# 正定理和逆定理

格拉施坦著

新知識出版社

# 第二版原序

自从"正定理和逆定理"这本小册子第一版問世以来已經15年了．在这一段时期中，高等学校考生的数学知識有了很大的提高，他們的数学知識水平也提高了．但数学結構的邏輯問題，同以前一样，还使許多投考高等学校的学生，甚至于大学一年級的学生，感覚到困难．因而我覚得再版"正定理和逆定理"这本書还是适当的．

本書的第二版和1936年第一版的第一部分基本上是一致的．第二版中对于"集合"和"性質"的概念叙述得比較多，§§4、5、6全部是闡述这个問題的；此外，在第二版中补充了一节(反証法)并增加了一些习題．本書的材料基本上不超出中学八年級和九年級数学大綱的范圍，只有个别的例子是屬于10年級数学大綱范圍的．

这本小册子首先是供給数学爱好者閱讀的：中学高年級学生、高等师范学校的学生以及中学和中等技术学校的教师．在深入复习个别数学問題，特别是几何学时，这本小書可供更广泛的讀者参考．

为了联系学校的教材，第二版引用了吉西略夫所著几何課本的材料．

在本書修訂再版时 П. С. 馬捷諾夫及 Г. М. 阿傑遜-維尔斯基两同志提了一些宝貴的建議，作者深为感謝．

作　者

# 第一版原序

1931年9月5日联共(布)中央关于小学和中学的决定，对于中学教学質量的改进有很大的影响．高等学校入学考試的成績表明，中学毕业生的一般水平和数学水平是逐年有所提高的．但是直到現在，在数学方面，中学还不是經常使学生們得到足够的理論发展．这种情况反映在高等学校入

学考試的成績中，反映在数学竞賽的成績中，反映在大学生学习高等数学时感覚困难的情形中。在大多数情况，学生是死記書本所叙述而应当掌握的各种定理的証明。但是对于这些定理之間的关系則并不明了；并沒有認識到定理系統是研究經常碰到的数学对象所需要的。学生們对于一些数学証明的方法也不清楚：例如对于反証法，对于"一切""每一个"等概念，对于推翻某定理时只要举出該定理不成立的一个情形便可以充分証明，对于定理和概念的概括，对于完全数学归納法等。上述这些問題在初等数学的教科書中是很少提到的。在某些高等数学教程中提出了一些初等数学教程的公式和定理。在这些参考書中列有圓的周長，$\sin 2\alpha$ 的公式等。但是沒有一本参考書說到什么是正定理和逆定理的。其实，有关数学証明方法的一些問題常使大学生最感困难，特别是一年級的大学生。当进而学习高等数学时，大学生立刻要碰到許多难于掌握的定义和定理，它們是由下列一些詞复杂地結合起来的，如"必要和充分""一切""任意""某些""存在着"等等。

本書的目的是想部分地弥补上述缺陷。实質上，它只討論了一个問題——关于否定的問題。正定理和逆定理之間的关系，正定理和否定理之間的关系，必要条件和充分条件的关系，点的軌迹的确定等，都跟命題的否定問題有联系。所有这些問題在本書第一部分都討論了。这一部分对学生說来并沒有什么新的东西，因为在这第一部分只是比較全面地討論了中学課程里已經講过的一些問題。

另外請讀者注意，書中的习題是本書的一个极其重要的部分。

在我写这本小册子的时候 C. A. 雅諾夫斯基及 И. B. 阿尔諾尔德两同志提供許多宝貴的意見，特致謝忱。

# 目　录

§1. 导言．定理、公理和定义……………………………… 1
§2. 定理……………………………………………………… 3
§3. 定理系統．数学对象的研究…………………………… 5
§4. 集合和性質……………………………………………… 6
§5. 集合与集合之間的关系…………………………………10
§6. 用图解表示集合与集合之間的关系……………………14
§7. 逆定理……………………………………………………18
§8. 否定理……………………………………………………28
§9. 反証法……………………………………………………32
§10. 否定．"一切"及"不是一切" ……………………………39
§11. 必要和充分条件 …………………………………………41
§12. 点的軌迹 …………………………………………………43
§13. 可逆定律 …………………………………………………49
习題解答……………………………………………………53

# §1. 导　言

## 定理、公理和定义

在代数学及几何学中，我們总是要遇到一些被叫做定理的句子．这些句子有着极其不同的性質．例如"两个圓相切时，它們的切点在連心綫上"这个定理告訴我們，在两个圓的位置关系一定的条件下（在它們相切的条件下），三个点——两个圓心和一个切点——之間存在着怎样的位置关系．又如"矩形的两条对角綫相等"这个定理告訴我們，在矩形內存在着两条一定綫段等長的关系．在代数学中，我們知道，对于任意二数 $a$ 及 $b$，等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 总是正确的．这个定理，和代数学中許多其他定理一样，所叙述的是用一种顺序运算代替另一种顺序的运算的問題．

在初等数学特别是几何学中，我們一定会看到，它的一切定理都是从一些叫做公理的基本命题通过証明（論断或称为邏輯推理）依次导出的．公理是一种陈述（眞理），是不加証明而采用的．

現在引用欧几里得"几何原本"中所述的公理作为公理的例子①：

"我們公認：

（1）从任何一点向任何另一点都能作一直綫．

（2）每一直綫都可以无限延長．

① 前五个公理称为欧几里得公設．

(3)以任何中心及任意半徑都可作一圓.

(4)一切直角都相等.

(5)两直綫为另一直綫所截，如果截綫某側所成两个內同側角的和小于二直角，則两直綫必相交于該側.

(6)等于同量的量相等.

(7)等量加等量，它們的和仍相等.

(8)等量減等量，它們的差仍相等.

(9)等量的任何結合，其結果仍相等.

(10)全量大于它的諸分量."

人們常說，公理是"显然正确的". 讀者自然地会发生下列一些問題：公理的确是显然正确的嗎？为什么我們認为这种或那种陈述确是公理呢？但有关公理本質的問題，超出了这本小册子的范圍. 讀者只要理解初等数学課程中关于公理的一般概念，便能够讀这本書了.

除了定理和公理之外，大家在数学中还碰到一些叫做定义的句子. 定义陈敘了某一数学对象(例如圓、差、对数)的基本性質，这些性質使它与其他对象区别开来. 除去这些基本性質外，这一对象还具有其他性質，这些性質是从那些基本性質产生并且在定理中指明的.

例如对于圓，我們有一个清晰的視覺观念. 但是只根据这个观念，圓的性質是不能得到严格的科学研究的. 要研究圓，必須指出这种綫与其他許多綫有所区别的基本性質. 說明圓的这个基本性質的語句便叫做圓的定义. 我們知道，圓的定义是：圓是平面上一条封閉的綫(最好是說：点在平面上的軌迹，——关于这个概念，下文还要談到)，綫上一切点都与一定点等距离.

上面所述圓的定义(基于公理及其他对象的定义)使我們有可能明确圓的其他性質以及与圓有关的各种綫段的性質. 例如

在古代便用实驗方法相当精确地求出了圓周率(圓的周長和直徑之比). 有些地方認为这个比値等于 3.14,另一些地方認为它等于 3.16. 但要求得一个定律,以确定这个比到任何精确程度和研究这个比的性質,只有在以公理、定义和严密导出的結論(証明)的基础上建立几何学以后,才能办到.

## §2. 定　理

从研究各种数学对象(例如几何学中的綫、面、体;算术及代数学中的和、乘积、乘冪等)的性質,我們得到一些結論. 这些从公理和定义所导出的結論,常用叫做定理的語句来表达.

**在定理中必須明确指出:第一,某个对象是在什么条件下考慮的,第二,对于这个对象肯定些什么东西.** 例如定理"在一个三角形中等角对等边"討論的是三角形的角,条件是对着这些角的边相等;定理所肯定的是这种角相等. 有时要將对象与定理中所考慮的条件分离开来是相当困难的,**因为这些条件往往表示在对象的名称中.** 例如在上述的定理中,所研究的对象与据以考慮的条件还可以用另一种方式指出来的. 上面所說的对象是角,而且是在下述两个条件下考慮的: (1)它們是同一个三角形里的角;(2)它們是对着这个三角形的相等的边的角. 又如定理"菱形的两条对角綫互相垂直",这个例子可以更好地說明对象与条件这两个概念的相对性. 在这个定理中,所研究的对象是菱形的对角綫,但条件好象是沒有的. 实际上条件便存在于"菱形"这个名詞中:定理內所述的两条对角綫是在屬于菱形而不是屬于其他任何多边形的条件下考慮的. 为了很容易地分別出据以考慮对象的条件以及关于对象定理所肯定的結論,我們常將定理用"如果……,那末……"的形式写出来. 定理的前一部

分，从"如果"开始，**叫做定理的条件**；定理的后一部分，从"那末"开始，**叫做定理的結論**．定理的条件中指出了在何种条件下定理結論里的內容是正确的①．

"如果四边形的四条边都相等，那末它的两条对角綫互相垂直"．显然，这个定理的結論(四边形的两条对角綫互相垂直)**在**(但**不仅在**)这四边形四条边相等的条件下是正确的．

任何定理都可以用"如果……，那末……"形式的句子陈述出来．例如，定理"在一个三角形中等角对等边"可以写为："如果在三角形中有两边相等，那末这两条边所对的角也相等"．但是常常由于对象及据以考虑的条件概念的相对性，这种辞句可以用不同的方式表述出来．例如，定理"菱形的两条对角綫互相垂直"，就可以有下列几种說法：(1)"如果已知四边形是菱形，那末它的两条对角綫互相垂直"；(2)"如果已知平行四边形是菱形，那末它的两条对角綫互相垂直"；(3)"如果已知多边形是菱形，那末它的两条对角綫互相垂直"．

在下列习題中，指出条件、結論、定理所研究的对象及这些对象是在什么条件下考虑的．

**习題 1** 如果在三角形中，一个角是直角，那末其他两个角是銳角．

**习題 2** 在同一条弧上的圓周角都相等．

**习題 3** 在直角三角形中，斜边的平方等于两条直角边的平方的和．

**习題 4** 如果两个整数的乘积是奇数，那末它們的和是偶数．

**习題 5** 两个連續偶数的乘积可以被 8 整除．

**习題 6** 两个連續自然数的平方的和与差总是奇数，而这两个平方数的乘积則是能被 4 整除的偶数．

**习題 7** 三角形的任何一边都小于其他两边的和，而大于其他两边的差．

---

① 定理的結論有时在其他条件下或在已知条件只有一部分存在时，也可能是正确的．参閱本节末段及第 7 节．

## §3. 定理系統.
## 数学对象的研究

每个定理本身說明了所研究的数学对象或对象总合具有某些性質. 但在研究数学对象时, 重要的不仅是个別定理, 而且更重要的还有它們的总合——定理系統. 这个事实在几何学中特別明显. 几何定理系統告訴我們关于各种图形以及組成这些图形或者跟这种图形有某种关系的綫和面的性質. 例如我們首先研究三角形的角和边的某些关系, 三角形全等和不等的条件, 以及三角形中各綫段(分角綫、中綫等)的性質(例如相互的位置). 然后我們研究各种四边形, 再后研究圓及圓內外的各种綫段. 研究更复杂的图形是較难的問題①.

現在我們具体地談一談研究四边形的問題. 首先我們学习任意四边形的一般性質, 主要是它的各部分即边和角等之間的关系. 但这些性質是不多的(四边形諸內角的和是跟多边形諸內角的和一齐研究的), 于是通常从一种特殊形狀的四边形来着手研究, 这便是有一組对边平行的四边形——梯形. 这个图形是从下述定义提出的:"一組对边平行的四边形叫做梯形."这种四边形有一些特殊的性質: (1)連接梯形不平行二边中点的直綫(所謂梯形的中綫)平行于梯形的两底并且等于两底和的一半, (2)梯形的面积等于两底的和的一半与高的积.

其次, 將我們討論的范圍縮小, 选取两組对边互相平行的四边形——平行四边形来研究. 这种四边形有下列几种性質: 在平行四边形中, (1)对边相等, (2)对角相等, (3)两条对角綫互相

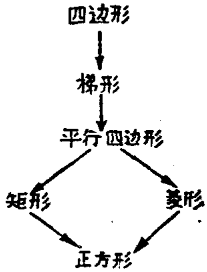
① 注意: 研究較复杂的图形归根結底是把关于这些复杂图形的問題轉变为关于簡單图形的問題.

平分，(4)平行四边形的面积等于底和高的积。

显然，平行四边形是梯形的特例，它具有梯形所具有的一切性質(請詳細指出来!)。

更进一步我們討論到平行四边形的特殊情形：矩形和菱形。矩形的两条对角綫相等，而且过矩形的四个頂点可以作一个外接圓。菱形的两条对角綫互相垂直，并且每一条平分菱形的一組頂角。除去这些特殊的性質外，矩形和菱形既都是平行四边形的一种，也就具有任意平行四边形所具有的一切性質。

矩形又有一种特殊情况——正方形。正方形不仅是矩形的一种，也是菱形的一种。因此正方形不但具有矩形的性質，也具有菱形的性質。




因此，研究四边形的步驟如附图所示。

**习題 8** 請說出你所知道的(1)矩形，(2)菱形，(3)正方形的一切性質。

**习題 9** 在一本几何教科書中說："一切平行四边形中只有菱形和正方形可以作內切圓"。这种說法是否正确?

由此可見，定理，特别是定理系統，是用来研究具有某些性質的对象总合的。数学上的对象总合通常叫做集合。

## §4. 集合和性質

現在我們詳細談一談集合的概念，集合概念在現代数学中占有很重要的地位。

如果对于任何一个对象能夠指出它是屬于这个集合或不屬

于这个集合①，那末这个集合就被給定了(或者說被确定了)。給定集合的最簡單方法是把它的一切对象一一列举，这些对象叫做該集合的元素。例如，我們采用的阿拉伯数碼的集合是由下列10个符号所組成的:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

其中找不到符号V,因此符号V不屬于阿拉伯数碼的集合。

又如俄文字母的集合是由下列字母表所組成的:

а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ъ, ы, ь, э, ю, я.

符号 $q$、?、= 在这个表中找不到；因此 $q$、?、= 是不屬于俄文字母的集合的。

现在我們討論內接于已知圓 $O$(半徑为 $r$)而且一个頂点为 $A_1$ 的正五边形的对角綫的集合。这个集合我們用 $D_5$ 表示。五边形其余的四个頂点用 $A_2$、$A_3$、$A_4$ 及 $A_5$ 表示(图 1)。集合 $D_5$ 是由下列五条綫段組成的:

$A_1A_3$, $A_2A_4$, $A_3A_5$,

$A_4A_1$, $A_5A_2$.

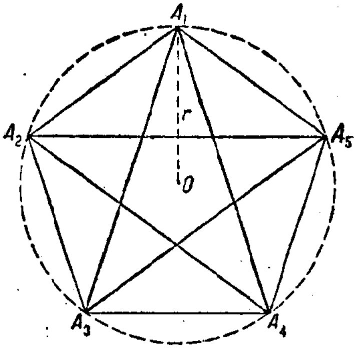


图 1

再討論內接于已知圓 $O$(半徑为 $r$)而且頂点为 $A_1$ 的正一百边形的对角綫的集合；以 $D_{100}$ 表示这个集合。在原則上集合 $D_{100}$ 与集合 $D_5$ 沒有什么不同之处。但組成集合 $D_{100}$ 的元素表不象組成集合 $D_5$ 的元素表那样簡單，因为集合 $D_{100}$ 有 4850 个元素。但我們是不是要把这張表列出来呢? 我們需要这样一張表，其目的是給定一个集合，也就是对于任意一个对象，我們能

① 这里我們說的只是在数学中考慮的集合。

够答出它是不是屬于这个集合的問題. 假定給你一个綫段，并問你这个綫段是否屬于集合 $D_{100}$. 你是否要在 4850 个元素所組成的表中去找寻这个綫段呢? 一定不是这样做的；对于集合 $D_{100}$ 的表是否存在，你甚至可以不管的. 你可以只看看所給綫段的两端点，如果所給綫段的两端是已知一百边形的两个不相鄰的頂点，那末你就会回答說：已給綫段屬于集合 $D_{100}$. 如果所給綫段两端点的任一个不是已知一百边形的頂点或两端点是已知一百边形的相鄰两頂点，那末你就会回答說：所給綫段不屬于集合 $D_{100}$.

因此，在上例中集合不是由它的元素表給定的，而是由这些元素所应具有的性質——多边形对角綫的性質給定的. 多边形的对角綫是一个綫段，具有下述性質：它們是連接多边形不相鄰的頂点的. 在五边形的例子中，我們利用对角綫的这个性質，把这个表也列出了. 我們也可以用同样的方法把集合 $D_{100}$ 的元素表列出来. 但在上述两个情况中集合 $D_5$ 和 $D_{100}$ 是由它們元素——多边形对角綫——的性質完全确定了的.

前面討論的一些集合的例子——阿拉伯数碼集合、俄文字母集合、五边形对角綫集合和一百边形对角綫集合都是有穷集合，虽然其中有些集合的元素数目是很多的. 在所有这些情形，从原理上說来，都可以列出所給集合的元素表. 但在数学中，我們所遇到的多半不是有穷集合，而是无穷集合. 例如，偶数集合、正方形集合和球集合等都是无穷集合. 显然，我們不能够把这些集合的所有元素列举出来，也不能列出这些集合的元素表. 这种由无穷多个元素組成的集合，即所謂无穷集合，通常是由它的元素的性質确定的：**如果指定了一个性質 $a$，屬于集合 $A$ 的一切元素都具有这种性質，而不屬于集合 $A$ 的对象，就不具有这种性質，那末集合 $A$ 便給定了（确定了）.**

下文中，將用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示集合的元素，而用希腊字母表示这些元素的性質. 用符号$\in$表示一个元素包含在某个集合中这个事实. 例如元素$a$包含在集合$A$中，用符号表示便是：$a\in A$（讀为$a$屬于$A$）或写为$A\ni a$（讀为集合$A$含有$a$）.

我們討論一下上述无穷集合的例子. 偶数集合$B$的元素具有被2整除的性質. 因而就有例如$1352\in B$. 正方形集合是由具有下述性質的四边形所組成的：其中任何一个四边形的四条边都是相等的，而且至少有一个內角为直角. 球集合是由封閉的面所組成的，其中每一个都具有这样的性質：該面上一切点都跟一个叫做球心的定点等距离.

确定上面举例的这些无穷集合（偶数集合、正方形集合、球集合）实質上就是把它們从其他更普遍的集合（整数集合、四边形集合、面集合）中区分出来. 这样把一些集合从其他更普遍的集合中区分出来是根据下述准则进行的：被区分出来的集合的元素应当具有某些特殊的性質（如被2整除、有等边和直角等），而这些性質不是更普遍的集合的每个元素都具有的. 讀者自然要問，这些更普遍的集合是怎样决定的，或者，怎样决定标志这些更普遍的集合的性質. 这个問題是很有趣的，但可惜已超出本書的討論范圍了.

再着重指出，“集合”和“性質”这两个概念是有密切联系的. 我們已經說过，性質，例如$\alpha$，确定具有这个性質的对象的集合$A$；在这里我們是假定集合$A$中包含了一切具有性質$\alpha$的对象. 但是相反的說法也是成立的：如果某个集合$A$已被确定了，那末“屬于集合$A$”这个性質也就被确定了. 例如阿拉伯数碼所具的性質就是屬于（或相似于）前面我們称为“阿拉伯数碼集合$Z$的元素”的十个符号之一.

如果我們能用某种方法确定整数集合，那末我們也就确定了“是整数”即“屬于整数集合”的性質。

但是，我們也不难想出一些性質，它們是任何一个对象都不具有的。例如，諸內角的和等于 450° 的四边形是不存在的。这种性質不能确定任何集合。但是为了数学的普遍性，对于这种情形，我們还是說，性質确定了集合，但这是一种特殊的集合——不含有一个元素的集合。这种**不含一个元素的集合**在数学上叫做**空集合**。如上例，便可以这样說：諸內角的和等于 450° 的四边形組成一个空集合。

## §5. 集合与集合之間的关系

集合与集合之間可以存在有各种关系。我們举出一些关系。

**包含**　**如果集合 $A$ 的每个元素也屬于集合 $B$，那末我們說，集合 $A$ 包含在集合 $B$ 之中。**这个关系我們用符号 $A\subset B$ 来表示。因此，**如果从 $a\in A$ 得到 $a\in B$**，那末 $A\subset B$。“集合 $A$ 包含于集合 $B$ 之中”这句話时常可以换一种說法：“**集合 $A$ 組成集合 $B$ 的一部分**”，“**集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集合**”。

**如果在集合 $B$ 內有元素 $b$ 不屬于集合 $A$，那末我們說，集合 $A$ 組成集合 $B$ 的眞正部分**。例如，矩形集合包含在平行四边形集合之中，而后者又包含在四边形集合之中。正方形集合既包含在矩形集合之中，也包含在菱形集合之中。能被 4 整除的数的集合組成偶数集合的眞正部分。我們將認为(根据定义)**空集合包含在任何一个集合之中**。

如果性質 $\alpha$ 确定集合 $A$(即集合 $A$ 的元素具有性質 $\alpha$，而具有性質 $\alpha$ 的一切对象都包含在集合 $A$ 之中)，性質 $\beta$ 确定集合 $B$，又 $A\subset B$，那末具有性質 $\alpha$ 的任意一个对象也必定具有性

質 $\beta$.

**如果具有性質 $\alpha$ 的任意一个对象也具有性質 $\beta$，那末我們說，性質 $\alpha$ 包含性質 $\beta$，写为：$\alpha \supset \beta$.** 例如四边形有三个角为直角这个性質包含在四边形两組对角相等这个性質之中. 能被 4 整除的数的性質包含在偶数的性質之中.

因此，集合 $A$ 与集合 $B$ 間的关系 $A \subset B$ 便对应于确定这两个集合的性質的 $\alpha$ 与 $\beta$ 之間的关系 $\alpha \supset \beta$.

**集合的和** **对象 $c$ 属于被叫做集合 $A$ 与集合 $B$ 的和(或連)的集合 $C$ 之中，如果 $c$ 是屬于集合 $A$ 或[①] 屬于集合 $B$，即当且仅当 $c \in A$ 或 $c \in B$ 时，$c \in C$；換言之，集合 $B$ 和集合 $A$ 相加意味着形成一个新集合 $C$，在集合 $C$ 中，既包含了集合 $A$ 的元素，也包含了集合 $B$ 中不屬于集合 $A$ 的一切元素.** 集合 $A$ 与集合 $B$ 的和記为 $A+B$[②]. 如果某一对象 $r$ 既屬于集合 $A$，也屬于集合 $B$，那末按上述定义，对象 $r$ 屬于(仅計算一次)集合 $A+B$. 由此得

$$A+A=A.$$

例如，异于零的实数集合 $C$ 是正数集合 $A$ 与負数集合 $B$ 的和. 任何一个实数可以被屬于集合 $C$ 的任何一个数来除. 能够被 2 或 3 整除的数的集合 $R$ 是能被 2 整除的数的集合 $P$ 与能被 3 整除的数的集合 $Q$ 的和. 在这两个集合的和中包含了数

---

① 这里对"或"(или)的意义需要說明一下. 对于"对象 $r$ 屬于集合 $A$ 或屬于集合 $B$"这句話可以有两种不同的解釋. 首先，我們可以这样理解：对象 $r$ 屬于且仅屬于两个集合中的一个，或是集合 $A$，或是集合 $B$，也就是說，对象 $r$ 不可以同时屬于两个集合. 但也可以这样理解：对象 $r$ 至少屬于两个集合中的一个，也就是說，并不除去对象 $r$ 既屬于集合 $A$ 也屬于集合 $B$ 的可能性. 在数学中，"或"是指第二个涵义，在这本小册子里，"或"所指的也只是第二种涵义. 如果要表示第一种涵义，則用"或者"(либо)来表示.

② 近来也常碰到用 $A \cup B$ 这样的写法来表示集合的和.

2、3、4、6、8、9、10、12、…；其中 6、12、…等数既屬于集合 $P$ 也屬于集合 $Q$，但在集合 $R$ 中它們只被計算一次。

集合 $A$ 的元素具有性質 $\alpha$，集合 $B$ 的元素具有性質 $\beta$，作为两集合的和的新集合的元素則具有性質 $\alpha$ 或性質 $\beta$。**具有性質 $\alpha$ 或性質 $\beta$ 的这种性質，我們叫做性質 $\alpha$ 与性質 $\beta$ 的积**，以符号 $\alpha\beta$ 来表示①。換言之，**对于对象 $r$，如果它具有性質 $\alpha$ 或性質 $\beta$，我們說它具有性質 $\alpha$ 与性質 $\beta$ 的积性質**。例如，异于零的数的集合，其元素具有是正数或是負数这两个性質的积的性質。上述集合 $R$ 的元素具有(1)是偶数，(2)能被 3 整除这两个性質的积性質。

因此，集合的和是跟决定这些集合的性質的积相对应的。

**集合的交** **对象 $c$ 屬于被叫做集合 $A$ 与集合 $B$ 的交（或积）的集合 $C$ 中，如果 $c$ 既屬于 $A$，也屬于 $B$；即当且仅当 $c\in A$ 且 $c\in B$ 时，$c\in C$；**換言之，**集合 $A$ 与集合 $B$ 的交的形成意味着形成一个集合 $C$，在集合 $C$ 中，包含了集合 $A$ 中屬于集合 $B$ 的一切元素**。集合 $A$ 与集合 $B$ 的交記为 $A\cdot B$ 或簡写为 $AB$②，与普通代数学上乘的写法相仿。按照集合的交的定义，可以知道

$$A\cdot A=A.$$

**例** 正方形集合是矩形集合和菱形集合的交。能被 6 整除的数的集合是能被 2 整除的数的集合和能被 3 整除的数的集合的交。

如果集合 $A$ 和集合 $B$ 沒有公共的元素，那末它們的交为空集合，即在这种情形下 $A\cdot B=0$。

如果集合 $A$ 的元素具有性質 $\alpha$，集合 $B$ 的元素具有性質 $\beta$，那末集合 $AB$ 的元素应当既具有性質 $\alpha$，也具有性質 $\beta$。**既具**

① 性質 $\alpha$ 及 $\beta$ 的积，在数理邏輯中也用 $\alpha\wedge\beta$ 的形式来表示。

② 近来也常碰到用 $A\cap B$ 这样的写法来表示集合的交。

**有性質 $\alpha$，又具有性質 $\beta$ 的这种性質，我們叫做性質 $\alpha$ 与性質 $\beta$ 的和，以符号 $\alpha+\beta$①来表示．**换言之，**对于对象 $r$，如果它既具有性質 $\alpha$，也具有性質 $\beta$，我們就說它具有性質 $\alpha+\beta$ 的和性質．**例如，被 6 整除的数具有被 2 整除与被 3 整除这两个性質的和性質．从梯形的定义可知，梯形是具有两种性質的和性質的对象，这二种性質是：(1)是四边形(换言之，屬于四边形集合)及(2)有一組平行的边．

**集合的差　如果集合 $B$ 的元素是集合 $M$ 中不屬于集合 $A$ 的元素，那末集合 $B$ 就被叫做集合 $M$ 与集合 $A$ 的差．**集合 $M$ 与集合 $A$ 的差以符号 $M-A$ 来表示．設集合 $A$ 的元素具有性質 $\alpha$，对于不具有性質 $\alpha$ 的对象，我們說它們具有性質 $\bar{\alpha}$ (讀做"非$\alpha$")．例如，如果性質 $\alpha$ 表示是偶数的性質，那末对于直綫和数 3 就可以說它們不是偶数，即具有性質 $\bar{\alpha}$ (不是偶数)．如果性質 $\mu$ 确定了集合 $M$，那末集合 $M$ 与集合 $A$ 的差 $M-A$ 具有和性質 $\mu+\bar{\alpha}$．把不具有性質 $\alpha$(具有性質 $\bar{\alpha}$)的对象的集合用符号 $\bar{A}$ 来表示．那末具有性質 $\mu+\bar{\alpha}$ 的差 $M-A$，便是集合 $M$ 与集合 $\bar{A}$ 的交 $M\bar{A}$．

**例**　无理数集合是实数集合与有理数②集合的差．由一个元素 0 所組成的集合是偶数集合与能够除尽偶数的諸数所組成的集合的差．相交直綫对的集合是在同一平面上的諸直綫对的集合与平行直綫对的集合的差．

**习题 10**　相交直綫对的集合是不是空間直綫对的集合与平行直綫对的集合的差？

---

① 性質 $\alpha$ 及 $\beta$ 的和，在数理邏輯中，也用 $\alpha\&\beta$ 或 $\alpha\vee\beta$ 的形式来表示．

② 整数及分数、正数及負数、包括零，組成有理数集合．