

3
高等院校土木工程专业系列教材

结构工程有限元法

主 编：李运光

副主编：李自林 张献民 王荣霞



中国建材工业出版社

高等院校土木工程专业系列教材

结构工程有限元法

主 编 李运光

副主编 李自林 张献民 王荣霞

中国建材工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

结构工程有限元法/李运光主编. —北京: 中国建材工业出版社, 2002.6

ISBN 7-80159-280-8

I. 结… II. 李… III. 建筑结构—结构分析—有限元法 IV. TU31

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 037644 号

内 容 提 要

本书内容包括: 有限元法概论、平面杆系结构的有限元法、平面杆系结构有限元分析程序简介、空间杆系结构有限元法、弹性力学平面问题的有限单元法、薄板弯曲问题的有限元法、动力问题的有限元分析、有限条法、边界单元法等。

本书内容全面, 重点突出。可作为高等院校土木工程专业的教材, 也可供广大专业技术人员参考使用。

结构工程有限元法

主编 李运光

*

中国建材工业出版社出版 (北京海淀区三里河路 11 号)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京丽源印刷厂印刷

*

开本: 787mm × 1092mm 1/16 印张: 18 字数: 450 千字

2002 年 8 月第一版 2002 年 8 月第一次印刷

印数: 1—3000 册 定价: 28.00 元

ISBN 7-80159-280-8/TU·140

序 言

《结构工程有限元法》是高等院校土木工程专业系列教材之一，该课程的基本任务是研究土木工程常用结构有限元分析的基本原理与方法，为结构分析的现代化与信息化，实现与CAD的紧密结合，打下较坚实的基础。教材内容包括：有限元法基本概念、平面杆系结构有限元分析及程序、空间杆系结构有限元分析、弹性力学相关问题与动力问题的有限元分析、有限条法、简要介绍边界元法等。

本教材在编写过程中，注意贯彻下述基本原则与要求：

一、尽量避开深奥的数学概念，力求从结构的物理模型入手，做到深入浅出、固本简末，便于初学者理解掌握。

二、综合考虑工业与民用建筑、公路、桥梁各方向基本结构的分析需要，注重工程实用性。

三、兼顾结构工程硕士研究生课和土木工程专业各方向本科生选修课的开设与讲授需要。

全书编写分工如下：李运光编写第一、二、四、八章；王荣霞编写第三、七章与附录；李自林编写第五、六章；张献民编写第九章。本教材由河北工业大学教授、天津城市建设学院和天津大学兼职教授李运光主编，天津城市建设学院李自林教授、河北工业大学张献民教授、王荣霞副教授任副主编。

本书编写时，承蒙东南大学余颖禾教授热情提供资料，本系列教材编委会阎西康秘书精心组织热心协助，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限加之时间仓促，书中不当之处敬请读者不吝批评赐正。来函请寄天津市红桥区光荣道河北工业大学土木建筑学院，邮编 300132。

编者

2001 年 12 月

目 录

第一章 有限元法概论	1
第一节 固体力学问题的解题途径	1
第二节 能量变分原理	13
第三节 有限元法概述	19
第二章 平面杆系结构的有限元法	27
第一节 单元位移列阵	27
第二节 单元刚度矩阵	28
第三节 杆端反力列阵与结点反力列阵	36
第四节 准则方程组与结构总刚度矩阵	38
第五节 结点位移与杆端内力	44
第六节 带刚臂杆元的应用	49
第三章 平面杆系结构有限元分析程序简介	60
第一节 程序设计概述	60
第二节 平面杆系结构单元主要程序段分析	62
第三节 矩阵位移法——后处理法	66
第四节 某些程序的处理技巧	100
第五节 部分内容程序设计参考	102
第四章 空间杆系结构有限元法	108
第一节 空间桁架	108
第二节 交叉梁系(板架)	111
第三节 空间刚架	114
第五章 弹性力学平面问题的有限单元法	117
第一节 平面问题的两种类型	117
第二节 弹性力学平面问题基本量及基本方程的矩阵表示	118
第三节 有限单元法的基本概念	120
第四节 平面问题有限单元法的公式推导	121
第五节 平面问题源程序及算例	132
第六章 薄板弯曲问题的有限元法	143
第一节 薄板弯曲问题的基本理论	143
第二节 薄板弯曲问题的有限元法——薄板三角形单元	146
第三节 薄板弯曲问题的有限元法——矩形薄板单元	150
第四节 刚性路面有限元分析	155
第五节 用三角形薄板广义协调元分析箱形井塔开孔矩形薄板的弹性稳定	161

第七章 动力问题的有限元分析	169
第一节 单质点系振动基本特性	169
第二节 结构本征值问题	175
第三节 结构的地震效应	184
第八章 有限条法	193
第一节 概论	193
第二节 板弯曲分析	198
第三节 平面应力分析	208
第四节 折板结构分析	214
第五节 曲板桥有限条法分析	218
第九章 边界单元法	223
第一节 边界单元法的数学基础	223
第二节 边界单元法的概念	235
第三节 位势问题	237
第四节 弹性力学问题	252
第五节 弹性动力学问题边界单元法分析	265
第六节 边界单元法的工程应用	270
附录	277

第一章 有限元法概论

第一节 固体力学问题的解题途径

工程结构原型，广义地看均为由无限多个质点所组成的三维连续固体，因而也就是具有无限多个自由度的体系。

考虑其具体几何形状与应变—应力的特殊性，工程结构通常可划分为：

1. 杆系结构

由一定数量杆件通过一定数量结点相互联结而组成的结构体系，其杆件的特点是横截面尺寸远比其杆长小，而结点的联结可能为铰接或刚接。

当全部杆件、支座及作用外力均位于同一平面内者，称为平面杆系结构；否则，即为空间杆系结构。平面杆系结构可视为空间杆系的一个特例。当某些空间杆系结构做了一定简化假定处理后，亦可作为平面杆系结构来分析，从而使计算工作量大大减少。

2. 二维结构

如薄板、重力坝、挡土墙等，本来是三维连续体，但其坐标 z 向的应力或应变可以忽略，故可按二维问题简化分析。可见，二维结构可以视为三维结构的特例。

3. 三维结构

这是最一般的工程结构状态，其位移、应变、应力都是三维坐标 x 、 y 、 z 的函数。

从结构材料的本构关系（即应力—应变关系）来看，有三种情况，如图 1-1 所示。

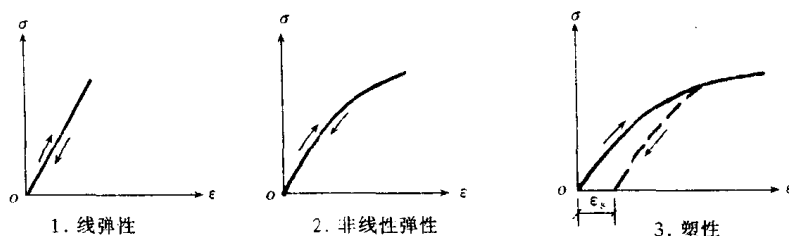


图 1-1 结构材料本构关系

1. 线弹性

弹性指变形的绝对可逆性，即结构物加载下的应变，在荷载卸除后将完全消除，从而恢复到结构未受载的原始状态；线性是指在结构物整个承载变形过程中，其应力与应变的比值为一常量，即

$$\frac{\sigma}{\epsilon} = E$$

常量 E 称为结构材料弹性模量。

2. 非线性弹性

它仍维持结构变形的绝对可逆性，但在整个承载变形过程中，应力—应变关系不再是直

线而为曲线，即应力与应变之比是变量而非常量。

3. 塑性

其本构关系特点为变形的不可逆性，即结构物加载时与卸载时的应力—应变关系曲线不重合，有残余应变 ϵ_s 存在，结构物不能再恢复到未加载的原始状态，而且，其应力—应变关系也是非线性的。

再从结构的变形状态分析，有两种情况：

1. 小变形

结构受载后的位移与应变相当微小，与结构的原始尺寸相比可以忽略，则分析结构时可以用其未发生变形前的原始状态为依据，则其形变几何关系(位移—应变关系)是线性的。

2. 大变形

结构受载后的位移与应变相当大，与结构原有尺寸相比不可忽略，因此结构分析时必须计算结构几何形状的改变，即以结构变形后的现实状态作为计算依据，则其形变几何关系仍是非线性的。

因此，固体力学的研究领域广阔而分支众多，包括材料力学、结构力学、弹性力学、非线性力学、塑性力学、断裂力学、复合材料力学等。

材料力学基本上是只研究单一构件的各种基本受力性态(拉、压、弯、剪、扭)及其组合作用；复合材料力学则面向纤维复合材料，研究它在荷载、时间、环境等因素下的力学性能；结构力学与弹性力学则在小变形、线弹性的假定范畴内，研究工程结构的应力(内力)、应变与位移，但结构力学主要面向杆系结构，弹性力学主要分析二、三维连续体；塑性力学主要研究固体在塑性变形阶段的应力与应变规律，但目前已获精确解析解的问题甚少；非线性力学则侧重解决材料非线性与几何非线性两类结构问题；至于断裂力学，作为固体力学的一个较新分支，主要研究带有初始裂纹的构件发生低应力脆断的规律。

尽管土木工程结构所用材料如木材、石料、混凝土、钢材等多为弹塑性材料，但从保证结构安全度的需要考虑，其工作状态通常都处于以弹性为主的阶段，这就使结构力学与弹性力学在土木工程结构分析中占有特别重要的地位。

一、结构力学中的力法、位移法与混合法

(一) 力法

首先，解除 B 支承多余约束，代以冗力 X_1 、 X_2 、 X_3 ，使原始超静定结构变为在外荷载与冗力共同作用下的静定基本结构，如图 1-2 所示。依次可求算各冗力方向在外荷载和各单位冗力分别作用下的基本结构变位 Δ_{iP} 和 Δ_{ij} 。

然后，恢复原结构约束，利用变形协调条件，可知任一冗力方向的总变位应为零，则列出如下力法方程组

$$\begin{cases} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \Delta_{1P} = 0 \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \Delta_{2P} = 0 \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \Delta_{3P} = 0 \end{cases} \quad (1-1-1)$$

式中 Δ_{iP} ——载常数， $\Delta_{iP} = \int \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} ds$ ；

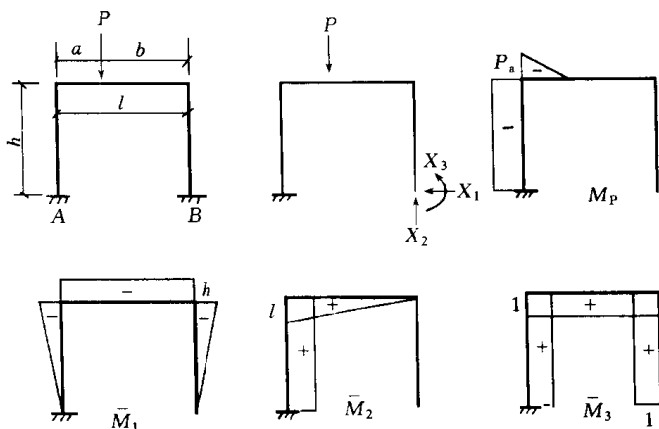


图 1-2 力法计算图示

δ_{ij} ——形常数, $\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} ds$ 。

式 (1-1-1) 写成矩阵形式

$$[F]\{X\} = \{\Delta\} \quad (1-1-2)$$

式中, $\{\Delta\} = [-\Delta_{1P} \quad -\Delta_{2P} \quad -\Delta_{3P}]^T$

$$[F] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

由于形常数具有单位力作用下基本结构变位大小即柔度的物理意义, 故作为各形常数集合的矩阵 $[F]$ 则被称为柔度矩阵。

因此, 力法也可称为柔度法。

(二) 位移法

以结构可动结点的广义位移 (包括线位移、转角) 作为基本未知量, 先沿各可动结点的广义位移方向增设人为约束 (包括阻止位移的连杆与阻止转动的刚臂), 则使原结构变为基本杆件的集合。

如图 1-3, 可动结点 C、D 广义位移共有 6 个, 如果忽略杆件的轴向变形, 则 $\delta_1 = \delta_2$, f_1 和 f_2 均为零, 广义位移减为 3 个, 即 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 。

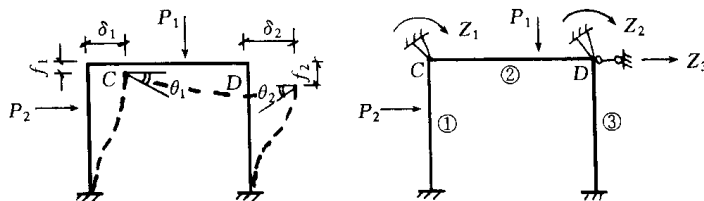


图 1-3 位移法计算图示

各基本杆件在外荷载作用下的杆端反力称为固端内力 S_i^f , 因可动结点发生广义位移所引起的杆端内力称为位移内力 S_i^d 。

现去除各可动结点所有人为增设的约束，恢复原结构工作状态，则对可动结点任一广义位移方向 i 而言，汇交于该点的各杆件沿 i 广义位移方向的所有内力总和应等于零，这就是位移法所应遵循的静力平衡条件，即

$$\sum S_i^A + \sum S_i^F = 0$$

因此图 1-3 所示结构，可写出如下位移法方程组

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} = 0 \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} = 0 \end{cases} \quad (1-1-3)$$

式中 R_{iP} ——汇交于某可动结点的各基本杆件在外荷作用下沿 i 广义位移方向所产生的固端内力之和，即 $\sum S_i^F$ ；

r_{ii} ——主系数，它表示汇交于某结点的各基本杆件，当 i 广义位移方向发生单位广义位移时，在 i 方向所引起的位移内力之和，如图 1-3， $r_{11} = r_{11}^{(1)} + r_{11}^{(2)}$ ，其余类推，顶标①、②表示基本杆件编号；

r_{ij} ——副系数，它表示当 j 广义位移方向发生单位广义位移时，相关基本杆件在 i 广义位移方向所引起的位移内力，如 $r_{12} = r_{12}^{(2)}$ ，其余类推。

这里，主、副系数都具有使基本杆件产生单位广义位移所需施加的杆端力的大小即刚度的物理意义。

式 (1-1-3) 写成矩阵形式如下

$$[K]\{\Delta\} = \{P\} \quad (1-1-4)$$

$$\text{式中, } [K] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

作为所有主、副系数集合的 $[K]$ 称为刚度矩阵。

因此，位移法也可称为刚度法。

(三) 混合法

混合法是力法与位移法的综合应用，即在结构的某一部位以冗力为未知量，而在另一部分则以可动结点位移为未知量，然后，通过否定冗力方向的变位与人为约束方向的内力建立混合方程组求解。

如图 1-4 所示结构，其混合法的方程组为

$$\begin{cases} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \varphi_3\delta_{13} + \varphi_4\delta_{14} + \Delta_{1P} = 0 \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \varphi_3\delta_{23} + \varphi_4\delta_{24} + \Delta_{2P} = 0 \\ X_1r_{31} + X_2r_{32} + \varphi_3r_{33} + \varphi_4r_{34} + R_{3P} = 0 \\ X_1r_{41} + X_2r_{42} + \varphi_3r_{43} + \varphi_4r_{44} + R_{4P} = 0 \end{cases} \quad (1-1-5)$$

式中， $\delta_{ii} = \int \frac{\bar{M}_i^2}{EI} ds$ ， $\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} ds$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$)；

$$\Delta_{iP} = \int \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} ds;$$

$$r_{33} = 4(i_{34} + i_{35}), r_{44} = 4(i_{34} + i_{46} + i_{47});$$

$$r_{43} = r_{34} = 2i_{34};$$

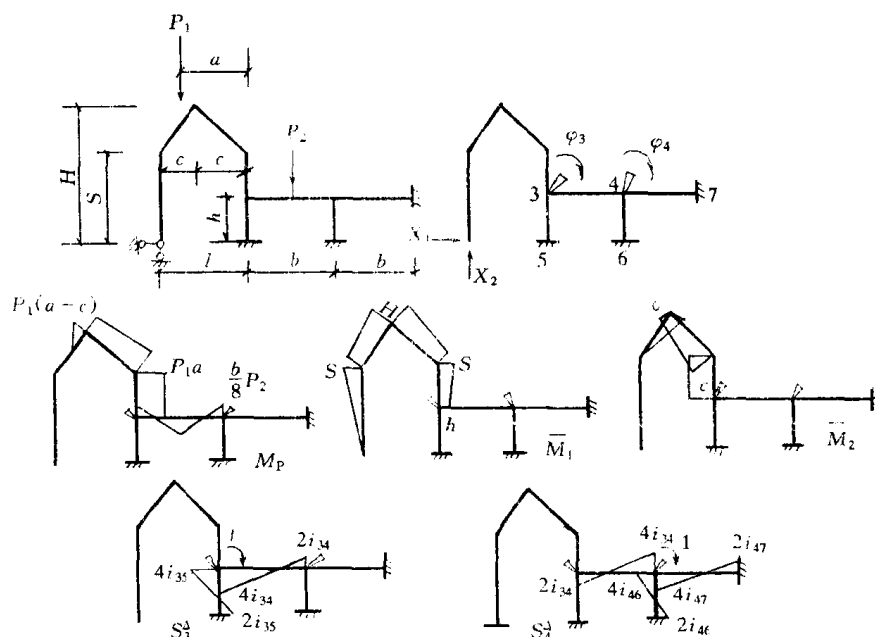


图 1-4 混合法计算图示

各杆劲度: $i = \frac{EI}{l}$;

由位移几何关系得: $\delta_{13} = -h, \delta_{23} = l, \delta_{14} = \delta_{24} = 0$;

按变位、反力互等定理知: $r_{31} = h, r_{32} = -l, r_{41} = r_{42} = 0$;

$$R_{3P} = -P_1 \cdot a - \frac{b}{8} P_2, R_{4P} = \frac{b}{8} P_2$$

(四) 三种方法的比较

1. 超静定结构解算的繁简取决于超静定次数的多少。为减少其超静定次数, 就应根据结构的具体特性, 选择适宜的解析方法。

对多余约束少于可动结点广义位移数的结构, 如桁架等, 宜用力法; 而可动结点广义位移数少于多余约束的结构, 如多跨多层刚架、交叉梁系等, 则宜用位移法。

2. 力法的基本结构是与原结构形状相同的静定结构, 故求算不同类型原结构的形、载常数有很大差异。

位移法中不同类型原结构最终都简化为有限的几种基本杆件(如两端刚接杆件、一端刚接一端铰接杆件等)的组集, R_{iP} 与 r_{ij} 的求算均按基本杆元进行, 与原结构形状无关。

因此, 位移法具有通用性强、便于实现程序标准化的显著优点。

3. 无论力法、位移法或混和法, 其最终的数学表述均为多元线性代数方程组, 求解相对较为容易。

二、弹性力学问题的解析途径

弹性力学用于二、三维连续体结构问题。其求解系基于形变几何、静力平衡与本构关系，最终演化的数学表述为偏微分方程组，按满足既定的边界条件来解析。

(一) 三维弹性体基本关系

E 、 G 、 μ 分别表示各向同性线弹性体材料的弹性模量、剪切模量与泊松比，且有

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

弹性体内任一点的位移、应变与应力状态，用下列元素表征

$$\{\delta\} = [u \quad v \quad w]^T$$

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

$$\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$

1. 静力平衡关系

研究微分体 $dx dy dz$ ，如图 1-5，除剪应力互等外，即 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ，有

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (1-1-6)$$

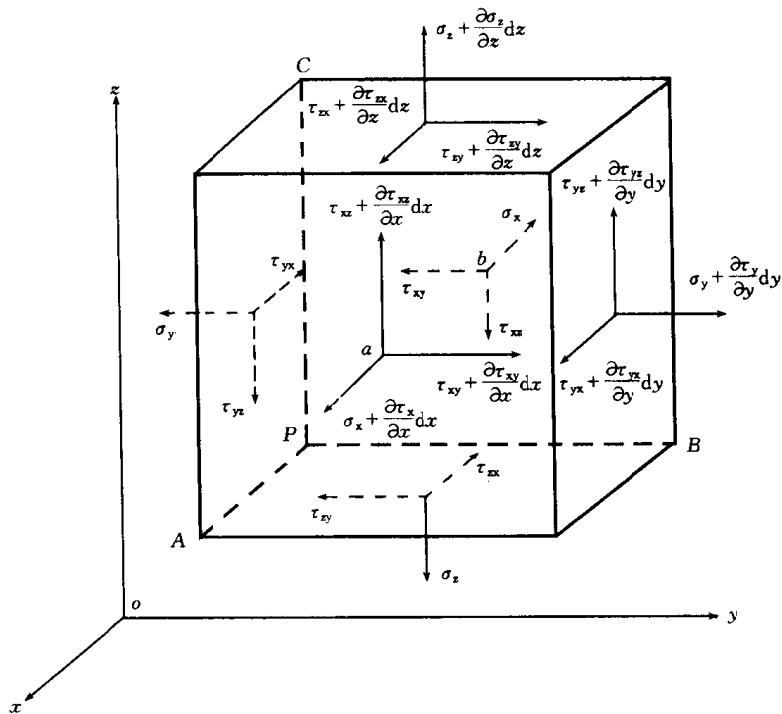


图 1-5

这里，剪应力 τ_{ij} 的脚标标定，前一脚标 i 表示其所在平面所垂直的坐标轴，后一脚标 j 表示应力指向的坐标轴。

2. 形变几何关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ r_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ r_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ r_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right. \quad (1-1-7)$$

3. 线弹性各向同性本构关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ r_{xy} = \tau_{xy}/G \\ r_{yz} = \tau_{yz}/G \\ r_{zx} = \tau_{zx}/G \end{array} \right. \quad (1-1-8)$$

此本构关系是以应力表述应变，经变换，也可转为以应变表示应力，形如

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ r_{xy} \\ r_{yz} \\ r_{zx} \end{array} \right\} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & & \text{对} \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \text{称} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ r_{xy} \\ r_{yz} \\ r_{zx} \end{array} \right\}$$

可见, 弹性体内任一点的 15 个元素分量, 可由式 (1-1-6)、(1-1-7)、(1-1-8) 所给出的 15 个关系式完全确定。

4. 边界条件

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = \bar{X} \\ m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} = \bar{Y} \\ n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} = \bar{Z} \end{cases} \quad (1-1-9)$$

式中 l, m, n ——该法线分别对 x, y, z 坐标轴的方向余弦;

$$l = \cos(N, x), m = \cos(N, y), n = \cos(N, z)$$

N ——弹性体边界面的外法线;

$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ ——面力分量。

(二) 两类平面问题

两类平面问题可视为三维问题在某种特定条件下向二维问题的简化。

1. 平面应力问题 [图 1-6 (a)]

当薄板仅承受平行其板平面的外力且不沿其板厚变化时, 可假定沿板厚方向 (z 坐标) 无应力, 即: $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, 则本构关系简化为

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ r_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \end{cases}$$

如以应变表示应力, 写成矩阵形式可得

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ r_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \{\epsilon\} \quad (1-1-10)$$

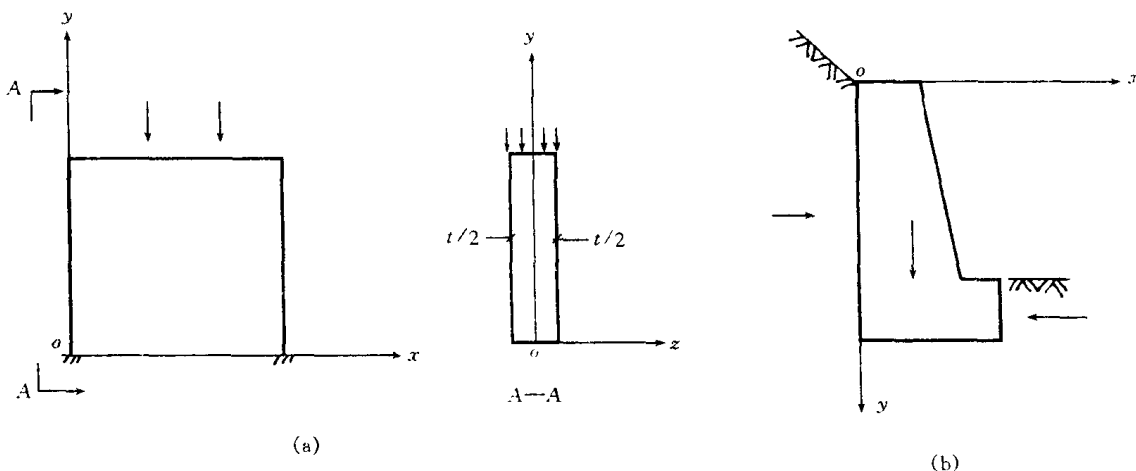


图 1-6 两类平面问题
(a) 平面应力问题 (b) 平面形变问题

这时, $\epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$, 虽不为零, 但非独立分量, $r_{xz} = r_{yz} = 0$, 形变几何关系简化为

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ r_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (1-1-11)$$

静力平衡公式简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (1-1-12)$$

可见, 式(1-1-10)、(1-1-11)、(1-1-12)给定的 8 个关系式正好确定其 8 个未知分量, 即

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= [u \quad v]^T \\ \{\epsilon\} &= [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad r_{xy}]^T \\ \{\sigma\} &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \end{aligned}$$

2. 平面形变问题 [图 1-6 (b)]

当一无限长柱体 (如重力坝、挡土墙等) 承受与其截面平行且沿其长度方向不变的外力时, 可假定沿长度的 z 坐标方向没有位移与形变, 即: $w = 0, \epsilon_z = 0, r_{yz} = r_{xz} = 0$ 。

这时, $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ 虽不为零, 但不再是独立分量, 其本构关系简化为

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \text{对} & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \text{称} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ r_{xy} \end{Bmatrix} = [D'] \{\epsilon\} \quad (1-1-13)$$

其形变几何关系、静力平衡公式仍为式 (1-1-11) 与式 (1-1-12)。

因此, 两类平面问题的形变几何关系与静力平衡关系完全相同, 其差异仅表现于本构关系方面的弹性矩阵有所不同。

不难发现, 只要把式 (1-1-10) 中的 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$, μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$, 则转化为式 (1-1-13), 这时, 平面应力问题的弹性矩阵 $[D]$ 已转变为平面形变问题的弹性矩阵 $[D']$ 。

故今后仅以平面应力问题为代表进行讨论。

(三) 轴对称问题

当三维弹性体的几何形状、约束情况与所受外力均对称于其高度的 z 轴, 则它的位移应变与应力均对称于 z 轴, 这类问题称为轴对称问题。

实际工程结构如矿山井筒、基础圆桩、反应堆压力容器、圆形荷载下的路面应力分析等

均可视为轴对称问题。如图 1-7。

轴对称问题可方便地使用圆柱坐标（径向 r 、环向 θ 、高度方向 z ），因其位移、应变、应力均只是 r 与 z 的函数，与 θ 无关，故可按二维问题处理。其与两类平面问题的不同点在于径向位移将引起环向应变。

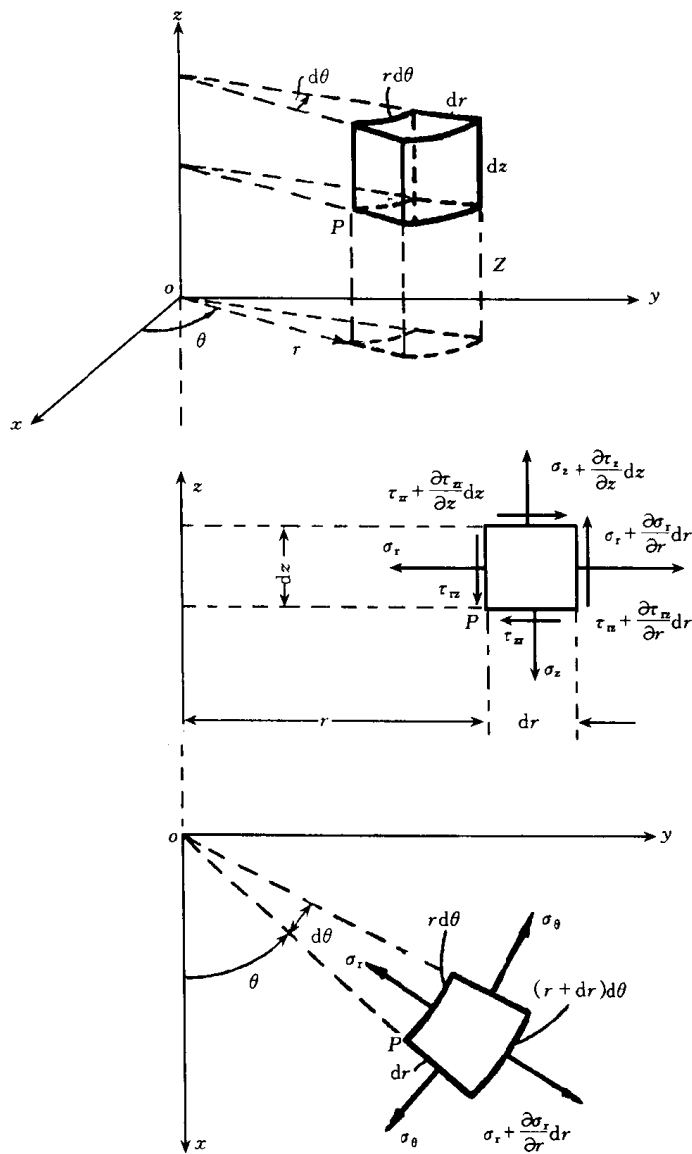


图 1-7 轴对称问题示意

1. 形变几何关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \\ \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ r_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{array} \right. \quad (1-1-14)$$

2. 本构关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)] \\ r_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G} \end{array} \right. \quad (1-1-15)$$

如以应变表示应力，并写成矩阵形式，则有

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \text{对} & & \\ \mu & 1-\mu & & \\ \mu & \mu & 1-\mu & \text{称} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ r_{rz} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\}$$

3. 静力平衡公式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{array} \right. \quad (1-1-16)$$

由于 $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$ ，故式中的 σ_θ 为其一个主应力。

(四) 弹性力学问题的解析途径

弹性力学问题的求解系基于前述的形变几何、静力平衡与本构关系，其最终数学表达式为偏微分方程组，需满足既定边界条件来进行解析。

1. 按位移求解

以 3 个位移 u, v, w 为基本未知数。

由式 (1-1-8) 即应变表示应力的本构关系可知

$$\sigma_x = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right]$$

令 $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e$ ，则

$$\sigma_x = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\varepsilon_x - \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} e \right]$$

再令 $\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ ，整理后得到

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x$$

将形变几何关系代入