大学生学习指导丛书

4

微积分

学习指导与提高

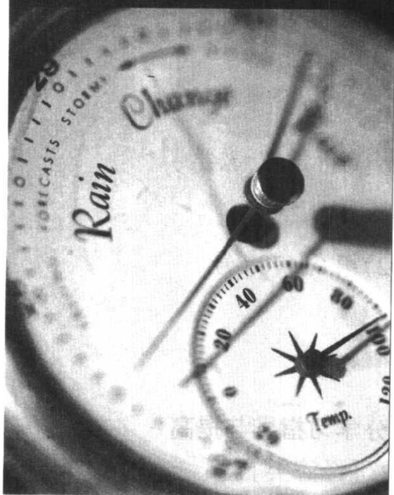
[经济类]

徐 兵　刘长乃　蒋 青　编著

北京航空航天大学出版社
http://www.buaapress.com.cn

大学生学习指导丛书

微积分



学习指导与提高

[经济类]

徐 兵 刘长乃 蒋 青 编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是与微积分教材依章同步的辅助教材，围绕教学基本要求展开、深入，对基本概念、基本性质、基本方法作了较深入的总结、归纳，注重概念、性质及方法的分析。书中选择了较多类型的题目解析，以利于学生对上述“三个基本”的掌握。例题中包括了较多的知识点，针对学生易见的多发问题的题目，强调解题思想与要点。本书是一本融教师教学经验的辅导书。

本书可作为经济类大学生学习微积分的辅助教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导与提高. 经济类/徐兵等编著. —北京：北京航空航天大学出版社，2002.4

ISBN 7-81077-163-9

Ⅰ. 微... Ⅱ. 徐... Ⅲ. 微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014785 号

微积分学习指导与提高

[经济类]

徐 兵 刘长乃 蒋 青 编著

责任编辑 郑忠姝

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn

E-mail：pressell@publica.bj.cninfo.net

河北省涿州市新华印刷厂印装 各地书店经销

*

开本：787×960 1/16 印张：17 字数：381 千字

2002 年 4 月第 1 版 2002 年 4 月第 1 次印刷 印数：5 000 册

ISBN 7-81077-163-9/O·013 定价：22.00 元

出版者序

出版的起因

随着我国高等教育改革和高等院校招生数量的不断增长，越来越多的青年学子踏入了大学的校门，开始了人生中最为绚丽多彩的大学生活。面对扑面而来的浓郁的学习气氛，置身于美丽幽静的大学校园，伴随着朗朗的读书声，无数满怀豪情的学子们意气风发，憧憬着美好的未来。当然，莘莘学子主要还是往返于教室和寝室之间，遨游于书海之中。毋庸置疑，大学的生活是浪漫美好的，但也是相当艰辛的，充满了成功的喜悦和失败的沮丧。理工类大学的学习任务相当繁重，加上现在不断压缩学时，使许多学生疲于奔命，且很少答疑，对所学的知识难以深入理解，整体上表现出一种浮躁状态。这一切都给不少同学带来了新的困惑和烦恼。为了使学生真正掌握所学知识的内涵，把握知识点，了解重点、难点和解题思路，达到事半功倍的效果，同时为帮助所有学生顺利通过各门功课，尤其是大学基础课程的考试，使他们能够不致过于艰辛地学完所有的课程。这便是我们推出这套丛书的出发点，也是我们组织出版这套丛书的主要目的所在。书中的个别地方的难度略大，主要是为部分学生日后考取研究生而做的铺垫性工作，并不是对所有学生的要求。

同类书的现状和推出本丛书的着眼点

面对五彩缤纷的同类图书，如果我们仔细观察，就会发现这些图书一直沿用着教材→辅导书→习题解答的老路在循环往复地进行。而所谓的辅导也仅是把教材中的内容加以重复而已。这就使学生有意无意间掉进了某个教材的旋涡，而不能真正抓住大纲所要求的知识点，从而导致了学生的视野狭窄，在以后的研究生入学等考试时陷于茫然不知所措的地步。

实际上，对于学生来说，必须明白的是，教材只是教学大纲的一种体现形式，日后的研究生入学考试等并不会测定学生对某种教材的掌握程度，而是要测定对大纲中所要求的知识的掌握程度。这就要求在学习时，紧扣教材，但不拘泥于教材，要在教材的基础上适当扩展视野，以大纲为主线进行学习。这是大学学习与中小学学习的最大区别，而且对于在读的天之骄子来说，掌握了方法和明确了学习的思路后，实现起来并不困难。

从学习的角度来看，一个人对新知识的学习的过程一般是“学习→理解→模糊和淡忘→再学习(复习)→再理解→…→与自身已有的知识融合”。这种规律是客观存在的，也是学校实行“讲课→作业→考试”模式的重要依据。无疑，这种教与学过程的模式化是必要的，关键是如何灵活地运用这种模式，不使学生因遵循这种模式而僵化了思路。从这一点上看，我们推出这套紧扣大纲而超越某一版本教材的辅导书，正是这样一种尝试。

编写的风格和宗旨

在本丛书策划启动时，我们与有关作者反复讨论，确定了本套丛书所要遵循的原则如下：

1. **强化大纲要求，摆脱具体教材的束缚**。如前所述，大学教学的主要目的是让学生掌握大纲所要求的知识，而不是某一个版本的教材，本丛书内容安排均是依照教学大纲而进行的，包括了教学大纲所要求的全部知识要点，而且绝大部分教材的内容也是依此安排的。这样本丛书的总体布局，甚至章节设置都与大部分教材是一致的，可使学生在学习的过程中，同步使用我们的学习指导书。

2. **强调学习和做题的技巧，减少习题的数量**。做习题，实际上是对所学知识的巩固，但在一定程度上又要综合运用各方面的知识，超过了巩固知识的基本要求，而是在此基础上有所提高。于是，有些学生增加了做题的数量，力求面面俱到。这其实是不可能的，也是不必要的。大学教学的主要要求是掌握教学大纲所要求的基本知识点，并不要求学生能够求解超级难题。因此，只要掌握一定的解题技巧，能够求解中等难度的习题即可。本丛书的例题讲解多，目的是要介绍更多的技巧；习题数量有限，是既要达到复习巩固的目的，又要避免陷入茫茫题海，浪费宝贵的时间。

3. **着眼日常学习，突出应试能力**。学校考核角度来看，考试是衡量学生是否达标的基本方式。从学习角度来看，考试是促进学生把本阶段所学的知识与自身已有的知识融合起来的、达到综合提高的目的。因此，应该从两方面着手：一是临场的做题能力；二是综合提高的能力。基于这种考虑，我们在书中增加了期中和期末考试模拟题。一则是给学生多提供一个自我检测的机会，另则是促进学生全面理解所学的内容。

我们的期望

一个新生命的诞生是可以由父母控制的；而一旦诞生，其成长和发展却是其父母所无法完全控制的，也是不以任何人的意志而转移的；每个生命都依照其自身的规律成长、发展，是惟一的、个性化的。本丛书是我们一手策划的，其影响和作用却不是我们所能够完全左右的，它的成败最后取决于读者的认可程度。我们期望，它能够为所有选用它的学生提供一些必要的帮助，使他们顺利学完该课程，并为日后的学习和工作打下坚实的基础。当然，学习是一个复杂的过程，并不是一套丛书能够完全解决的。同时，我们也期望读者在通过我们的图书得到知识之际，能够培养出勤奋、严谨的学习态度和坚韧顽强、不屈不挠的意志。这是所有成功人士必须具备的个人素质！

最后，向所有选用我们这套丛书的读者致意。你们的支持是我们的动力，你们的成绩也是我们的骄傲！

北京航空航天大学出版社

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

微积分课程是学生进入大学后的第一门课程，是经济类大学的重要基础课，也是培养学生抽象概括能力、逻辑思维能力、运算能力的重要课程。学生能否较全面、较深入地掌握它的基本内容将直接影响到其他后续课程的学习。因此，其在大学学习中占有极其重要的地位。

微积分课常常由于其内容高度的抽象性与概括力、严密的逻辑性、独特的“公式语言”、简炼的表达方式而成为学生入大学之后的第一个难关。为了帮助学生学好微积分，本书定位在使其成为学生学习微积分的“导学”，以引导学生深入学习。书中内容围绕教学基本要求展开、深入。通过对基本知识的概括，以例题解析或思考题等形式，对基本概念的要素、基本知识的特征、基本方法的要点给予了较深入的总结归纳；引入了较多类型的例题，以期开拓学生的思路，从中加深对概念的理解，学习解决问题的分析方法，加深对教材的理解。作者力图为学生提供一本适宜自学的优秀辅助教材。

在本书每章末有一份自测题及答案。在定积分之后配有两份检测题及参考解答；在书最后部分配有两份检测题及参考解答。以利于学生进行阶段检测。

本书由北京航空航天大学徐兵教授，首都经济贸易大学刘长乃教授，高等教育出版社蒋青编辑共同编写。由徐兵统稿。

本书可作为经济类大学生学习微积分课程的参考书。

书中疏漏与不妥之处，请读者指正。

编　者

于北京航空航天大学

2002 年 2 月

目　录

第一章 函数

1.1 函数

1.1.1 概要

一、函数的定义

定义 1 对变量 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某种确定的规则总有相应的值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记为 $y = f(x)$。

当且仅当给定的两个函数,其定义域与对应规则完全相同时,才认为它们是同一函数。因此常把定义域和对应规则,称为函数的两个要素。

关于函数定义有两类基本问题:

1. 求函数的定义域。

对于用解析式子表达的函数,求定义域时只需求出使解析表达式有意义的点。而对于实际问题则还要保证其符合实际问题的条件。

2. 函数符号的运用。

(1) 已知 $f(x)$,求 $f(g(x))$。

(2) 已知 $f(g(x))$ 的表达式,求 $f(x)$。

在同一问题中,当出现不同的函数关系时,必须采用不同的记号,如 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 等,以表示其对应规则之不同。同理,在同一问题中, $f(x)$ 与 $f(u)$ 表示有着相同的对应规则,当且仅当 $x = u$ 时,才能写成 $f(x) = f(u)$。

二、函数的性质

1. 单调性

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义,如果对于该区间内任意两点 $x_1 < x_2$,恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在该区间上是单调增加的(或单调减少的)。

如果函数在其整个定义域内都是单调增加的(或单调减少的),就说函数 $y = f(x)$ 是单调函数。

判定函数单调的方法一般有两种:一是利用定义,在区间内任取两点 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$ 来

判别不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $f(x_1) > f_2(x)$ ($f(x_2) - f(x_1) > 0$ 或 $f(x_2) - f(x_1) < 0$) 是否恒成立；另一种方法是利用导数的符号来判定函数的单调性，这种方法比较常用，将在后面“导数的应用”部分详加介绍。

2. 奇偶性

定义 3 设函数 $y = f(x)$ 定义在对称区间 D 上，若对于任意点 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数；如果恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数。

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点。

奇偶函数的运算性质：

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；

(2) 偶(奇)函数与偶(奇)函数的乘积为偶函数；

(3) 奇函数与偶函数的乘积为奇函数。

3. 周期性

定义 4 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若存在一个与 x 无关的正数 T，使得对于任一 $x \in D$，当 $(x \pm T) \in D$ 时，恒有

$$f(x + T) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 是周期函数。通常把满足以上关系式的最小正数，称为函数 $f(x)$ 的周期。

若 T 为函数 $f(x)$ 的周期，那么函数 $f(ax + b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$。应该指出并非每个周期函数都存在周期。

4. 有界性

定义 5 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，若存在数 $M > 0$，使得对于一切 $x \in D$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界。

如果函数 $f(x)$ 在其定义域内有界，则可简称 $f(x)$ 为有界函数，如 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 都是有界函数。此时函数的图形总介于平行线 $y = \pm M$ 之间。

由于函数的有界性主要是指函数值是否满足不等式 $|f(x)| \leqslant M$，所以可用求函数值域的方法来判定其有界性。对于比较简单的函数也可由图形来确定。在后面关于函数的极限、连续性的内容中，也会学到一些关于函数有界的结论。

三、初等函数

1. 反函数

定义 6 设函数 $y = f(x)$ 的值域为 D_y，如果对于任一 $y \in D_y$，从关系式 $y = f(x)$ 中可确定惟一的 x 值，则称变量 x 为变量 y 的函数，记为 $x = f^{-1}(y)$。$x = f^{-1}(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数。习惯上常将 x 作为自变量，y 作为因变量，因此函数 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$。

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$，经常称 $y=f(x)$ 为正函数。正、反函数的图形对称于直线 $y=x$。很明显，$y=f(x)$ 也是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数。

求反函数时，首先从 $y=f(x)$ 中解出 x，得到表达式 $x=f^{-1}(y)$，然后再将 x 与 y 对换，得到所求反函数 $y=f^{-1}(x)$。显然，只有函数 $y=f(x)$ 单调时，其反对应关系惟一，才存在有反函数 $y=f^{-1}(x)$，而且反函数 $y=f^{-1}(x)$ 也单调。

2. 基本初等函数

幂函数　$y=x^{\mu}$（μ 为实数）；

指数函数　$y=a^{x}(a>0$，且 $a\neq 1)$；

对数函数　$y=\log_a x\ (a>0$，且 $a\neq 1)$；

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$。

上述五类函数统称为基本初等函数。

3. 复合函数

定义 7　若函数 $y=f(u)$ 为定义域为 D，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 E，其中 $D\cap E\neq\varnothing$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数就称为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$。其中，x 称为自变量，u 称为中间变量，y 称为函数。

将函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 时，必须注意满足 $D\cap E\neq\varnothing$，否则将无意义。例如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$，复合成 $y=\arcsin(x^2+2)$ 后是无意义的。

对于比较复杂的复合函数，中间变量可能有多个。

4. 初等函数

定义 8　由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成，并能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数。

四、分段函数与幂指函数

1. 分段函数

定义 9　如果一个函数在其定义域内，对应于 x 的不同取值区间，对应规则 f 有着不同的表达形式，则该函数称为分段函数。

分段函数一般不属于初等函数，因为一般情况下，在其定义域内不能用一个解析式子表示。

2. 幂指函数

定义 10　形如 $y=[f(x)]^{g(x)}$ 的函数称为幂指函数。

幂指函数也是常见的一种非初等函数，因为它无法由基本初等函数复合而成。读者应注意它与幂函数、指数函数的区别。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1.1.2 教学基本要求与重点

教学基本要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法。
2. 了解函数的简单性质。
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数的概念。
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形。
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式。

重　点

求函数的定义域。函数奇、偶性的判定。

复合函数、分段函数及函数记号的运算。

1.1.3 典型例题解析

【例 1.1.1】 求函数 $y = \arcsin\dfrac{1-x}{4} + \dfrac{\sqrt{1-\lg(x-2)}}{x^2-3x-4}$ 的定义域。

〖解析〗 求函数定义域应注意:

分式的分母不能为零。

对数的真数 >0。

偶次方根下的表达式 $\geqslant 0$。

反正弦、反余弦号内的表达式绝对值 $\leqslant 1$。

因此,可知有

$$\begin{cases} \left|\dfrac{1-x}{4}\right| \leqslant 1 \\ 1-\lg(x-2) \geqslant 0 \\ x-2>0 \\ x^2-3x-4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 5 \\ x \leqslant 12 \\ 2 < x \\ x \neq -1;\ x \neq 4 \end{cases}$$

得所求函数的定义域为$(2,4) \cap (4,5]$。

【例 1.1.2】 已知函数 $f(\ln x) = x + \dfrac{1}{x}$,求函数 $f(x)$ 的表达式。

〖解析〗 由 $f[\varphi(x)]$ 的表达式,求 $f(x)$,通常有两种方法:

1° 设 $u=\varphi(x)$,解出 $x=\varphi^{-1}(u)$,代入 $f[\varphi(x)]$ 的表达式,于是得到函数 $f(u)$,再将自变量 u 改写为 x,可得 $f(x)$ 的表达式。

2° 将 $f[\varphi(x)]$ 表达式凑成 $\varphi(x)$ 的表达式,再将 $\varphi(x)$ 的位置换为 x,可得 $f(x)$。

本例利用 1° 较简便。

设 $u=\ln x$,于是 $x=e^u$,代入已给表达式,可得

$$f(u)=e^u+\frac{1}{e^u}$$

因此
$$f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$$

【例 1.1.3】 已知 $f(\sin x)=\cos 2x$,求函数 $f(x)$ 的表达式。

〖解析〗 因为 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$,所以

$$f(\sin x)=1-2\sin^2 x$$

因此
$$f(x)=1-2x^2$$

【例 1.1.4】 若函数 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,试求函数 $\varphi(x)$ 的表达式及其定义域。

〖解析〗 由 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$,即

$$e^{\varphi^2(x)}=1-x$$

又 $\varphi(x)\geqslant 0$,所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$。

由 $\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0\\ 1-x>0\end{cases}$ 得 $\varphi(x)$ 的定义域$(-\infty,0]$。

【例 1.1.5】 已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

求 $f(-1)$,$f(0)$ 及 $f(x-2)$。

〖解析〗 由所给表达式可以直接得到

$$f(-1)=(-1)^2-2(-1)=3,\qquad f(0)=0$$

$$f(x-2)=\begin{cases}(x-2)^2-2(x-2) & x-2<0\\ x-2 & x-2\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x^2-6x+8 & x<2\\ x-2 & x\geqslant 2\end{cases}$$

在计算 $f(x-2)$,将 $f(x)$ 中的自变量 x 用$x-2$ 替换时,要注意将 $f(x)$ 的自变量取值范围中的 x 也要一并替换。

【例 1.1.6】 已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+a^2}+x)$,其中 a 为常量且$a\neq 0$,试讨论 a 对函数 $f(x)$ 奇偶性的影响。

〖解析〗 $f(-x)=\ln[\sqrt{(-x)^2+a^2}+(-x)]=\ln(\sqrt{x^2+a^2}-x)=$

$$\ln\frac{(\sqrt{x^2+a^2}-x)(\sqrt{x^2+a^2}+x)}{\sqrt{x^2+a^2}+x}=\ln\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}+x}=$$

$$\ln a^2-\ln(\sqrt{x^2+a^2}+x)$$

显然,当 $a^2=1$,即 $a=\pm 1$ 时, $f(x)$ 是奇函数;当 $a^2\neq 1$ 时, $f(x)$ 非奇非偶。

【例 1.1.7】 已知函数 $f(x)$ 在$[0,2]$上的表达式为 $f(x)=2x^2+x$,试补充 $f(x)$ 在$[-2,0]$上的表达式使其在区间$[-2,2]$上构成偶函数。

〖解析〗 设 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式为 $h(x)$，则

$$f(x)=\begin{cases}h(x) & -2\leqslant x<0\\ 2x^2+x & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

于是 $$f(-x)=\begin{cases}h(-x) & -2\leqslant -x<0\\ 2x^2-x & 0\leqslant -x\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}2x^2-x & -2\leqslant x\leqslant 0\\ h(-x) & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

因为在区间 $[-2,2]$ 上 $f(x)$ 为偶函数，故 $f(x)=f(-x)$，显然这只需要 $h(x)=2x^2-x$，亦即在 $[-2,0]$ 上补充 $f(x)=2x^2-x$，此时

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-x & -2\leqslant x<0\\ 2x^2+x & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

这种补充 $[-2,0]$ 上的表达式，使 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上为偶函数的方法叫作偶延拓。同样也可以进行奇延拓，就是补充 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式使 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上成奇函数。

【例 1.1.8】 已知函数 $f(x)$ 在某对称区间上为奇函数，函数 $g(x)$ 在同一区间内为偶函数，那么下列复合函数必为奇函数的是(　　)。

A. $f[g(x)]$；　　B. $g[f(x)]$；　　C. $f[f(x)]$；　　D. $g[g(x)]$。

〖解析〗 由奇偶函数的定义，$f[g(-x)]=f[g(x)]$，显然 A 为偶函数。由于 $g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]$，B 也是偶函数。只有 $f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$ 是奇函数，因此选 C。

【例 1.1.9】 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内的函数 $y=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$ 为(　　)。

A. 奇函数；　　B. 偶函数；　　C. 无界函数；　　D. 有界函数。

〖解析〗 函数 y 是分式函数，分母是偶函数，分子则非奇非偶，所以函数 y 也非奇非偶，因此排除 A，B。

由于分子、分母均大于零，故 $y>0$。于是

$$|y|=y=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}=1+\frac{2x}{1+x^2}\leqslant 2$$

所以 y 为有界函数，选 D。

在上面的运算中，利用了不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$。

【例 1.1.10】 设 $f(x)=x^3+1$，求其反函数。

〖解析〗 求 $y=f(x)$ 的反函数通常采用下述方法：

1° 由 $y=f(x)$ 反解出 $x=\varphi(y)$。

2° 在所解出的 $x=\varphi(y)$ 中将 x,y 位置互换，得 $y=\varphi(x)$，即为 $y=f(x)$ 的反函数。

在本例中，$y=x^3+1$，由此反解出 x，可得

$$x=\sqrt[3]{y-1}$$

将上式中 x 的位置换为 y，而将 y 的位置换为 x，可得

$$y=\sqrt[3]{x-1}$$

为所求反函数。

【例 1.1.11】 设函数 $y=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+1) & \leqslant x<1\\ \frac{1}{3}(2+x) & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，试求它的反函数。

〖解析〗 求分段函数的反函数，也需分段去求。要注意在 x 的不同取值范围内对应的函数 y 的变化范围，也就是 y 的值域。

当 $0\leqslant x<1$ 时，$y=\frac{1}{2}(x^2+1)$ 的值域为 $\frac{1}{2}\leqslant y<1$，此时 $x=\sqrt{2y-1}$；

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=\frac{1}{3}(2+x)$ 的值域为 $1\leqslant y\leqslant\frac{4}{3}$，此时 $x=3y-2$。所以

$$x=\begin{cases}\sqrt{2y-1} & \frac{1}{2}\leqslant y<1\\ 3y-2 & 1\leqslant y\leqslant\frac{4}{3}\end{cases}$$

于是得到反函数 $y=\begin{cases}\sqrt{2x-1} & \frac{1}{2}\leqslant x<1\\ 3x-2 & 1\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\end{cases}$。

自测题 1

1. 设 $f(x)=\log_{x+1}(4-x^2)$，求 $f(x)$ 的定义域。

2. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-a,a]$，其中 a 为大于零的实数，那么函数 $f(x+a)$ 的定义域是多少？

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$，求函数 $f[f(x)]$ 的表达式。

4. 设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，求 $f(x)$ 的表达式。

5. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<1\\ x & x\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2+x & x<0\\ x^2-1 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$。

6. 判别函数 $y=F(x)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+a^x}\right)$ 的奇偶性。其中常数 $a>0$ 且 $a\neq 1$；而 $F(x)$ 对任何 x,y 恒有 $F(x+y)=F(x)+F(y)$。

7. 求函数 $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的反函数。

8. 设函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$，$-\infty<x<+\infty$。那么函数 $f(x)$ 是(　　)。

A. 有界函数； B. 单调函数； C. 周期函数； D. 偶函数。

9. 设函数 $f(x)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sin\frac{x}{n}$(其中 n 是确定的自然数),则 $f(x)$ 是(　　)。

A. 无界函数;　　　　B. 有界但非周期函数;

C. 单调函数;　　　　D. 以 $2n\pi$ 为周期的周期函数。

自测题 1 答案与提示

1. 解不等式组 $\begin{cases}4-x^2>0\\x+1>0\\x+1\neq1\end{cases}$ 得定义域 $(-1,0)\cap(0,2)$。

2. $[-2a,0]$。

3. 因为 $f[f(x)]=\begin{cases}1 & |f(x)|\leqslant1\\0 & |f(x)|>1\end{cases}$,但 $|f(x)|\leqslant1$,故 $f[f(x)]=1$。

4. $f(x)=\ln\frac{1+x}{x-1}$。

5. 首先确定 $f[g(x)]=\begin{cases}e^{g(x)} & g(x)<1\\g(x) & g(x)\geqslant1\end{cases}$。然后分别考虑 $g(x)<1$ 和 $g(x)\geqslant1$。

$g(x)<1$: 当 $x<0$ 时, $g(x)=2+x$,由 $2+x<1$,得 $x<-1$;当 $x\geqslant0$ 时, $g(x)=x^2-1$,由 $x^2-1<1$ 得 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$,但已确定 $x\geqslant0$,故取 $0\leqslant x<\sqrt{2}$。即当 $x<-1$ 或 $0\leqslant x<\sqrt{2}$ 时 $g(x)<1$。而 $x<-1$ 时, $g(x)=2+x$, $e^{g(x)}=e^{2+x}$。而 $0\leqslant x<\sqrt{2}$ 时, $e^{g(x)}=e^{x^2-1}$。

$g(x)\geqslant1$: 当 $x<0$ 时, $g(x)=2+x$,由 $2+x\geqslant1$,得 $x\geqslant-1$。所以 $-1\leqslant x<0$,此时 $g(x)=2+x$;当 $x\geqslant0$ 时, $g(x)=x^2-1$,由 $x^2-1\geqslant1$ 得 $x\leqslant-\sqrt{2}$ 或 $x\geqslant\sqrt{2}$。但 $x\geqslant0$,所以取 $x\geqslant\sqrt{2}$。此时 $g(x)=x^2-1$。

综上所述,可得

$$f[g(x)]=\begin{cases}e^{2+x} & x<-1\\2+x & -1\leqslant x<0\\e^{x^2-1} & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\x^2-1 & \sqrt{2}\leqslant x\end{cases}$$

6. 设 $g(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+a^x}=\frac{a^x-1}{2(1+a^x)}$,

$$g(-x)=\frac{a^{-x}-1}{2(1+a^{-x})}=\frac{1-a^x}{2(a^x+1)}=-g(x)$$

所以 $g(x)$ 是奇函数。

由 $F(x+y)=F(x)+F(y)$,令 $y=-x$,则 $F(x)+F(-x)=F(0)$;若令 $y=0$,则

$F(x)=F(x)+F(0)$,所以 $F(0)=0$, $F(x)+F(-x)=0$, $F(x)$ 也是奇函数。

综上所述 $y=F(x)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+a^x}\right)$ 为偶函数。

7. 设 $e^x=u$,则有 $u^2-2yu-1=0$, $u=y\pm\sqrt{1+y^2}$。由于 $u=e^x>0$,故舍去 $y-\sqrt{1+y^2}$,得 $e^x=y+\sqrt{1+y^2}$,反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

8. 选 D。$\cos x$ 是偶函数,于是 $e^{\cos x}$ 也是偶函数。x 与 $\sin x$ 都是奇函数,乘积为偶函数。$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$ 是两个偶函数相乘,必为偶函数。

选 A, C 都不对。因为 $\sin x$, $\cos x$ 虽然都是有界函数,但 $x\sin x$ 就不再是有界函数,也非周期函数。

9. 选 D。这里需要指出的是, n 是常数,是一个确定的值,只影响 $\sin\frac{x}{n}$ 的正负。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com