微积分

下册

（第二版）

徐澄波　吴迪光　张光天　编

浙江大学出版社

微 积 分

下 册

（第二版）

徐澄波 吴迪光 张光天 编

浙江大学出版社

(浙)新登字 10 号

内容提要

本书是为理工科大学对数学要求较高的专业(非数学系)开设《微积分》课而编写的. 全书分为上、下两册:上册介绍函数与极限,一元函数的微分学与积分学(包括广义积分);下册介绍矢量代数与空间解析几何,多元函数的微分学和积分学,场论,无穷级数与含参变量的积分. 每章按节配有思考题与习题,书后附有习题答案.

本书可供高等学校部分理工科(非数学系)的本科专业作为《微积分》课的教材,也可供高等专科学校、业余科技大学、电视大学等作为高等数学的教学参考书. 此外,本书可作为报考研究生的复习用书以及各种有志自学提高者的学习用书.

微 积 分

下 册

(第二版)

徐澄波 吴迪光 张光天 编

责任编辑 涂 红

* * *

浙江大学出版社出版

浙江大学出版社计算机中心电脑排版

杭州富阳何云印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

* * *

787×1092 16开 17.5印张 448千字

1994年1月第2版 1994年1月第1次印刷

印数 0001—4000

ISBN7-308-00015-X/O·006 定价:8.40元

目　　录

第四章　空间解析几何

解析几何，是用代数方法研究图形性质的学问，由此创立的数形结合的基本观念贯穿在微积分和全部高等数学之中．大家已在中学时学过平面解析几何，它对于我们理解一元函数的微积分是大有帮助的．为了今后进一步学习多元函数的微积分，必须先来掌握空间解析几何．

第一节　空间直角坐标系

§1.1　坐标系的建立

仿照平面解析几何的做法，为了确定空间中点的位置，先要建立某种空间坐标系．通常，在空间中任取一点 O，过 O 点作三条互相垂直的数轴（指定正向的直线，并取定共同的长度单位）Ox,Oy,Oz，这样就建立了一个**空间直角坐标系**，记为 $Oxyz$．其中点 O 叫做**坐标原点**，数轴 Ox、Oy、Oz 叫做**坐标轴**，每两条坐标轴所决定的平面叫做**坐标平面**，记为 Oxy,Oyz,Ozx．三个坐标轴的排列方式可分成**右手系**与**左手系**两种，我们一律采用右手系．右手系是这样规定的：伸出右手握住 Oz 轴，让大拇指指向 Oz 轴的正向，则其余四指就指出从 Ox 轴正向转过 $90°$ 便转到 Oy 轴正向的旋转方向，如图 4-1 所示．而左手系则改用左手来作同样的规定．

建立了空间直角坐标系之后，空间中任意一点 M 的位置可用三个有序实数来确定，方法如下（图 4-2）．

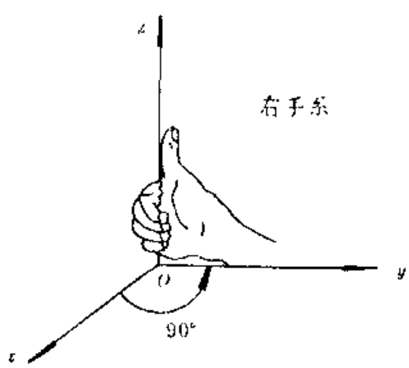


图 4-1

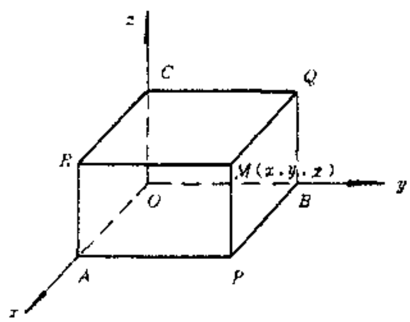


图 4-2

过点 M 分别作垂直于 Ox,Oy,Oz 轴的平面，它们与相应的坐标轴依次交于 A,B,C 三点，这三个点在各自所属的坐标轴上有其坐标，设为 x,y,z．于是，对给定的点 M，就有唯一一组有序的实数 (x,y,z) 与之对应．将上述的作法反过来，那么对于任意给定的一组有序实数 (x,y,z)，也必有唯一一点 M 与之对应．因此，空间中的点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系．我们把这样一组与点 M 相对应的有序实数 (x,y,z)，称为**点 M 的直角坐标**，记成 $M(x,y,z)$，

并常把其中的 x,y,z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

从图 4-2 明显看到，坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，在 Ox 轴上的点 A 的坐标为 $(x,0,0)$，在 Oxy 平面上的点 P 的坐标为 $(x,y,0)$. 读者可以写出其他具有特殊位置的点的坐标，如 B,C,Q,R 等.

在坐标系 $Oxyz$ 中，三张坐标平面把整个空间划分为八个部分，称为八个卦限. 每一卦限内的点的坐标，具有确定的符号. 我们把坐标全是正数的点所在的卦限定为第一卦限，其余卦限的编号如图 4-3 所示.

§1.2 两点间的距离

设已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，要求它们之间的距离. 过 M_1，M_2 各作三张平面分别垂直于三个坐标轴，形成如图 4-4 所示的长方体. 在直角三角形 M_1PM_2 中，有

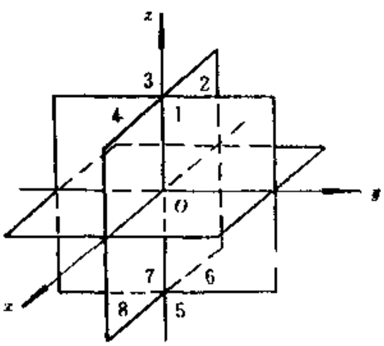


图 4-3

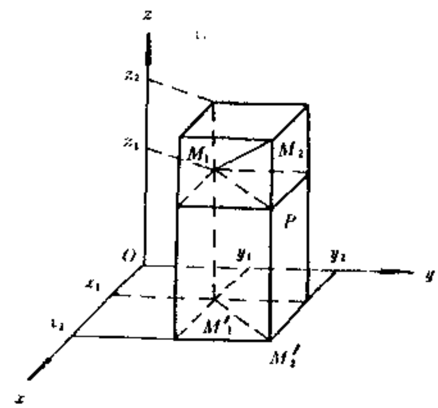


图 4-4

$$(M_1M_2)^2 = (M_1P)^2 + (PM_2)^2 = (M'_1M'_2)^2 + (PM_2)^2, \tag{1}$$

但因

$$(M'_1M'_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \tag{2}$$

及
$$(PM_2)^2 = (z_2 - z_1)^2, \tag{3}$$

将(2)和(3)式代入(1)，便得空间两点间的距离公式：

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

习　　题

1. 设空间直角坐标系中任一点 P 的坐标为 (x,y,z)，从点 P 分别向各坐标轴和各坐标平面引垂线，试求各个垂足的坐标.
2. 试求点 $P(x,y,z)$ 关于各坐标平面、各坐标轴及坐标原点的对称点的坐标.
3. 求满足下列条件的点的坐标符号：

   1) $xy > 0$;　　2) $yz < 0$;　　3) $xyz < 0$.
4. 试指出坐标满足下列条件的点在空间中的位置：

1) $x=0$;　　2) $xy=0$;　　3) $xyz=0$;

4) $x=y$;　　5) $x=y=z$;　　6) $x^2+y^2=0$.

5. 已知点 P 的坐标 $x<0,y<0,z>0$,且到 Ox、Oy、Oz 轴的距离分别为 5、$3\sqrt{5}$、$2\sqrt{13}$,试求点 P 的坐标.

6. 一正方体的棱长为 m,下底面在 Oxy 平面上,底面中心在坐标原点,四个竖棱在 Ozx 和 Oyz 坐标平面上,试求各顶点的坐标.

7. 求顶点为 $A(2,1,4)$,$B(3,-1,2)$,$C(5,0,6)$ 的三角形的周长.

第二节　矢量代数

为了便于用代数方法解决空间中的几何问题,特别是有关平面与直线的问题,我们先介绍一种有力工具 —— 矢量代数.

§2.1　矢量的概念

在自然科学和工程技术中经常遇到的量大致可分为两类:一类量在取定单位以后,就由一个实数来决定,例如质量、温度、时间等,这种只有大小的量叫做**数量**,也叫**纯量**或**标量**;另一类量不但有大小,而且还有方向,例如力、速度、加速度等,这类量叫做**矢量**,也叫**向量**.

矢量常用拉丁字母上面加一个箭头来表示,来 $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ 等,铅印时常用黑体字母来表示,如 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 等.矢量的大小又叫矢量的**模**,矢量 $\mathbf{A}$ 的模记为 $|\mathbf{A}|$,也可简记为 A.

图 4-5

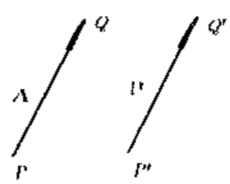


图 4-6

在几何上,通常用一个从点 P 到点 Q 的**有向线段**来表示矢量(如图 4-5).在选定长度单位后,该有向线段的长度表示矢量的大小,从 P 到 Q 的方向表示矢量的方向.P 与 Q 叫做矢量的起点与终点,这个矢量记成 $\overrightarrow{PQ}$,它的模记为 $|\overrightarrow{PQ}|$ 或 PQ.

两个矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$,如果它们的大小相等,方向相同,则称这**两个矢量相等**,记为 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

例如,图 4-6 表示的两个矢量相等.注意,我们只考虑矢量有大小和方向这两个要素,而不论它的起点在何处.在此相等的意义下,只要保持一个矢量的大小和方向不变,就可以把它的起点移放到任何位置.这种矢量又叫做**自由矢量**.物理上还要考虑**定点矢量**(起点固定)及**滑动矢量**(起点可沿矢量所在的直线滑动),我们将主要考虑自由矢量.

把两个矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 平移到同一起点,它们的方向间所形成的角 θ,并规定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,称为**矢量的夹角**(图 4-7).特别,当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时,称**矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 垂直**,记作 $\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$;当 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 时,称**矢量 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 平行**(同向或反向),记作 $\mathbf{A}\parallel\mathbf{B}$.

大小为 0 的矢量，称为**零矢量**，记作 $\mathbf{0}$. 这是为了运算需要而引进的特殊矢量，它的图形缩成一点，谈不上有方向，我们约定它可有任意的方向.

这样，任意矢量 $\mathbf{A}$ 的模是非负实数：$|\mathbf{A}| \geqslant 0$，而且等号仅对零矢量成立.

§2.2 矢量的线性运算

(一) 矢量的加法

由实验知道，如果有两个力 $\mathbf{f}_1$ 与 $\mathbf{f}_2$ 作用在一质点上，那么它们的合力 $\mathbf{f}$ 可按平行四边形法则求得(见图 4-8). 对于速度也有同样的结果. 一般，**矢量加法**的定义如下：

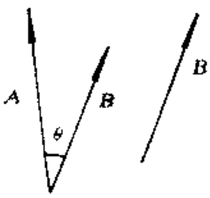


图 4-7

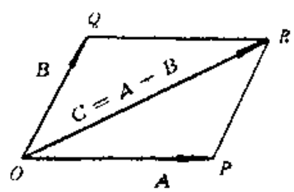
图 4-8

两矢量 $\mathbf{A} = \overrightarrow{OP}$ 与 $\mathbf{B} = \overrightarrow{OQ}$ 的和是以这两个矢量为邻边的平行四边形的对角线矢量 $\mathbf{C} = \overrightarrow{OR}$(见图 4-9($a$))，记为

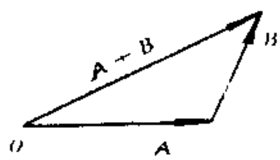
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad 或 \quad \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}.$$

又因 $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OQ}$， 所以 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$.

由此可得两矢量加法的三角形法则：以矢量 $\mathbf{A}$ 的终点作为矢量 $\mathbf{B}$ 的起点作矢量 $\mathbf{B}$，从 $\mathbf{A}$ 的起点到 $\mathbf{B}$ 的终点所作的矢量就是它们的和 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$(如图 4-9(b)).



(a)



(b)

图 4-9

由图 4-9(a) 及图 4-10(a) 容易证明，矢量加法具有以下的运算规律：

① $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ (交换律)；

② $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ (结合律).

根据②，可把三个矢量的和写成 $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$. 作法是：把 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$ 首尾相接，从最初矢量的起点到最后矢量的终点所作的矢量，就是 $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$(图 4-10($b$)). 这种加法称为**多边形法则**，它可推广到三个以上的矢量.

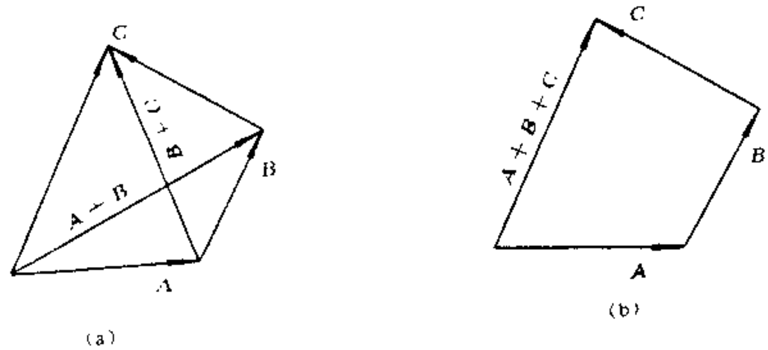


图 4-10

（二）矢量的减法

象数量的减法是加法的逆运算一样，矢量的减法也是加法的逆运算．**矢量减法**的定义如下：

如果矢量 **B** 与 **C** 的和等于矢量 **A**，即 $\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{A}$，那么矢量 **C** 就叫做**矢量 A 与 B 的差**．记为

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}.$$

由矢量加法的三角形法则可求得矢量差的方法：如图 4-11 所示，先把 **A** 与 **B** 平移到同一起点，然后由矢量 **B** 的终点向矢量 **A** 的终点引一矢量，即得 $\mathbf{C}=\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

对于任意两个矢量 **A** 与 **B**，成立**三角形不等式**：

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|\leqslant|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|,$$

这是因为三角形的一边不大于其它两边之和．

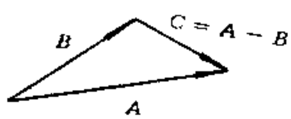


图 4-11

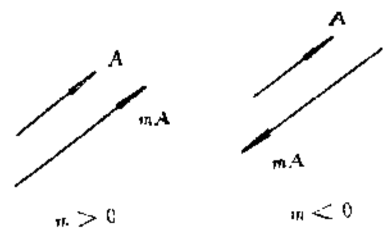


图 4-12

（三）数量与矢量的乘法

大家知道，如果有三个大小和方向都相同的力 **f** 作用于一质点上，那么质点所受到的合力 **F** 就等于三倍的 **f**，即 $\mathbf{F}=3\mathbf{f}$，这里就出现了数量与矢量的乘积．一般，对于**数量与矢量的乘积**定义如下：

矢量 **A** 与实数 m 的乘积记为 $m\mathbf{A}$，它是一个矢量：它的模等于矢量 **A** 的模与数 m 绝对值的乘积，即 $|m\mathbf{A}|=|m||\mathbf{A}|$；它的方向当 $m>0$ 时与 **A** 相同，当 $m<0$ 时与 **A** 相反（图 4-12）．

在图 4-13 中画的是矢量 $\mathbf{A}$，$\frac{3}{2}\mathbf{A}$ 与 $-\frac{1}{2}\mathbf{A}$．

特别，矢量 **A** 与 -1 的乘积 $(-1)\mathbf{A}$，它的模与 **A** 的模相等，而方向相反．常用 $-\mathbf{A}$ 来表示 $(-1)\mathbf{A}$，称为 **A** 的**负矢量**，即

$$(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}.$$

显然有 $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$,及 $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.

容易证明,数量和矢量的乘法具有以下的运算规律:

① $m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A}$ (结合律);

② $(m+n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}$ (分配律);

③ $m(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}$ (分配律).

上述的矢量加法(包括减法)及数量与矢量的乘法,合称为**矢量的线性运算**。

(四) 单位矢量

模为1的矢量叫做**单位矢量**. 设 $\mathbf{A}$ 不是零矢量,我们把与 $\mathbf{A}$ 同方向的单位矢量,记为 $\mathbf{A}^0$(图 4-14). 由数量与矢量乘积的定义,有

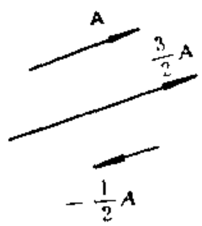


图 4-13

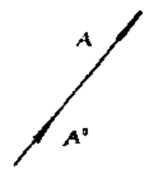


图 4-14

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^0,$$

或
$$\mathbf{A}^0 = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \qquad (\text{当 } |\mathbf{A}| \neq 0).$$

(五) 共线矢量

平行于同一直线的矢量,叫做**共线矢量**. 我们约定:零矢量平行于任何矢量,即 $\mathbf{0}$ 与任何矢量共线.

定理一 若矢量 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$,则矢量 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$ 共线的充分必要条件是:$\mathbf{B} = m\mathbf{A}$,其中 m 是一个被 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 唯一确定的数量.

证 如果 $\mathbf{B} = m\mathbf{A}$,则因 $m\mathbf{A} \parallel \mathbf{A}$,所以,$\mathbf{B} \parallel \mathbf{A}$,即 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$ 共线. 故定理的条件是充分的. 为了证明必要性,假定 $\mathbf{B} \parallel \mathbf{A}$,$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$,并记

$$\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|} = k. \tag{1}$$

若 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 同方向,则令 $m = k$,由(1)得 $\mathbf{B} = m\mathbf{A}$;若 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{A}$ 反方向,则令 $m = -k$,仍得 $\mathbf{B} = m\mathbf{A}$. 最后,还要证明 $\mathbf{B} = m\mathbf{A}$ 中的 m 是唯一的. 若有

$$\mathbf{B} = m\mathbf{A} = m'\mathbf{A}.$$

则 $(m - m')\mathbf{A} = \mathbf{0}$,但因 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$,所以 $m = m'$. 证毕.

例 设在 $\triangle ABC$ 中,D 与 E 分别是 AC 与 BC 边上的一点,而且

$$AD : DC = BE : EC = m : n.$$

求证:$\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{AB}$.

证 如图 4-15,由题设条件得

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC} - \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{n}{m+n}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB},$$

所以$\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{AB}$.

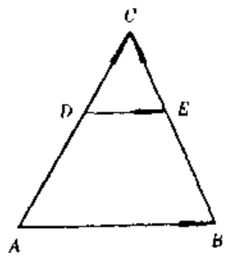


图 4-15

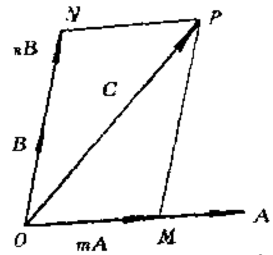


图 4-16

（六）共面矢量

如果有几个矢量平行于同一平面，那么把它们的起点移到同一点时，它们就共处在同一个平面上. 因此，平行于同一平面的矢量，叫做**共面矢量**.

定理二 若矢量 **A**,**B** 不共线，则矢量 **C** 和 **A**,**B** 共面的充分必要条件是：

$$\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}, \tag{2}$$

其中 m,n 是被 **A**,**B**,**C** 唯一确定的数量.

证 我们指出，定理中设 **A**,**B** 不共线包含着 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$,$\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ 的假定.

先证明充分性. 假定 $\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}$，若 m,n 中至少有一个是零，例如 $m = 0$，则 $\mathbf{C} = n\mathbf{B}$ 和 **B** 平行，它和 **A**,**B** 当然共面. 若 $m \neq 0, n \neq 0$，则 $m\mathbf{A} \parallel \mathbf{A}$,$n\mathbf{B} \parallel \mathbf{B}$，由矢量加法的平行四边形法则，可知 $\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}$ 和 $m\mathbf{A}$、$n\mathbf{B}$ 共面，因而也和 **A**,**B** 共面.

再证必要性. 假定 **C** 和 **A**,**B** 共面. 把三个矢量的起点都放在一点 O，则它们在同一个平面上. 经过 $\mathbf{C} = \overrightarrow{OP}$ 的终点 P 分别作直线平行于 **B**,**A**，依次交 **A**,**B** 所在直线于 M,N，则$\overrightarrow{OM} \parallel \mathbf{A}$，$\overrightarrow{ON} \parallel \mathbf{B}$，并设$\overrightarrow{OM} = m\mathbf{A}$，$\overrightarrow{ON} = n\mathbf{B}$，根据矢量加法的定义(图 4-16)，得

$$\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B}.$$

特别地，当 $\mathbf{C} \parallel \mathbf{A}$ 时，$n = 0$；当 $\mathbf{C} \parallel \mathbf{B}$ 时，$m = 0$. 即条件(2) 成立.

最后，若 $\mathbf{C} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B} = m'\mathbf{A} + n'\mathbf{B}$,

则有 $$(m - m')\mathbf{A} + (n - n')\mathbf{B} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

由于 **A**,**B** 不共线，故 $m = m'$，$n = n'$，即数 m,n 被 **A**,**B**,**C** 唯一地确定. 不然的话，例如若 $m' \neq m$，则(3) 可改写为

$$\mathbf{A} = -\frac{\mathrm{n} - \mathrm{n}'}{\mathrm{m} - \mathrm{m}'}\mathbf{B},$$

于是 **A**,**B** 两矢量共线，这和定理的假设矛盾.

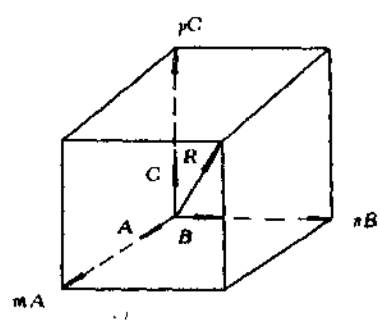


图 4-17

对于(2) 式所表达的矢量关系，我们说，矢量 **C** 是 **A**,**B** 的一个**线性组合**. 或者

说，矢量**C**可按**A**,**B**分解为两个矢量之和：一个是平行于**A**的矢量$m\mathbf{A}$；一个是平行于**B**的矢量$n\mathbf{B}$.

类似地，容易证明如下的定理：

定理三 若三矢量**A**,**B**,**C**不共面，则任意矢量**R**可以表示为**A**,**B**,**C**的线性组合、即**R**可按**A**,**B**,**C**分解为

$$\mathbf{R} = m\mathbf{A} + n\mathbf{B} + p\mathbf{C} \tag{4}$$

其中m,n,p是被**A**,**B**,**C**,**R**唯一确定的数量(图4-17).

§2.3 矢量的坐标

上面讲过，若有三个不共面的矢量**A**,**B**,**C**,则空间中任意一个矢量可按**A**,**B**,**C**进行分解，即表示成**A**,**B**,**C**的线性组合. 现在取定一个空间直角坐标系$Oxyz$,设**i**,**j**,**k**分别表示Ox,Oy,Oz轴正方向的单位矢量，称为**基本矢量**. 在这个坐标系中，对于空间中任意一个矢量**A**,总可以经平移把它的起点放到坐标原点O,设它的终点为$M(a_1,a_2,a_3)$,于是$\mathbf{A}=\overrightarrow{OM}$. 矢量$\overrightarrow{OM}$常称为点$M$的**矢径**，它是一个定点矢量，用来表示点$M$的位置. 如果过点$M$作三个分别垂直于坐标轴的平面，连同三个坐标平面构成一个以**A**为对角线的长方体(图4-18),那么矢量**A**可按基本矢量**i**,**j**,**k**分解如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{1}$$

其中的分解系数a_1,a_2,a_3就是点M的坐标，它们是唯一确定的. 我们把(1)式称为**矢量A按i,j,k的分解式**.

据此，空间中任何一个矢量$\mathbf{A}=\overrightarrow{OM}$必有唯一确定的三个有序实数$a_1,a_2,a_3$,与之对应；反之，任意给定三个有序实数$a_1,a_2,a_3$,可以唯一确定一个点$M$,从而确定一个矢量$\overrightarrow{OM}$与之对应. 这样一来，空间中所有矢量**A**与全部有序数组(a_1,a_2,a_3)之间，建立了一一对应关系. 所以，我们把分解式(1)的系数(a_1,a_2,a_3)称为**矢量A的坐标或分量**，并把(1)式改记为

$$\mathbf{A} = \{a_1,a_2,a_3\}, \tag{2}$$

这个(2)式叫做**矢量A的坐标表达式**.

有了矢量的坐标，就可把矢量的几何形式的线性运算转化为代数运算. 事实上，设

$$\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \{a_1,a_2,a_3\},$$
$$\mathbf{B} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = \{b_1,b_2,b_3\},$$

则由矢量的运算规律，得

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \pm \mathbf{B} &= (a_1 \pm b_1)\mathbf{i} + (a_2 \pm b_2)\mathbf{j} + (a_3 \pm b_3)\mathbf{k} \\ &= \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\}.\end{aligned} \tag{3}$$

又设m为一实数，则
$$\begin{aligned}m\mathbf{A} &= (ma_1)\mathbf{i} + (ma_2)\mathbf{j} + (ma_3)\mathbf{k} \\ &= \{ma_1, ma_2, ma_3\}.\end{aligned} \tag{4}$$

例1 设$\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$,$\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,求$3\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

解 $3\mathbf{A} - \mathbf{B} = (3\cdot 2 - 3)\mathbf{i} + [3(-3) - 1]\mathbf{j} + [3\cdot 5 - (-2)]\mathbf{k} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$.

例2 已知两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,求矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标.

解 如图4-19,作矢径

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{OM_2} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

则有 $$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\\ &= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}\\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\end{aligned}\tag{5}$$

这就是说，矢量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标等于它的终点坐标减去起点坐标.

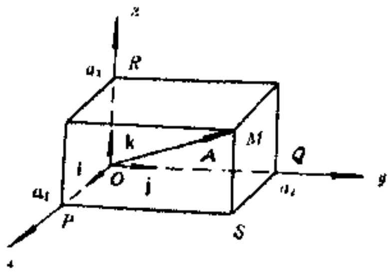


图 4-18

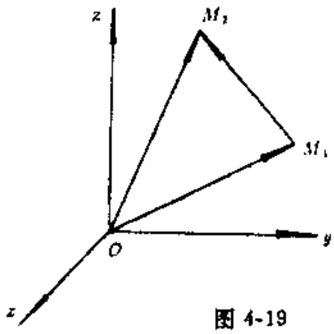


图 4-19

例 3 设 $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$，$\mathbf{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$，且 $\mathbf{A} \neq 0$，求 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$ 平行时它们的坐标所满足的条件.

解 前已证明，若 $\mathbf{A} \neq 0$，则 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$ 平行的充分必要条件是：存在数 m，使得

$$\mathbf{B} = m\mathbf{A}.$$

因此，$\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$ 的坐标应满足 $b_1 = ma_1, b_2 = ma_2, b_3 = ma_3$，或者

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}.\tag{6}$$

就是说，矢量 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$（$\mathbf{A} \neq 0$）平行的充分必要条件，是它们的对应坐标成比例.

例 4 已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，试在直线 M_1M_2 上求一点 M，使它分割线段 M_1M_2 为已知比 $\lambda(\lambda \neq -1)$，即使得$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$（图 4-20）.

解 设点 M 的坐标为(x, y, z)，由条件$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$，得

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),$$
$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y),$$
$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z),$$

因此，分点 M 的坐标为

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.\tag{7}$$

利用矢量的坐标，可以计算矢量的模与方向. 设

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{OM} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

则由两点间的距离公式，得

$$|\mathbf{A}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\tag{8}$$

又把矢量 $\mathbf{A}$ 与 Ox, Oy, Oz 轴正向的夹角分别记为 α, β, γ，叫做**矢量 $\mathbf{A}$ 的方向角**，并把 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 叫做**矢量 $\mathbf{A}$ 的方向余弦**. 从图 4-21 中容易看到：

$$|\mathbf{A}|\cos\alpha = a_1, |\mathbf{A}|\cos\beta = a_2, |\mathbf{A}|\cos\gamma = a_3.$$

因此，若 $\mathbf{A} \neq 0$，就有

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{a_1}{|\mathbf{A}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\\ \cos\beta &= \frac{a_2}{|\mathbf{A}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\\ \cos\gamma &= \frac{a_3}{|\mathbf{A}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

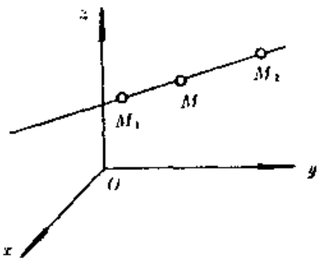


图 4-20

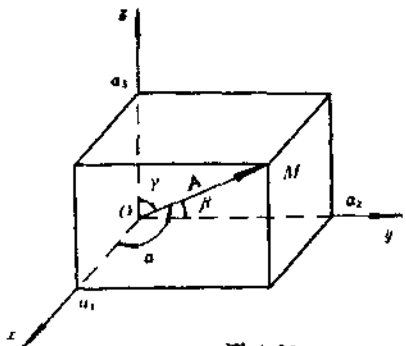


图 4-21

知道了矢量的方向余弦,就可算出矢量的方向角,也就确定了矢量的方向.注意,这三个方向余弦不是相互独立的,从(9)式得到,它们满足以下的关系:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{10}$$

此外,与 $\mathbf{A}$ 同方向的单位矢量 $\mathbf{A}^0$ 可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^0 &= \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{|\mathbf{A}|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{|\mathbf{A}|}\mathbf{k}\\ &= \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{11}$$

这就是说,单位矢量的坐标等于它的方向余弦.

例5 已知三力

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}, \mathbf{F}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \mathbf{F}_3 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

作用于一个质点,求其合力 $\mathbf{F}$ 的大小及方向角(力的大小单位:公斤)

解 合力为 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. 由(8)、(9)式得到

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{22} \approx 4.6904(\text{公斤});$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{22}} \approx 0.6396,$$

$$\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{22}} \approx -0.4264,$$

$$\cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{22}} \approx 0.6396.$$

查表,再由 $0 \leqslant \alpha,\beta,\gamma \leqslant \pi$,得 $\alpha \approx 50°14'$, $\beta = 115°14'$, $\gamma = 50°14'$.

§2.4 矢量的乘法

(一) 二矢量的数量积

设一物体在力 $\mathbf{F}$ 的作用下,产生位移 $\mathbf{S}$,矢量 $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{S}$ 的夹角为 θ(图 4-22). 则由物理学知道,