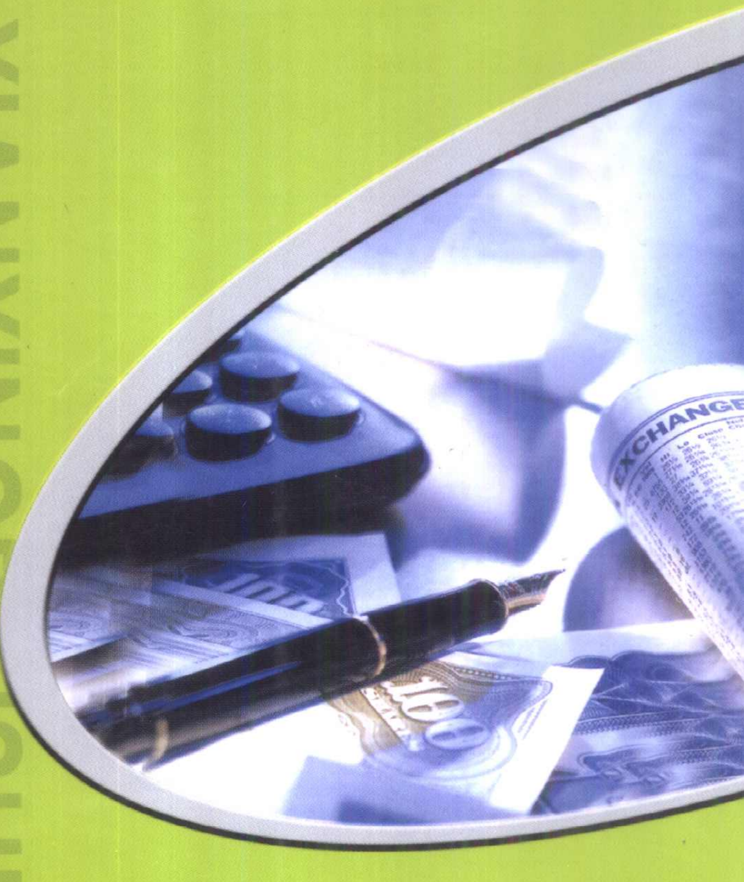
$$P_1^{-1} A P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

经济数学学习指导丛书

JINGJI SHUXUE XUEXI ZHIDAO CONGSHU

XIANXING DAISHU



线性代数

编著 李湘云

湖北科学技术出版社

经济数学

学习指导丛书

线性代数

编著 李湘云

湖北科学技术出版社

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

经济数学学习指导丛书

线性代数 © 李湘云 编著

责任编辑：王连弟 封面设计：戚 旻

出版发行：湖北科学技术出版社 电话：86782508

地 址：武汉市武昌黄鹂路 75 号 邮编： 430077

印 刷：武汉第二印刷厂 邮编： 430100

850mm×1168mm 32 开 17.625 印张 432 千字

2002 年 1 月第 1 版 2002 年 1 月第 1 次印刷

印数：1—4 000

ISBN 7－5352－2724－4/O·32 定价：26.00 元

前　言

20世纪是在知识经济和信息网络等现代化的狂潮中结束的。历史告诉我们：每一次现代化的狂潮过后，都必然出现怀旧和返朴归真的波澜。因此，基础科学在新世纪的重要性再次显露出来。

数学是基础理论课中的重要学科之一。它不仅是广大学生学习相关课程及在其他学科领域中进行理论和实践的基础，而且对学生其他能力的培养也起着极其重要的作用。数学来源于实践，它也理应回到实践中去，为经济生活和社会生活服务。随着我国社会主义市场经济的不断深入和发展，经济、管理类人才的需求量大大增加。高等教育的最终目的不在于人才数量的单纯增长，而在于保证质量下的数量稳步递增，这是我们教育界同仁应达成的共识。《经济数学学习指导丛书》编写的根本目的正是为了培养高质量的经济、管理类人才。

本丛书根据高等学校经济、管理类专、本科数学课程教学大纲的基本要求，以作者十几年教学讲稿为蓝本，参阅研究了大量的教材、试题，力争使其具有系统性、规范性和灵活性。目的是加深学生对经济数学课程知识点的理解和掌握，提高他们综合运用知识解决实际问题的能力，通过训练力争达到举一反三、融会贯通的目的。

《经济数学学习指导丛书》包括《微积分》、《线性代数》、《概率与数理统计》三册，其中《线性代数》以章为单元，每章分为六个部分：知识与归纳部分把本章的知识点进行了简单归纳；目的与要求部分概述了本章的目的与要求；内容与要点部分包括二点，第一点系统汇编了本章的基本概念及相关内容，第二点概述了本章的重难点，分析了易犯错误；解析与技巧部分是本册的重点，收编了大量的例题，也融入了历届部分考研试题，对选编例题进行了分类、

归纳、总结等，讲解了解题的技巧；练习与自测部分以标准试题的形式出现，分选择、填空、解答题三类题型，本部分主要供读者自己练习和自我检验；答案与提示对解题思路作了简要提示。

本丛书可供高等学校经济、管理类各层次的大学生（专科、电大、函大、高等教育自修考试、专升本、本科）学习《经济数学》时使用，也可作为报考经济管理类硕士研究生复习高等数学的必备参考书目。

本书的出版得力于湖北科学技术出版社的大力支持，是该社给予了一次作者与广大读者交流的机会。同时，对为本书的编写、出版提供了大力帮助的各位师长、朋友，对编写过程中参考的有关书籍的编著者，作者在此一并致谢。

当然，由于自己学识、水平有限，本书无论是内容还是体例等均存有诸多不足，对书中的疏漏、错误之处，恳请读者朋友批评指正。

李湘云

2001 年 9 月

目　　录

第一章　行　列　式

一、知识与归纳

n 阶行列式 $\begin{cases} n\text{ 阶行列式的定义} \\ \text{行列式的性质} \\ \text{行列式的计算} \\ \text{克莱姆法则} \end{cases}$

二、目的与要求

(1)理解 n 阶行列式的定义,掌握行列式的性质.

(2)熟练掌握行列式的计算方法.

(3)掌握克莱姆法则.

三、内容与要点

(一)基本概念及相关内容

1. 排列和逆序

(1)排列

由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个数组$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$称为一个 n 元排列,n 元排列共有 $n!$ 个.

(2)逆序和逆序数

在一个排列$(i_1,i_2,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n)$中,若 $i_t>i_s$,则称这两个数组成一个逆序.

一个排列中逆序的总数称为此排列的逆序数,记作 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$.若 τ 为奇数,则称$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$为奇排列;若 τ 为偶数,则称此排列为偶排列.

(3)对换

排列$(i_1,i_2,\cdots,i_t,\cdots,i_s,\cdots,i_n)$中,交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置,称为一次对换.对换改变排列的奇偶性.

任意一个 n 元排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$经过若干次对换可变为$(1,2,\cdots,n)$样的自然顺序排列,且所作的对换次数与排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$有相同的奇偶性.

2. n 阶行列式的定义

(1)"排列逆序"定义

定义 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列,$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$表示 n 元排列$j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.这里$\sum$表示对所有 n 元全排列求和,故是 $n!$ 项的代数和.

(2)"递推"定义

定义 一阶行列式 $A = |a_{11}| = a_{11}$,设 $n-1$ 阶行列式已经定义,则定义 n 阶行列式D 为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{1i} M_{1i} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} M_{1n} \end{aligned}$$

其中,M_{ij}称为a_{ij}的余子式,表示划元素 a_{ij}所在的第i 行第j 列所剩下的 $n-1$ 阶行列式.

3.行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式值相等,即 $D = D^T$.

性质 2 行列式的第 i 行(列)($1 \leqslant i \leqslant n$)各元素有公因子 k,则 k 可提到行列式的记号之外.

推论 1 若行列式的某行(列)元素全为零,则该行列式的值为零.

性质 3 如果行列式中某一行(列)的所有元素均为两项之和,则该行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的此行(列)的元素分别为对应的两个加数之一,其余各行的元素与原行列相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4 两行(列)交换,行列式仅改变符号.

推论 2 若行列式的两行(列)相等,则行列式值为零.

推论 3 若行列式两行(列)成比例,则行列式值为零.

性质 5 若把行列式的某一行(列)乘以一个常数加到另一行(列)上去,则行列式值不变.

性质 6 行列式按任一行(列)展开

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

或 $$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

其中，A_{ij}是 a_{ij}的代数余子式.

性质 7 行列式按某 k 行(列)$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$展开——拉普拉斯定理

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = N_1A_1 + N_2A_2 + \cdots + N_tA_t$$

其中 $t = C_n^k$，而 $N_i(i = 1, 2, \cdots, t)$为取定的某 k 行(列)所得到的 k 阶子式；A_i 为 N_i 的对应代数余子式.

4. 特殊行列式值

(1)上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2)下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

(4)拉普拉斯定理的两个特殊情形

$$
(i)\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\
c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{n} & \cdots & a_{1n} \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1m} \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
b_{m1} & \cdots & b_{mm}
\end{vmatrix}
$$

$$
(ii)\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{n} & \cdots & a_{1n} \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\
b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\
\multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{nm}\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1m} \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
b_{m1} & \cdots & b_{mm}
\end{vmatrix}
$$

5.克莱姆法则

若 n 元线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n
\end{cases}
$$

的系数行列式

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}\neq 0
$$

则该线性方程组有惟一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$为把 D 的第 i 列元素换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 而得到的行列式.

6.克莱姆法则的两个推论

推论 1 若齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$,则方程组只有零解：

$$x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$$

推论 2 若齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式必为零.

注 只有当一个线性方程组中方程的个数等于未知量的个数,且其系数行列式不为零,或可转化为这种情况时,才可使用克莱姆法则.其他情况在线性方程组解的结构中再予讨论.

(二)重难点及易犯错误分析

本章的重点是 n 阶行列式的计算及克莱姆法则的运用,其难点是利用行列式的性质计算 n 阶行列式,下面就易犯错误的地方给出例题进行分析.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}x&y&x+y\\y&x+y&x\\x+y&x&y\end{vmatrix}\tag{1}$$

错误解法 将第 1,2 行均乘以(-1)加到第 3 行上,并且同时把第 1 行及第 3 行乘以(-1)后加到第 2 行上,于是得

$$D=\begin{vmatrix}x&y&x+y\\-2x&0&-2y\\0&-2y&-2x\end{vmatrix}=0\tag{2}$$

分析 本解法的错误在于没有在完成上一步的基础上来做下一步,而是全从原来的行列式出发,结果本应将(2)式右端的第3行乘以(-1)加到(1)式右端的第2行上,却把(1)式右端的第3行乘以(-1)加到第2行上,形成了(2)中的第2行.为了避免这样的错误发生,在计算不是十分熟练的情况下,最好把步骤写细一些,每一步都在前一步的基础上完成.

正确解法 [法一]将第2,3行均加到第1行,然后提取公因子$2(x+y)$,于是得

$$
\begin{aligned}
D &= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \\
&= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix} \\
&= 2(x+y)(-x^2+xy-y^2) \\
&= -2(x^3+y^3)
\end{aligned}
$$

[法二]将第1,2行乘以(-1)均加到第3式上,然后按第1列展开:

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ 0 & -2y & -2x \end{vmatrix} \\
&= x\begin{vmatrix} x+y & x \\ -2y & -2x \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} y & x+y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} \\
&= -2x\begin{vmatrix} x & 0 \\ y & x \end{vmatrix} + 2y\begin{vmatrix} 0 & y \\ y & x \end{vmatrix} \\
&= -2(x^3+y^3)
\end{aligned}
$$

例2 计算

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}
$$