

中学数学教材教法



钟善基 丁尔升 曹才翰 编

北京师范大学出版社

中学数学教材教法

钟善基 丁尔升 曹才翰 编

北京师范大学出版社

1982年9月

中学数学教材教法

钟善基 丁尔升 曹才翰 编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京通县印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：13.375 字数：388千

1982年12月第一版 1982年12月第一次印刷

印数：1—53,000

统一书号：7243·43 定价：1.50 元

前 言

1981年春，我们北京师范大学数学系和东北师范大学数学系受教育部委托，举办了一期师范专科学校数学系（科）“教材教法”课新教师讲习班。在这期间，考虑到师范专科学校数学系（科）的“教材教法”课，还没有教材，同志们乃有把讲习班课上所用的讲稿整理印出，暂作教材的动议；并且也在课余，对讲稿进行了整理。讲习班结束后，我们又研究了整理出的讲稿，感到作为“教材教法”课的教材，稿中有些章、节还需要修改，而且有的篇、章还需要从新改写。于是便着手修改、改写的工作。但是这项工作，由于是在业余时间进行的，因而经过了几个月的时间，才算完成，才印成了这本书。

这本书共分五篇。第一篇是关于中学数学教学的通论，内容是中学数学教学的一般的理论基础。其它四篇分别是关于中学数学中代数、初等几何、三角和解析几何等四个分支教学的分论，内容主要是对这四个分支所作的教材的分析和教法的研究。考虑到师范专科学校虽然只培养初中教师，初中数学课只涉及代数、初等几何的一部分及些许三角、解析几何的成份，但作为师范专科学校数学系（科）的学生，如果对中学代数、初等几何、三角、解析几何各课的内容没有较全面的认识；对这几门课的教学要求，没有较具体的了解，毕业后从事初中数学教学工作时，便难以把工作做得很

深入，甚至教学质量不易得到保证。于是，在这本书的编写过程中，我们又决定把高、初中所包含的这四个分支的全部内容都作了教材的分析和教法的研究。这样，这本书又不仅可考虑作为师范专科学校数学系（科）“教材教法”课的教材，而且也可作为师范大学和师范学院数学系“教材教法”课的参考书，以及作为中学数学教师的参考书了。

由于“教材教法”课的性质不是理论性较强的实践课，而是实践性较强的理论课，因此在这本书中，虽然也涉及一些教学措施，但是以中学数学教学的一般的理论所占的比重较大些。除第一篇通论外，即使在其它各篇的分论中，也只是从理论上对各分支的教材的选择与编排、深度与广度、地位与作用作出一般性的分析，而且还是针对着通常所说的重点内容和难点内容所作的。当然，作为重点和难点内容，我们未必选得很全、很准。因此，在教学中，教师可再选择、补充。甚至可把需要补充的课题作为作业，由学生自己进行教材分析。对于教法的研究，由于我们感到每一课时内容的具体的教学措施，是因各班学生的情况不同，而不能强求一致的。因此，在书中我们也只对重点内容和难点内容，针对各自的特点，作了一般的教法上的探讨，而没写出多少课题的课时教学计划（教案）。在教学中，教师可针对着当地的中学生的具体情况，编写一些课时教学计划作为例，来说明具体的教学方法。同时也应该作为作业，使学生针对他们去见习的学校的学生的情况，自己编写一些课时教学计划。

对于这本书编写的分工是这样：第一篇的第一、三、四章和第三、五篇是由钟善基起草的；第一篇的第二章和第二篇是由曹才翰起草的；第四篇是由丁尔升起草的。由于时间

仓促；尤其是限于我们的水平不高、经验不足，致使这本书的论述难免不够全面、不够深入，甚至有错。因此希望读者不吝提出改正的意见。

这本书的写成，曾得到东北师范大学数学系马忠林先生、刘孟德先生和梁植文先生以及北京师范学院数学系李建才先生的大力支持和赞助。在这里谨向四位先生表示感谢。

在整理讲稿的过程中，经家麒老师、周诚询老师、曹成荣老师、张碧莲老师、孙长坡老师、魏超群老师、杨景学老师、汤效芳老师和张森福老师都作了很多的具体工作，付出了很大的劳力。在这里也向九位老师致以谢意。

北京师范大学数学系
钟善基 丁尔升 曹才翰
1981年11月

目 录

前 言	(1)
第一篇 通论	(1)
第一章 形式逻辑在数学中的体现	(1)
§1.1. 概念、定义和原名	(1)
§1.2. 命题、定理和公理	(8)
§1.3. 命题的推证通法	(15)
§1.4. 分类	(24)
第二章 中学数学教学目的与任务	(29)
§1.5. 确定中学数学教学目的的依据	(30)
§1.6. 中学数学教学目的与任务	(33)
第三章 中学数学的教学原则	(46)
§1.7. 理论与实际相结合	(46)
§1.8. 具体与抽象相结合	(50)
§1.9. 严谨与量力相结合	(56)
§1.10. 巩固与发展相结合	(64)
第四章 中学数学教学工作	(67)
§1.11. 启发式教学方法的意义与作用	(67)
§1.12. 概念的教学	(71)
§1.13. 命题(公理、定理、公式)的教学	(76)
§1.14. 习题(例题)的作用、分类、选配和使用	(80)
§1.15. 复习工作	(86)

§1.16.	备课	(100)
第二篇	中学代数课的教学	(109)
第五章	中学代数教学的一般问题	(109)
§2.1.	中学代数的内容与结构	(109)
§2.2.	中学代数教学的目的要求	(117)
§2.3.	几个问题的探讨	(118)
第六章	数的概念的教学	(127)
§2.4.	科学的数系和教学的数系	(127)
§2.5.	有理数的教学	(138)
§2.6.	关于复数教学的一些问题	(155)
第七章	中学代数课中恒等变形的教学	(162)
§2.7.	关于几个问题的讨论	(162)
§2.8.	因式分解的教学	(176)
第八章	方程的教学	(188)
§2.9.	方程的定义	(190)
§2.10.	方程的解法	(193)
§2.11.	有关同解的几个定理	(197)
§2.12.	分式方程和无理方程同解性研究	(203)
§2.13.	方程组的同解	(213)
§2.14.	列方程解应用题的教学	(224)
第九章	函数的教学	(236)
§2.15.	中学数学课程中加强函数教学的重要 意义	(236)
§2.16.	关于函数的定义	(240)
§2.17.	中学数学课程中函数教学的总要求和 教学阶段的划分	(253)

§2.18.	有关讲授函数概念的几点注意	(257)
§2.19.	一一对应与反函数	(265)
第三篇	中学初等几何课的教学	(275)
第十章	中学初等几何课的教学目的和任务	(275)
§3.1.	中学初等几何课的教学目的	(275)
§3.2.	教材选择与编排上的几个问题	(281)
第十一章	直线、相交线和平行线的教学	(294)
§3.3.	教材内容概述	(294)
§3.4.	教学目的	(297)
§3.5.	教法要点	(298)
第十二章	直线形的教学	(310)
§3.6.	教材内容概述	(310)
§3.7.	教学目的	(315)
§3.8.	教法要点	(317)
第十三章	相似形的教学	(326)
§3.9.	教材内容概述	(326)
§3.10.	教学目的	(329)
§3.11.	教法要点	(329)
第十四章	圆的教学	(339)
§3.12.	教材内容概述	(339)
§3.13.	教学目的	(343)
§3.14.	教法要点	(345)
第十五章	立体几何教学中的一般问题	(359)
§3.15.	空间直线与平面的教学要求	(359)
§3.16.	基本几何体的教材选择与编排	(367)
§3.17.	关于学生的空间想象能力的培养	(370)

第四篇	中学三角课的教学	(381)
第十六章	中学三角教学的一般问题	(381)
§4.1.	三角教学的目的与任务	(381)
§4.2.	中学三角课的一般内容及安排	(388)
§4.3.	三角课中的作业	(395)
第十七章	三角函数定义和性质的教学	(400)
§4.4.	三角函数定义的教学	(400)
§4.5.	三角函数基本性质和图象的教学	(409)
第十八章	三角恒等变换的教学	(429)
§4.6.	基本三角恒等式	(429)
§4.7.	加法定理及其推论	(440)
§4.8.	三角恒等变形的习题	(469)
第十九章	反三角函数、三角方程的教学	(476)
§4.9.	反三角函数的教学	(476)
§4.10.	三角方程的教学	(488)
第五篇	中学解析几何课的教学	(504)
第二十章	中学解析几何课的教学目的和任务	(504)
§5.1.	中学解析几何课的教学目的	(504)
§5.2.	教学内容的选择和安排	(508)
§5.3.	教学方法上的特点	(510)
第二十一章	直角坐标系的教	(514)
§5.4.	教学目的	(514)
§5.5.	教材编选上的几个问题	(516)
§5.6.	教法要点	(519)
第二十二章	直线的教学	(526)
§5.7.	教学目的	(526)

§5.8.	教法要点	(529)
第廿三章	曲线和方程的教学	(537)
§5.9.	教学目的	(537)
§5.10.	教法要点	(539)
第廿四章	圆锥截线的教学	(541)
§5.11.	教材的选择	(541)
§5.12.	教学目的	(553)
§5.13.	教法要点	(556)
第廿五章	极坐标与参数方程的教学	(565)
§5.14.	教学目的	(565)
§5.15.	教材中几个值得注意的问题	(566)
§5.16.	教法要点	(569)

第一篇 通 论

第一章 形式逻辑在数学中的体现

数学这门科学与其它种科学的不同处，除研究对象不同外，最突出的就是对象的内部规律的真实性的，必须用逻辑推理的方式来证明。

以逻辑推理的方式来证明对象内部规律的真实性的，首先必须明确对象的概念；其次是内部规律必须表现以命题的形式（包括公式）——经推理证明后，就叫做定理。因此，一部数学理论，即由一套概念、命题和命题的推理证明所组成。

为了能深入地分析数学教材的编排体系以及理论的深广度，作为数学教师，应对数学中含有的有关形式逻辑方面的理论，有所了解。在这章里，将对这些理论作一简要的阐述。

§1.1. 概念、定义和原名

一 对象的概念和定义

什么是所研究的对象的概念？逻辑学上是这样指出的：

对象的概念是对象的本质属性在人的思维中的反映。

其中所说的对象的本质属性，指的是这种对象所独有，而为

其它对象所没有的性质。如，矩形的概念是“一个角是直角的平行四边形”。这就是说，从几何的角度来研究矩形形状的对象时，它在人的思维中反映了：这样的对象是平行四边形形状的，而且有一个角是直角的。这些就是矩形的本质属性。

研究对象的概念，总是与文词联系着的。任何对象都要用文词表达出来，这就是通常所说的、给对象所起的名称。而它的概念，也要用文词来表达，这就是通常所说的定义。因此，通常所说的名称的定义，指的就是：

表达名称所代表的对象的本质属性的文词。

作为名称的定义的一般表达形式是：

……，叫做……。

“叫做”前为对象的本质属性，“叫做”后为对象的名称。

二 作为名称的定义的要求

1. 概念的内涵和外延

概念所包括的、它所反映的所有对象的共同的本质属性的总和，叫做这个概念的内涵。

如，平行四边形的内涵就是平行四边形所代表的所有对象的本质属性：有四条边；两组对边分别平行……。

又如，矩形的内涵就是矩形所代表的所有对象的本质属性：平行四边形；一个角是直角……。

适合于概念的所有对象的范围，叫做这个概念的外延。

如，正整数、零、负整数、正分数、负分数，就是有理数这个概念的外延。

又如，一角的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，

就是一般中学数学课本中所提出的角的三角函数这个概念的外延。（有的课本只提出前四种。实则还有两种：角 α 的正矢 $\text{vers}\alpha = 1 - \cos\alpha$ 和余矢 $\text{covers}\alpha = 1 - \sin\alpha$ ）。

概念的内涵与外延之间，是有一定的关系的。如平行四边形的外延，是包括所有的平行四边形，其内涵即所有平行四边形所共有的本质属性。而矩形这个概念，其外延并不包括全部平行四边形，只包括平行四边形的一部分。因此，矩形的外延就比平行四边形的外延小。但是矩形的内涵，除包括平行四边形的内涵外，还有它独有的属性：一个角是直角。这又是平行四边形这一概念的内涵所没有的。这就是说，平行四边形的属性有所增加，即扩大了内涵，其外延即缩小。这说明了，概念的内涵与外延之间，具有下列的关系：

概念的内涵越大，则其外延越小；内涵越小，其外延就越大。

当然这种关系只能对一个概念可以列入另一个概念的外延中那些概念而言，即只适用于具有“从属关系”的那些概念。

2. 种概念和类概念

如前所述，如果内涵较大的概念，可以放进另一个内涵较小的概念中，如矩形可以放进平行四边形之中，那么这样的两个概念的关系就是从属关系。就说前者从属于后者。

如果一个概念从属于另一个概念，后者就叫做前者的种概念，而前者就叫做后者的类概念。如平行四边形是矩形的种概念，矩形是平行四边形的类概念。有理数是分数的种概念，分数是有理数的类概念。

种概念和类概念是相对的。同一概念，由于和它比较的

概念的外延的大小不同，也就是从属关系不同，它可以是种概念，也可以是类概念。如平行四边形是矩形的种概念，但又是四边形的类概念。有理数是分数的种概念，但又是实数的类概念。

作为一个概念的种概念未必是唯一的，它的类概念也未必是唯一的。如平行四边形、四边形、多边形，这些都是矩形的种概念；矩形、菱形、正方形，这些又都是平行四边形的类概念。

作为一个概念的各个种概念当中，其内涵与这个概念的内涵之差为最小的，又叫做这个概念的邻近的种概念。如平行四边形就是矩形的邻近的种概念，而四边形、多边形都不是矩形的邻近的种概念。有理数是分数的邻近的种概念，而实数就不是分数的邻近的种概念。

显然，一个概念的种概念的本质属性也都是这个概念的本质属性。只是这个概念还有别的、用以区别这个概念同它的种概念的其它类概念的属性。这样的属性就叫做这个概念的类差。如“一个角是直角”就是矩形区别于平行四边形的其它类概念的类差。

应当注意的是，种和类的从属关系不得与全体和部分的关系相混淆。如平行四边形和它的边；对数和它的尾数等都是全体和部分的关系，不是从属关系。平行四边形和矩形虽然也是全体与部分的关系，但也是从属关系。说“矩形是平行四边形”是可以的，但说“尾数是对数”就不可以了。

3. 作为名称的定义的要求

(1) 定义的方式

① 揭示内涵的方式

如前所述，定义的形式是“……，叫做……”，其“叫做”前为本质属性，“叫做”后为名称。但具体的说，“本质属性”部分，又该如何表达？一般说来，按下列的“公式”来表达：

邻近的种 + 类差

如矩形的定义“一个角是直角的平行四边形叫做矩形”就完全是按照“公式”来表达的。这种定义的方式就是揭示内涵的方式，或者说下定义的内涵法。这种方式在数学中用得最多。

在这种定义方式中，类差有时也用描述概念的发生过程来表达。如圆的定义：平面上一个动点与一个定点的距离为一定时，动点所成的轨迹叫做圆。这种定义的方式又叫做发生的方式。或者说下定义的发生法。

②揭示外延的方式

当概念的内涵不易揭示时，就直接指出概念的外延作为它的定义。如前面所指出的课本中有理数、角的三角函数的定义，就用的是这种下定义的方式。又如零指数 $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)，这也是揭示外延的定义方式。

(2)下定义的基本要求

为了正确地下定义，一般要符合下列的要求：

①定义应该恰如其分

这是说作为一个名称的定义所确定的外延，必须与这名称所代表的对象的外延相等，既不扩大也不缩小。

如把平行线定义为两条不相交的直线，这就把外延扩大了。因为两条异面直线也是不相交的。必须把平行线定义为同一平面内的两条不相交的直线，才恰如其分。

又如把无理数定义为有理数的不尽方根，这就把外延缩小了。因为数 π 、数 e 、 $\lg 2$ 等等都是无理数但不是有理数的不尽方根。把无理数定义为无限不循环小数，才恰如其分。

② 定义不得循环

这是说利用某一名称来定义另一名称，则定义前者就不得再利用后者。

如定义两条直线垂直时，用了直角：相交成直角的两条直线，叫做互相垂直的直线。那么定义直角时，又用了垂直线：一个角的两条边线如果互相垂直，这个角就叫做直角。这样，前后两个定义就循环了。这时既没揭示出直角和垂直线的内涵，也没确定它们的外延。因此，把直角改为：一个角如果和它的邻补角相等，这个角就叫做直角。这样，前后两个定义才不循环。

③ 不得用未定义过的名称

这是说利用某一名称来定义另一名称时，前者必须是定义过的。否则仍是内涵、外延都不明确。

如利用平行四边形定义矩形：一个角是直角的平行四边形，叫做矩形。则平行四边形必须是已定义的名称。否则矩形的内涵、外延就无法明确了。

④ 定义不得用否定的形式

由于定义是揭示概念的内涵的。因此定义中本质属性的叙述，必须是肯定形式的，而不应是否定形式的。如定义无理数为：不是有理数的数，叫做无理数。姑且不论这个定义实质上是否恰如其分，仅从形式上说，仍然是内涵、外延都不明确。

⑤ 定义中不要含有能由推理得出的本质属性。