle FGH=\alpha$（a,b,α 均为定值，其中 α 为异面直线 AB 与 CD 所成的角），

又设 $FG=x$，$GH=y$，由平面几何知识，得 $\frac{x}{a}=\frac{CG}{CB}$，$\frac{y}{b}=\frac{BG}{BC}$，

两式相加，得 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，即 $y=\frac{b}{a}(a-x)$．

$\therefore S_{\square EFGH}=FG\cdot GH\cdot\sin\alpha=x\cdot\frac{b}{a}(a-x)\cdot\sin\alpha=\frac{b\sin\alpha}{a}\cdot x(a-x)$．

$\because x>0$，$a-x>0$，且 $x+(a-x)=a$ 为定值，

$\therefore$ 当且仅当 $x=a-x$，即 $x=\frac{a}{2}$ 时，有 $(S_{\square EFGH})_{\max}=\frac{ab\sin\alpha}{4}$．

故当截面 $EFGH$ 的顶点 E,F,G,H 为棱 AD,AC,BC,BD 的中点时，截面面积最大．

点评　本例是一道立体几何不等式及函数的综合题，如果把 $S_{\max}=\frac{ab\sin\alpha}{4}$ 视为 α 的函数，由 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 知，$(S_{\max})_{\max}=\frac{ab}{4}$，这时截面四边形 $EFGH$ 为矩形，这类最值问题称为双重最值题．

综合能力训练

一、选择题

1. 若直线 $m\subset\alpha$，$l\not\subset\alpha$，条件甲：$l\parallel\alpha$；条件乙：$l\parallel m$，则条件甲是条件乙的（　　）．
   A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分的条件
   C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要的条件
2. 直线 a 平行于 α，直线 $a\parallel$ 平面 β，$\alpha\cap\beta=b$，则（　　）．
   A. $a\parallel b$　　B. a 和 b 相交　　C. a,b 异面　　D. 相交或平行
3. 平行于正方体面上一对角线的一条直线，与正方体的棱最少可以组成异面直线的对数是（　　）．
   A. 10 对　　B. 8 对　　C. 6 对　　D. 12 对
4. 分别和两条异面直线平行的两条直线的位置关系是（　　）．
   A. 平行　　B. 相交　　C. 异面　　D. 相交或异面
5. $a\parallel\alpha$，则 a 平行于 α 内的（　　）．
   A. 一条确定的直线　　B. 任意一条直线
   C. 所有直线　　D. 无穷多条平行线
6. 平面 α 内无数条直线与直线 a 平行是 $a\parallel\alpha$ 的（　　）．
   A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件
   C. 充要条件　　D. 即不充分又不必要条件
7. $a\parallel\alpha$，$b\parallel\alpha$，则 a,b 的位置关系是（　　）．
   A. $a\parallel b$　　B. $a\cap b=A$
   C. a,b 异面　　D. 平行、相交、异面均有可能
8. 若 $a\parallel b$，$b\parallel$ 平面 α，则 a 与 α 的关系是（　　）．
   A. $a\parallel\alpha$　　B. a 与 α 相交
   C. $a\subset\alpha$　　D. 以上答案均不对

二、填空题

1. 平行四边形的一组对边平行于一个平面，则另一组对边与这个平面的位置关系是______．
2. 经过两条异面直线 a,b 之外的一点 P，可作______个平面与 a,b 平行．

三、解答题

经过两条异面直线中的一条且与另一个平面平行的平面有几个？并证明你的结论．

9.4 直线与平面垂直的判定和性质

重点难点考点

重点:1. 直线与平面垂直的判定定理和性质定理;2. 直线与平面的距离,直线和平面所成的角;3. 三垂线定理及其逆定理.

难点:判定定理的证明,直线与平面的距离及直线和平面所成的角的求法所渗透的转化思想. 能正确运用三垂线定理和逆定理判断空间内两条直线的垂直问题.

考点:直线与平面垂直的论证,直线与平面的距离,直线和平面所成的角的求解,运用三垂线定理及其逆定理分析解决有关的垂直、距离、角的问题.

典型例题解析

例 1 已知$\angle BAC$在平面α内,PA是α的斜线,若$\angle PAB=\angle PAC=\angle BAC=60°$,$PA=a$,(1)求点$P$到平面$\alpha$的距离;(2)求$PA$与平面$\alpha$所成的角.

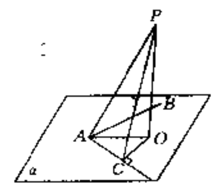

图 9-27

解析 如图 9-27 所示,(1)过点P作$PO\perp\alpha$,O为垂足,

由$\angle PAB=\angle PAC$,由教材例题的结论可知,AO是$\angle BAC$的平分线.

作$OC\perp AC$于C,连结PC,由三垂线定理可知,$PC\perp AC$.

在$\mathrm{Rt}\triangle PCA$中,$\because PA=a$,$\angle PAC=60°$,

$\therefore PC=a\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,$AC=a\cos 60°=\frac{1}{2}a$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ACO$中,$\frac{AC}{OA}=\cos 30°\Rightarrow OA=\frac{AC}{\cos 30°}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle POA$中,$PO=\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

(2)由(1)可知$\angle PAO$就是斜线PA与α所成的角,

$\therefore\sin\angle PAO=\frac{PO}{PA}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore\angle PAO=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

例 2 如图 9-28 所示,$SA\perp$平面ABC,$\angle ABC=90°$,点A在SB和SC上的射影分别为E,F,求证:(1)$AE\perp$面SBC;(2)$EF\perp SC$.

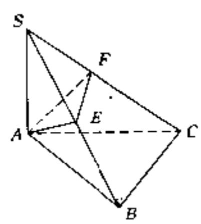

图 9-28

解析 要证线面垂直可证线线垂直,也可利用三垂线定理或逆定理进行判断.

(1)可证明$AE\perp BC$. $\because SA\perp$平面ABC,$\therefore SA\perp BC$. 又$\angle ABC=90°$,

$\therefore BC\perp AB$. 而$SA\cap AB=A$,$\therefore BC\perp$平面SAB,而$AE\subset$平面SAB,

$$\left.\begin{array}{l}\therefore AE\perp BC\\ \text{又 } AE\perp SB\\ SB\cap BC=B\end{array}\right\}\Rightarrow AE\perp\text{平面 }SBC.$$

(2)由(1)知,$AE\perp$平面SBC,又$AF\perp SC$,连结EF,则EF就是AF在平面SBC内的射影.

由三垂线定理的逆定理可知$EF\perp SC$.

思考:说出SB,SC与平面ABC所成的角;说出点A到平面SBC的距离.

点评 在用三垂线定理或逆定理证明线线垂直时,一定先要确定定理中的"面",然后依次寻求"面"