大学数学导学丛书

丛书主编 梅顺治 王艮远 杨永根

线性代数方法与应用

杨永根 王艮远 主编

问题答疑
范例分析
应用举例
数学实验

科学出版社

大学数学导学丛书

线性代数
方法与应用

杨永根　王良远　主编

孙晓梅　李宇光　副主编

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书为《大学数学导学丛书》之一，具有丛书的共同特点，即重视数学方法与应用，突出数学模型，设置数学实验。本书按照同济大学数学教研室主编的《线性代数》(第三版)的基本内容分章，全书共分为六章，每章由学习要求与解题要点、问题与答疑、解题范例、应用举例、数学实验、训练与自测等部分组成，书末附有训练题与自测题参考答案。

本书富有新意和创造性，可作为线性代数习题课教材和数学课程改革试验的补充教材，也可作为读者学习、复习和考研的辅导书和参考书。

大学数学导学丛书

线性代数·方法与应用

杨永根　王艮远　主编

孙晓梅　李宇光　副主编

责任编辑　冯贵层

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

武汉大学出版社印刷总厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

2001年8月第一版　开本：850×1168　1/32

2001年8月第一次印刷　印张：8 5/8

印数：1～10 000　字数：224 000

ISBN 7-03-003090-7/O·555

定价：12.00元

前　言

21 世纪，科学技术飞速发展，经济竞争日益激烈，对技术、人才提出了更高的要求. 数学的作用十分重要，这已成共识. 大学非理科专业数学课程教学不再仅仅是学习基础数学知识，为其他学科提供工具，更重要的是传授数学思想，培养学生的数学素养和创新意识，提高学生的数学思维能力和应用数学的能力.

在大学数学教育改革深入开展的同时，也必须看到，由于数学课程教学是一个连续系统，具有一定的稳定性，加上数学学科本身的特点，许多高等学校的基础数学课程如高等数学、线性代数、概率统计等教学仍使用较传统的教材. 这种形势促使我们编写一套既能配合以上三门基础数学课程教学，又能反映数学教学改革的教学用书——《大学数学导学丛书》(暂定为 3 本)，丛书主编为梅顺治、王艮远、杨永根. 这套丛书可以作为大学数学习题课教材，也可作为读者自学和复习的辅导书，还可以作为教师在课程教学改革试验中的补充教材. 总之，这套参考书是有一些新意的.

这套丛书具有以下特点：

(1) 重视数学思想方法的训练，注重演绎、归纳数学素质的训练，通过典型问题和例题的解答及相应习题的训练，培养学生数学思维的能力和运用数学知识的能力.

(2) 突出数学模型的思想，培养读者将实际问题转化为数学问题，并用数学知识加以解决的应用数学能力. 书中结合教学进程，适当地介绍了数学在实际问题中应用的一些例子，这些例子不仅可提高读者学数学的兴趣，而且对训练学生的数学建模能力有很大帮助.

(3) 设置了数学实验，注重数学课程教学与计算机及数学软件的应用相结合，指导读者在学数学的同时学习数学软件，且通过使用数学软件上机实验来帮助学生学好数学. 这样，既可提高读者

的兴趣，又可培养读者应用计算机解决问题的能力.

(4) 在例题和训练题的配置上，除基本题用于巩固基础知识和基本技能外，还安排了一部分提高题，选编了近几年考研的题，使学生扩大视野，熟练技巧，提高综合能力，因此本套丛书还适合于考研复习.

《线性代数·方法与应用》是这套《大学数学导学丛书》之一，它按照同济大学数学教研室主编的《线性代数》(第三版)的基本内容分章，共六章，每章由以下部分组成：

(1) 学习要求与解题要点. 是每一章的基本概念、理论、方法的归纳，在学习或复习中，起到提纲挈领的作用.

(2) 问题与答疑. 提出若干疑难问题并给予解答，帮助读者正确理解概念、理论与方法. 思考问题是一种很好的学习方法.

(3) 解题范例. 给出若干基本、典型、综合例题的解法. 有些例题解前有“分析”，解后有“注”，对这些内容，读者应足够重视. 模仿只是学习的初级阶段，重要的是提高独自解题的能力.

(4) 应用举例. 结合该章学习内容，给出一两例数学在实际问题中应用的例子.

(5) 数学实验. 给出本章若干问题的 Matlab 命令、程序及运行结果，供上机实习用.

(6) 训练与自测. 训练题分 A、B 两组，B 组为提高题. 自测题用于自我检测，及时了解自己的水平，利于明确努力的方向.

书末附有训练题、自测题的参考答案.

本书由杨永根、王艮远任主编，孙晓梅、李宇光任副主编，参加编写的还有杨乾尧、王文科、黄辉、易校尉. 本书凝聚了编者多年的教学实践经验和教学研究成果，希望本书的出版对数学教学及数学教材的改革发展能起到抛砖引玉的作用.

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免有不足与错误之处，恳请同行、专家、读者批评指正.

编者

2001 年 5 月

目　录

第一章　行　列　式

1.1　学习要求与解题要点

1.1.1　学习要求

1. 了解排列的概念，掌握排列的逆序数计算方法及对换与排列的奇偶性的关系.

2. 理解 n 阶行列式的定义.

3. 熟练掌握 n 阶行列式的性质及行列式的展开定理，学会运用行列式的有关概念、性质和定理进行行列式的计算和证明.

4. 掌握范德蒙行列式的结论，并能应用其解决一些简单的行列式计算问题.

5. 学会利用克莱姆法则解决一些简单的线性方程组的求解问题.

本章重点是行列式的计算和行列式的证明.

1.1.2　解题要点

计算（证明）行列式的基本思路归纳如下：

1. 利用行列式的性质，或利用行列式性质将行列式化为上（下）三角形行列式来计算（或证明）.

2. 利用行列式展开定理，将行列式化为较低阶的行列式，然后按 1 进行计算（或证明）.

3. 利用范德蒙行列式的结论进行计算（或证明）.

4. 利用递推法进行计算（或证明）. 利用行列式展开定理对高阶的数字行列式可以逐次降阶直至计算出结果，对一些文字行列式往往能得到递推公式，进而得出结果.

5. 利用归纳法对行列式进行计算（或证明）.

1.2 问题与答疑

1.2.1 *为什么四阶及四阶以上的行列式的展开式不满足对角线法则?*

答 这是因为,四阶及四阶以上的行列式如果沿用"对角线法则"来定义,它将失去二阶和三阶行列式的展开式中"每一项都由取自不同行不同列的元素乘积"这一重要特征,比如:在下面的四阶行列式中,

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

乘积$(-1)a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$满足取自不同行不同列,但$a_{14}$、$a_{23}$、$a_{31}$及$a_{42}$却不在类似于三阶行列式展开形式的对角线上,也可以说,n阶行列式的定义对于二、三阶行列式而言,恰好符合对角线法则,而对角线法则却不适用四阶及四阶以上的行列式.

1.2.2 *在什么情况下才用定义计算行列式?*

答 从理论上讲,任何一个行列式都可用定义来计算,但应该注意的是,当一个行列式的阶数较高时,按定义计算行列式的运算量大得惊人,例如,用定义来计算一个20阶的行列式,需要$19\times 20!$次的乘法运算,即使一台每秒运算亿万次的电脑,也需一千年才行!因此,对于较高阶的行列式一般都是利用行列式的性质将其化为易于计算的行列式来计算,只有当行列式的结构十分简单或阶数不超过三阶时,才考虑用定义来计算.

1.2.3 *两个行列式相等,则它们的阶一定相等,这话对吗?*

答 否.这是因为,两个行列式相等指的是行列式的值相等,

这与行列式的阶无关.

1.3 解题范例

行列式的计算与证明方法较多,技巧性较强,要熟练掌握这些方法与技巧,首先必须熟练掌握行列式的定义、性质及展开定理,因为不论采用什么方法计算或证明行列式,其实质都是以行列式定义、性质及展开定理等为依据,对行列式实施简化、变形,从而使计算变得容易;其次,必须具有一定的洞察力,能够善于找出行列式的元素的排列规律和特点,从而采用相对而言比较恰当的方法;再次,必须具有综合能力,这是因为,一个行列式的计算(或证明)问题有时候很难说得清楚采用了哪种方法,在计算(或证明)的过程中各种方法往往交互使用,加之各个计算者观察、思维方式的差异,使得同一个问题的解决过程千差万别. 本节我们从方法的角度出发,将几种常见的计算(证明)方法作如下归纳分类,并配以范例加以说明.

1.3.1 直接利用行列式的性质计算(或证明)

例 1.1 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_1+2 & \cdots & a_1+n \\ a_2+1 & a_2+2 & \cdots & a_2+n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+1 & a_n+2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix} \quad (n>2)$$

解法一 利用行列式性质把第一列拆开

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+2 & \cdots & a_1+n \\ a_2 & a_2+2 & \cdots & a_2+n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n+2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & a_1+2 & \cdots & a_1+n \\ 1 & a_2+2 & \cdots & a_2+n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n+2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 2 & \cdots & n \\ a_2 & 2 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=0+0=0$$

解法二 注意到行列式任意两列对应元素之差均相等，故

$$D_n \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & 2 & \cdots & a_1+n \\ a_2+1 & 1 & 2 & \cdots & a_2+n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+1 & 1 & 2 & \cdots & a_n+n \end{vmatrix} = 0$$

1.3.2 将行列式化为三角形行列式进行计算

例 1.2 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_4 \xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2-2r_1\\ r_3-3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & -5 & -5 \\ 0 & 16 & -10 & -11 \\ 0 & 21 & -9 & -11 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\div 5} 5\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 16 & -10 & -11 \\ 0 & 21 & -9 & -11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_4} -5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -11 & -10 & 16 \\ 0 & -11 & -9 & 21 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-11r_2]{r_3-11r_2}-5\begin{vmatrix}1&3&3&-5\\0&-1&-1&2\\0&0&1&-6\\0&0&2&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-2r_3}-5\begin{vmatrix}1&3&3&-5\\0&-1&-1&2\\0&0&1&-6\\0&0&0&11\end{vmatrix}=55$$

本例中我们的思路是利用行列式的性质，将其化为上三角形行列式(一般情况下均化为上三角形行列式)，其方法技巧是:利用第一行第一列位置上的元素将第一列除第一个元素外全化为零；然后利用第二行第二列位置上的元素将第二列除两个元素外全化为零；以此类推，即可将原行列式化为上三角形行列式.值得注意的是，应尽量将数值较小的元素(例如1或-1等)调换到主对角线位置上，以便使行列式的化简过程变得容易.

例 1.3 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$$

解 考虑到第一行第一列位置上元素为3，若利用它要将第一列中的其余元素化为零，显然比较繁琐(会出现分数，这种情况应尽量避免)，故将第一列与第二列对换.

$$D_4\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\1&-5&3&-4\\0&2&1&-1\\-5&1&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & -8 & 4 & -6\\0 & 16 & -2 & 7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & 8 & -10\\0 & 0 & -10 & 15\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4 \leftrightarrow r_5]{r_4 \div 5}-5\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & -2 & 3\\0 & 0 & 8 & -10\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+4r_3}-5\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & -2 & 3\\0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

$$=(-5)\times(-8)=40$$

例 1.4 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix}1823 & 823 & 23 & 3\\1549 & 549 & 49 & 9\\1667 & 667 & 67 & 7\\1986 & 986 & 86 & 6\end{vmatrix}$$

解 所要求解的行列式每行元素具有相同的规律，首先利用行列式的性质将其元素数值化小，然后再把行列式化为三角形行列式.

$$D_4\xlongequal[c_3-c_4]{\substack{c_1-c_2\\c_2-c_3}}\begin{vmatrix}1000 & 800 & 20 & 3\\1000 & 500 & 40 & 9\\1000 & 600 & 60 & 7\\1000 & 900 & 80 & 6\end{vmatrix}=10^6\begin{vmatrix}1 & 8 & 2 & 3\\1 & 5 & 4 & 9\\1 & 6 & 6 & 7\\1 & 9 & 8 & 6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}10^6\begin{vmatrix}1 & 8 & 2 & 3\\0 & -3 & 2 & 6\\0 & -2 & 4 & 4\\0 & 1 & 6 & 3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4}-10^6\begin{vmatrix}1 & 8 & 2 & 3\\0 & 1 & 6 & 3\\0 & -2 & 4 & 4\\0 & -3 & 2 & 6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+2r_2} -10^6\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 16 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-\frac{5}{4}r_3} -10^6\begin{vmatrix} 1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 16 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 10/4 \end{vmatrix}$$

$$=-4\times 10^7$$

例 1.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & 2a+b+c & b \\ c & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$

解 注意到行列式的每行元素之和均为 $2(a+b+c)$，故将第 2、3 列都加到第一列上，然后提出公因子.

$$D\xlongequal{c_1+c_2+c_3}\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & 2a+b+c & b \\ 2(a+b+c) & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$=\!=2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & 2a+b+c & b \\ 1 & a & a+2b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$=2(a+b+c)^3$$

例 1.6 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

解 本例中行列式特点是:每一行(列)元素之和都等于同一个数. 因此考虑把第 2、3、4 行全部加到第一行上,然后提出公因子,从而使第一行元素均变为 1,再利用行列式性质设法化为三角行列式计算则较为方便.

$$D_4 \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \times 4^3 = 512$$

例 1.7 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

解 D_n 中各行(列)元素之和相等,仿上例.

$$D_n \xlongequal{r_1+\sum_{i=2}^{n} r_i} \begin{vmatrix} b+(n-1)a & b+(n-1)a & \cdots & b+(n-1)a \\ a & b & \cdots & a \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$= [b+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b & \cdots & a \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-ar_1}[b+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\0 & b-a & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & \cdots & b-a\end{vmatrix}$$

$$=[b+(n-1)a](b-a)^{n-1}$$

例 1.8 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

解 D_n 中每行元素之和相等,仿例 1.5,将所有列加到第一列,然后提取公因子.

$$D_n\xlongequal{c_1+\sum\limits_{i=2}^{n}c_i}\begin{vmatrix}1+\sum a_i & a_2 & \cdots & a_n\\1+\sum a_i & 1+a_2 & \cdots & a_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\1+\sum a_i & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=(1+\sum a_i)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-a_ic_1}(1+\sum a_i)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\1 & 1 & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\1 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

例 1.9 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解 行列式 D_4 除第一列元素外，每个元素都是左邻元素与它上方相邻元素之和，故可考虑从第四行开始，每一行都减去前一行，使原行列式简化.

$$D_4 \xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

1.3.3 利用降阶法计算行列式

在较高阶行列式的计算过程中，如果行列式中某一行(或某一列)中零元素较多，或者可以通过采用行列式的性质使某一行(或某一列)的大多数元素化为零，则可根据展开定理，将行列式按该行(列)展开，从而使较高阶的行列式计算问题转化为几个较低阶的行列式计算问题，反复使用多次，直到将原行列式化为易于计算出的较低阶的行列式，这种计算行列式的方法称为降阶法.