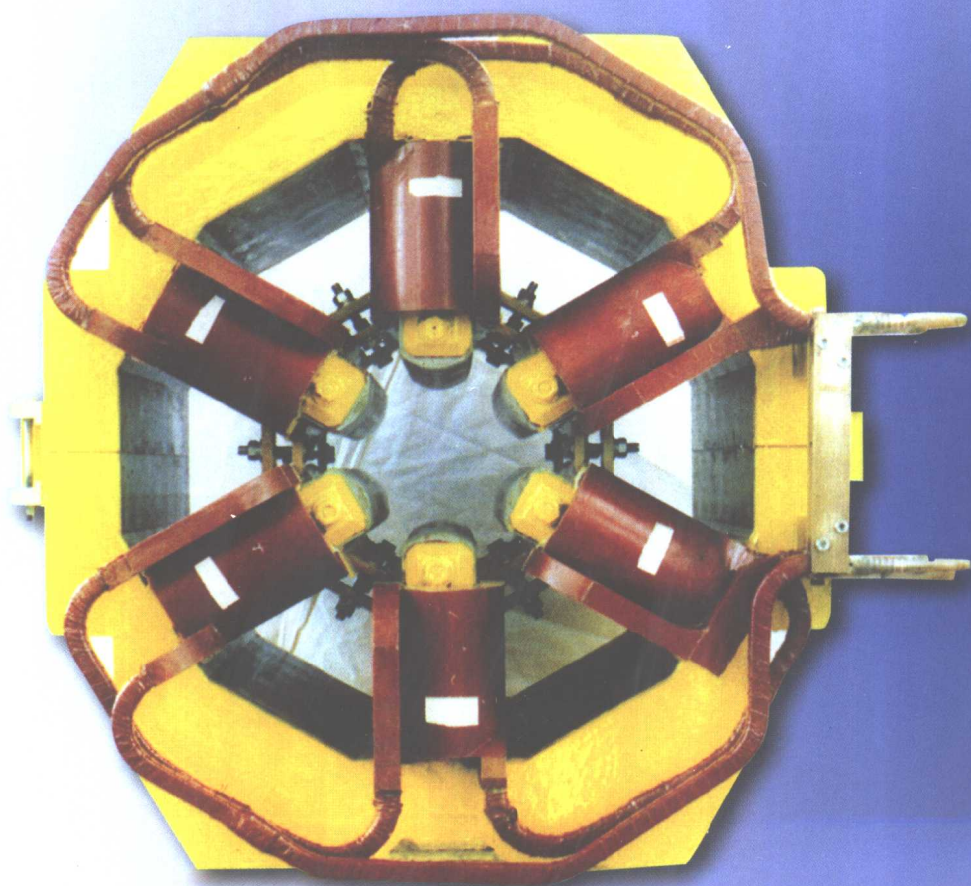




李泉凤 编著

电磁场数值计算 与电磁铁设计



清华大学出版社

电磁场数值计算与电磁铁设计

李泉凤 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书通俗地论述了电磁场数值分析中最常用的几种数值计算方法,介绍了常规磁铁设计的原则与步骤,给出了设计磁铁所需要用的公式与图表,可供设计者选用。

全书内容包括有限差分法、有限元法、积分方程法、恒定磁场的多极矩分析、常规磁铁的设计方法及工程计算,并介绍了国内外通用的 POISSON/SUPERFISH 程序及近代发展的 MAFIA 程序。

本书适于作高等院校核技术及其应用学科以及有关的电类专业本科生的教学用书,也可供从事电磁场研究和电磁铁设计的教师和科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场数值计算与电磁铁设计/李泉凤编著. —北京:清华大学出版社,2002
ISBN 7-302-05573-4

I. 电… II. 李… III. ①电磁场-数值计算 ②电磁铁-设计 IV. ①O441.4
②TM574.02

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 041255 号

出 版 者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

责任编辑:陈国新

印 刷 者:清华大学印刷厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:787×1092 1/16 印张:13 ~~字数:300千字~~

版 次:2002 年 10 月第 1 版 2002 年 10 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-05573-4/TN·12 ~~7-302-05573-4~~

印 数:0001~3000

定 价:20.00 元

前 言

本书是为核技术及其应用学科,特别是加速器专业的本科生编写的教材。本书分上、下两篇,内容分别为电磁场数值计算和电磁铁设计,这两部分内容既有联系又有一定的独立性。上篇介绍电磁场数值计算,为设计电磁铁进行场的计算与分析做理论基础准备,这部分通俗地介绍了有限差分法、有限元法、积分方程法等常用的电磁场数值计算方法,但未列入三维场及边界元法等复杂的电磁场数值计算内容;下篇介绍了恒定磁场多极矩分析,磁铁设计的原则、步骤与方法,并给出了电磁铁设计所需用的公式与图表,可供设计者参考。本书力求既与基础课内容相衔接,又能反映现代电磁场设计中应用的方法,并在书中备有思考与练习题及设计的要求指标,使学生在学习中既能综合应用各学科知识,又注意理论联系实际,进行电磁场元件设计与电磁场计算。书中简要介绍了国内外通用的 POISSON/SUPERFISH 程序与近代发展的 MAFIA 程序。

对在其他学科中从事电磁场计算和设计的人员和学生,本书也同样可作为参考书学习与使用。

本书上篇电磁场数值计算部分,由原子能科学研究院谢羲先生进行了审阅;下篇电磁铁设计部分,由中科院高能研究所尹兆升研究员进行了审阅。在大纲制定过程中,清华大学林郁正教授、北京大学方家训教授、原子能科学研究院马有伍研究员等专家给予了热情支持,并提出了不少宝贵意见,在此一并表示感谢。

由于本书作者学识有限,书中难免有不当之处,敬请读者批评指正。

作 者

2001 年 10 月于清华园

目 录

绪论	1
0.1 加速器中的电磁场计算问题	1
0.2 加速器电磁场计算方法发展概况	3
0.3 本书的安排	5
参考文献	6

上篇 电磁场数值计算

第1章 电磁场的基本理论	7
1.1 电磁场的基本定律和基本方程	7
1.2 标量位及其微分方程	10
1.3 矢量磁位	12
1.4 波动方程	16
1.5 边界条件与边值关系	17
练习题与思考题	21
参考文献	21
第2章 有限差分法	22
2.1 有限差分法基本概念	22
2.2 平行平面场中拉普拉斯方程和泊松方程的差分格式	23
2.3 轴对称场中拉普拉斯方程和泊松方程的差分格式	25
2.4 边界条件与边值关系的离散化	28
2.5 差分方程求解实例	33
2.6 准泊松方程的差分离散格式	36
2.7 非线性代数方程组的解法	40
2.8 场强与电磁积分量的计算	42
2.9 时变电磁场的差分格式	43
练习题与思考题	51
参考文献	53
第3章 有限元法基础	54
3.1 变分法基本概念	54

3.2	泛函的离散化与线性插值函数	60
3.3	平行平面场中拉普拉斯方程与泊松方程的有限元方程组	68
3.4	轴对称场中泊松方程的有限元方程组	77
3.5	定态时变场的有限元分析	81
3.6	有限元方程组的求解	88
3.7	有限元法计算实例	92
3.8	有限元素的自动剖分	98
3.9	现代通用程序介绍	109
	练习题与思考题	120
	参考文献	121
第4章	积分方程法	123
4.1	电流场量的积分方程	123
4.2	积分方程法的物理概念和基本公式	128
4.3	平行平面场中积分方程法计算恒定磁场公式	130
4.4	轴对称场中积分方程法计算恒定磁场公式	135
4.5	轴对称静电场计算的电荷密度法	141
4.6	积分方程法与微分方程法的比较	145
	练习题与思考题	147
	参考文献	148
下篇 电磁铁设计		
第5章	磁场多极矩分析	149
5.1	二维恒定磁场的多极矩分析	149
5.2	超导磁铁多极磁场的产生	156
	练习题与思考题	159
	参考文献	159
第6章	电磁铁设计	160
6.1	电磁铁设计的一般原则及要求	160
6.2	回旋加速器电磁铁设计	164
6.3	二极电磁铁设计	173
6.4	四极电磁铁设计	184
6.5	六极电磁铁设计	190
	练习题与思考题	192
	参考文献	193

附录	194
附录 1 常用的矢量公式和积分定理	194
附录 2 $\iint_{\Delta} N_i^{\alpha} N_j^{\beta} N_m^{\gamma} dx dy = 2 \Delta \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!}$ 公式推导	195
附录 3 磁化曲线	196
附录 4 磁场计算输入数据格式	199

绪 论

0.1 加速器中的电磁场计算问题

1. 电磁场在加速器中的应用及其重要性

加速器的建造与很多科学技术有关,例如真空技术、电磁场技术、电工和无线电技术、自动控制和计算机等。电磁场计算与设计、磁体的建造是加速器整机装置中应用的主要技术之一。

在加速器中所建立起来的不同的电磁场是用来加速和控制束流运动方向,并利用磁场来聚焦和偏转带电粒子束,控制束流在预定的轨道上运动。

下面列举几种加速器应用电磁场的状况及某些加速器磁铁的数据,便可清楚地说明电磁场计算、磁铁技术在加速器中的作用及特点。

(1) 回旋加速器电磁铁

在 20 世纪 30 年代,不少国家都建立了经典型的回旋加速器,这种加速器是把谐振加速方法和用磁场束缚带电粒子作回旋运动结合起来,将带电粒子加速到一定能量后引出。其中一台回旋加速器的电磁铁的磁极直径约 1.5m,磁铁质量约为几百吨,磁感应强度约为 15kGs ($1\text{Gs} = 10^{-4}\text{T}$)。我国 1958 年建造了两台经典型回旋加速器,其中一台的磁铁磁极直径为 1.2m,磁铁质量约 125t,磁铁励磁功率为 70kW;另一台磁铁磁极直径为 1.5m,磁铁质量约 225t,磁铁励磁功率是 275kW。

(2) 同步加速器环行轨道上的电磁铁

20 世纪 50 年代以来,为了克服回旋加速器中磁铁过分巨大的困难,发展了同步加速器。在这种加速器中,粒子的轨道不再是螺旋线形,而是接近于环形,磁场分布在轨道上控制束流在环形轨道上运动,因此,只需在轨道上放置弯转磁铁和聚焦磁铁。这样就大幅度地降低了磁铁系统的质量、规模,从而使高能加速器总体造价降低。

在同步加速器中,粒子在轨道上受到电场加速,速度和能量都不断增加。为了保持粒子不逸出轨道,必须使磁场随粒子能量的增加而增强,并且两者的增加要严格一致,这就要求磁场变化和粒子的加速准确同步,因而需要采用脉冲同步供电形式。

为了便于比较,举两台加速器的实例。一台是在联合原子核研究所建造的稳相加速器,磁铁磁极直径 6m,磁铁质量约 7200t,中心磁场强度为 16.8kGs,磁极间隙为 60cm,励磁功率为 1000kW,加速质子的最高能量为 680MeV,平均流强为 0.3 μA ;另一台是英国哈威尔质子同步加速器,轨道半径为 18.7m,磁铁质量为 7000t,磁场强度为 14kGs,加速质子能量达 7GeV。两台加速器的磁铁质量基本相同,同步加速器的能量提高了一个数量级。

(3) 强聚焦大型轨道加速器用的电磁铁

用强聚焦加速器原理设计的电磁铁,大幅度地改进了磁场的聚焦性能,使粒子的束截面减小了一两个数量级,这样,真空室和磁铁截面积都可以相应缩小,环行磁铁单位长度上磁铁的质量大幅度降低,减小了励磁功率,使得建造能量更高的同步加速器在实际上成为可能。以 20 世纪 70 年代初期在美国费米实验室建成的 500GeV 强聚焦质子同步加速器为例,其磁铁质量为 9000t,峰值励磁功率为 85MW,真空室截面积只有 12.7cm × 5.2cm。而一台 10GeV 的弱聚焦同步加速器,磁铁质量达 36000t,峰值励磁功率为 140MW,真空室截面积达 150cm × 40cm。显然,强聚焦的加速器能量增大 50 倍,磁铁质量却减少到 $\frac{1}{4}$,励磁功率减少约一半,真空室截面积缩小尤为突出,甚至减小到 $\frac{1}{95}$,这就清楚地显示出强聚焦加速器的优点,也因此使建造体系远远高于弱聚焦同步加速器的高能强聚焦同步加速器成为可能。近代发展起来的高能粒子束储存环、对撞机与同步辐射光源,都是采用强聚焦磁铁系统。我国中科院高能物理研究所正负电子对撞机,能量为 2.8GeV,储存环中有 40 块主弯转磁铁,60 块聚焦磁铁。

(4) 同步加速器上的超导磁体

应用超导电磁铁进一步提高聚焦磁场的磁感应强度是近年来发展的一项新技术。超导磁体磁感应强度可以提高到几万高斯,这样磁体质量和尺寸就可大幅度减小,这是当今世界磁铁技术改进的重要方向。世界上第一台采用超导磁体的高能质子同步加速器和正负质子对撞机是美国 TeV 加速器 Tevatron,它共有二极磁体 774 块,四极磁体 216 块,校正磁体 216 块,超导材料采用铌钛丝,直径 8 μ m,工作温度 46K。日本高能物理研究所 (KEK)、西德 DESY 实验室、西欧中心 CERN 都已建成或正在研制超导磁体的对撞机。

(5) 电子感应加速器上的电磁铁

在电子感应加速器中应用的电磁铁产生的交变的电磁场必须要满足两个条件,第一是能提供控制电子在环行轨道上运动的磁场,第二是产生加速电子的电动势。

(6) 直线加速器中的高频电磁场

直线加速器是目前应用最广泛的一种加速器,它采用在微波腔中建立起来的高频电磁场对带电粒子进行加速和聚束。

另外,电磁场在其他学科中也得到广泛应用:在核物理实验中的重要设备如气泡室、火花室、能谱仪都用到强磁场;在可控热核反应研究中,大型脉冲强磁场是约束高温等离子体十分重要的工具;在低温物理研究中,电磁铁也是很有用的实验设备。在近代物理许多重要领域中,强磁场应用也十分广泛。在电机工程中,磁场应用及研究也占有重要地位,例如磁流体发电机。因此,进行磁场技术、磁场计算的学习与研究具有很重要的意义。

上述各种磁铁及高频微波腔所起的作用均是通过产生具有一定精度、一定的时空分布特性的电磁场来实现的,即根据要求,进行粒子动力学计算,对电磁场分布提出指标,设计加工电磁元件,使之产生规定的场分布,实现粒子运动所需要的电磁场。

2. 电磁场分类

可以从不同的角度对电磁场分类:从时间特性上可以分为恒定场和时变场,高压型加速器中的电场、电子回旋加速器中控制电子运动的磁场等均为恒定场,但经常见到的是时

变场。从频率变化范围看,有从工频到超高频的场,例如,电子感应加速器中的电磁场是50Hz 电源供电,在直线加速器高频腔中建立起的高频电磁场一般工作在3000MHz。从场的空间分布特性上看,形状、大小不一的电磁元件形成的场,有轴对称、平面对称等。从电磁场的媒质上看,有些媒质的特性是线性的,有些则只在一定条件下是线性的,一般是非线性的。

归纳起来,加速器中的电磁场计算问题是时变场、三维场和非线性场的计算问题,其中包括恒定的电场和磁场、二维场和线性场。

从作为场计算理论基础的电磁场方程可知,时变场与恒定场的差别只是多了时变项,时变场的计算要比恒定场复杂,但恒定场计算方法是时变场计算的基础,特别是有些慢变化的场在一定条件下可以简化为恒定场,这种简化使计算易于实现,而且其解满足实际需要的计算精度,所以恒定场计算方法是电磁场计算方法中的重点内容。

三维场的计算是复杂的,为了满足必要的计算精度,三维问题的计算量将急剧增加,舍入误差的影响加大,因此,在可能条件下,应尽量把问题简化为二维问题计算。从一般原理上分析,许多计算二维场的方法可以用来求解三维场,但实际中要考虑三维场带来的新问题,包括理论和技巧上的问题,所以本书在讨论二维场的方法之后,还讨论了某些求解三维场的其他方法。

铁磁物质在磁场中具有不可忽视的非线性,所以本书既讨论线性媒质中的场分布计算,又讨论非线性媒质中的场分布的计算。

0.2 加速器电磁场计算方法发展概况

1831年法拉第发现电磁感应现象,1856年麦克斯韦从数学上以积分方程和微分方程的形式描述了电磁基本理论,更深刻而简练地描述了电、磁之间的关系,奠定了电磁理论基础,为其应用和发展开辟了道路。在其后的100多年中,人们以这些方程为指导,推导出不少其他的公式和近似关系,并以此从事电磁的工程设计和理论分析计算工作。电磁理论在加速器中的应用是在20世纪30年代开始发展起来的。

20世纪60年代以前,在加速器和谱仪等电磁元件的设计和场分布的计算中,广泛采用的方法主要有以下几种:

(1) 磁路法,在有铁心的电磁元件设计中,由于磁铁的磁阻小,在小气隙的情况下,结构设计极其方便,如在早期经典回旋加速器电磁铁的设计及各种磁铁元件的设计中曾广泛使用磁路法,其主要缺点是不能给出准确的场分布,故必须同时用其他方法,以决定如何给出必要的好场区的磁极尺寸及励磁参数。

(2) 数学模拟法,根据描述各种场方程的相似性,常常用电解槽、电解纸模拟某些电场或磁场分布,这种模拟法称为数学模拟,方法简单,但精度有限。

(3) 物理模拟法,由于实际电磁元件结构复杂,其他方法难以确定其场分布,常常要按实际元件尺寸或按比例制成模型进行实测,以确定设计全尺寸参数,由此方法所得结构比较接近实际,这种方法称物理模拟,其缺点是需要较多的资金和加工周期。

(4) 解析法和近似解析法,包括分离变量法、镜像法、有效等位面法、均匀磁化法、保角变换法等,其中保角变换法与镜像法在计算高压静电场中曾被广泛应用,但它们并不是普遍通用的场分布计算法。有效等位面法是把铁磁表面(或导体表面)做某些修正作为等位面,以它为基础算出极间场的分布。均匀磁化法是认为铁磁体在外场作用下被均匀磁化,然后计算极间场分布。这些方法对某些特定情况下的电磁场分布可以计算出满足要求的结构,但当实际情况与限定条件相差较大时,其结果将差得很远。

人们曾经用上述方法设计了许多规模宏大、质量优良的加速器系统中的电磁元件,但在电磁铁制成后,经常需要按实测值用垫补的方法使场分布符合设计要求。人们不断地探求用新的理论和技术得到精度满足设计要求的场的计算方法,这就是 20 世纪 60 年代后,随着计算机技术及其应用的发展而被广泛采用的数值计算法。下面介绍几种数值计算方法。

有限差分法(finite difference method)是最早被应用的电磁场计算方法之一,其基本原理早在计算机出现以前就已提出,只是在高速大容量电子计算机问世后,有限差分法才成为计算加速器电磁场的实际有效的方法。1964 年, Winslow 采用矢量位 A 以有限差分法离散泊松(Poisson)方程,解二维非线性磁场, Colonias 和 Dorst 用该程序设计了 184 英寸(1 英寸 = 25.4mm)同步加速器磁铁,接着在欧美出现了许多用有限差分法解二维静磁场的程序,如 TRIM, FORGY, POISSON, LINDA 和 MARE 等。

1966 年由 K. S. Yee 提出了时域有限差分(finite-difference time-domain, FDTD)法,直接用有限差分式代替麦克斯韦时域旋度方程中的微分式,得到关于场分量的有限差分式,用具有相同电参量的空间网格去模拟被研究体,选取合适的场初值和计算空间的边界条件,可以得到包括时间变量的麦克斯韦方程的四维数值解。因此,时域有限差分法不仅可用于瞬态电磁场的分析和计算,而且可用于求解稳态场问题。它不仅在电磁散射、电磁兼容预测、生物电磁学中得到卓有成效的应用,而且在天线、微波技术、光电子学的应用中也日益受到重视。

有限元法(finite element method)首先由 McGill 大学的 Silvester 和 Chari 在 20 世纪 70 年代用来求解满足麦克斯韦方程的电磁场。由于计算机速度的提高,内存的加大,为电磁场数值计算提供了良好的物质条件。在西欧以有限元法计算二维静磁场的 FATIMA 程序成功地用于西欧中心(CERN)几台加速器磁铁的设计,这是电磁场计算的重大发展之一。与此同时,原来从事有效等磁位面法和均匀磁化法的一些学者吸取了微分方程中离散的概念,将源区进行离散,发展了积分方程法。在有些情况下,积分方程法较微分方程法更为方便和有效,具有代表性的程序有 GFUN 和 BIM 程序。

边界元法(boundary element method)是近年来在积分方程和加权余数法的基础上发展起来的一种数值计算方法。它的基本思想是将一个高维问题降低一维,化作低维问题,即在原来求解区域的边界上来处理,这样不仅计算工作量可以减少,而且由于离散误差仅限于边界元,大大提高了计算精度。

加速器及大型谱仪中各类电磁场的计算及设计、电力工业中大电机的设计、近代物理实验设备的研究,促使许多从事电磁场计算的科学技术人员进一步研究更有效的电磁场计算方法,特别是三维场的计算方法,它在加速器磁元件设计中也是十分重要的。DE3D

就是我国原子能科学研究院编制的计算三维电磁场问题的软件包。国际上在这方面的应用已相当成熟,已经有一批商业化软件被应用于不同的电磁计算中,如对核磁共振成像系统磁体的三维计算能满足千分之一精度要求。

近 20 年来遍及世界范围应用的 MAFIA 程序是一个多功能的 EM-CAD 软件包,用于模拟静电磁场到高频场的二维及三维问题,解决现代工业、实验研究、近代物理等领域所遇到的各种电磁场问题。MAFIA 程序基于有限积分技术(finite integration technique method, FIT method),坚实的理论基础使得计算能够得到最好的精度和可靠性,在这个领域中,它是最现代和最完善的软件之一。

随着微波集成电路技术的迅速发展,直线法和谱域法成为分析微波集成电路的两大主要方法。

网络场模型法也是一种新的数值计算方法,其理论基础是网络拓扑学。计算场问题时直接离散模型深刻地体现了计算“场”与“路”两种分析方法的结合和两种理论统一,可以认为是电工理论发展的必然。

数值计算中的共同问题是对所得到的方程组求解。从电磁场理论上讲,在确定的条件下,场的分布是惟一的,但是用不同的方法求解代数方程组得到的收敛解及其求解的速度相差很大,因而寻找有效的求解方程也是当前重点研究的课题。

可以看出,电磁场的计算方法随着科学技术和电子计算机的进步在不断地发展。

应该指出,目前在场的计算中都是以求解正向问题为主,即从已知边界条件求场分布。实际上要求求解的多是反向问题,即按粒子动力学计算要求的场的分布,确定场的边界(如场源和媒质的分布等)。但从反向问题确定场是尚在研究的问题,在实际设计中常借助其他环节,以试凑法计算正向问题,最后求出满足要求的场的设计。

0.3 本书的安排

电磁场数值计算作为现代化的工具,在各个领域研究电磁场问题中得到了广泛应用,在不同学科,特别是在电机电磁场的研究方面已有很多版本的电磁场数值计算的专著或教科书。本书着眼于加速器常规磁铁设计及电磁场问题研究中进行电磁场数值计算所需要的基本知识,在上篇重点介绍了恒定电磁场的问题,同时也介绍了时变场在波导、谐振腔中的应用;电磁场的数值计算方法主要介绍了常用的有限差分法、有限元法及积分方程法等,为进行电磁铁设计和应用现代通用电磁场程序打下基础。本书下篇介绍了恒定磁场的多极矩分析及经典回旋加速器电磁铁、常规二极磁铁、四极磁铁等电磁元件的设计方法及步骤,使初学者掌握常规磁铁设计的基本方法。

本书注重分析和解决实际问题,练习题侧重加强基本训练,通过自编程序掌握基本计算方法,同时,对于大的通用程序,力求能了解应用,在设计电磁铁过程中能进行磁场数值计算,达到解决实际问题的目的。由于篇幅有限,本书没有讨论边界元法、三维场的计算等内容。

参 考 文 献

- 1 汪达基等. 电磁场数值计算的现状和发展. 磁场技术论文汇编, 中国粒子加速器学会, 上海: 1983
- 2 陈丕璋, 严烈通, 姚若萍. 电机电磁场理论与计算. 北京: 科学出版社, 1986
- 3 胡之光. 电机电磁场的分析与计算. 北京: 工业出版社, 1986
- 4 周克定. 工程电磁场专论. 武汉: 华中工学院出版社, 1986
- 5 高本庆. 时域有限差分法. 北京: 国防工业出版社, 1995
- 6 文炯一, 徐金平, 漆一宏. 电磁场数值计算的现代方法. 郑州: 河南科学技术出版社, 1994
- 7 周克定, 范明武等. 工程电磁场数值计算的理论方法及应用. 北京: 高等教育出版社, 1994
- 8 张榴晨, 徐松等. 有限元法在电磁计算中的应用. 北京: 中国铁道出版社, 1996
- 9 Emson C R I, Simkin J, Trowbridge C W. A Status Report on Electromagnetic Field Computation. IEEE Transactions on Magnetics, 1994, 30(4): 1533 ~ 1540
- 10 Sabonnadiere J C, Konrad A. Computing EM Fields. IEEE Spectram, 1992(11): 52 ~ 56

上篇 电磁场数值计算

第1章 电磁场的基本理论

电磁场计算的问题实际上是针对所给的边界条件求解麦克斯韦方程的问题,因此麦克斯韦方程组是求解电磁场问题的理论基础。本章概括阐明表征电磁场规律的几个基本定律和方程,作为后几章求解和计算电磁场问题的根据。稳恒电磁场是加速器束流运动中用得最多的场,所有圆形、环形加速器都用磁场来控制带电粒子运动的轨迹,从而实现带电粒子的偏转、聚焦等,因此,稳恒电磁场是讨论的重点。

1.1 电磁场的基本定律和基本方程

宏观电磁场的一些基本定律,如全电流定律、电磁感应定律等,可归纳为一套麦克斯韦方程组。这一节主要回顾常用的电磁理论的一些概念和方程。对于完整的电磁理论,读者可以参考其他的教科书和参考书,例如文献[1~6]。

1.1.1 麦克斯韦方程的积分形式与微分形式

1. 微分形式

全电流定律

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.1)$$

电磁感应定律

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

磁通连续定律

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

高斯定律

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.4)$$

除上述 4 个基本方程,还有 1 个基本方程,称为连续性方程,可以写为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.5)$$

它说明了电荷守恒。

2. 积分形式

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.6)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.7)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.8)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \, dV \quad (1.9)$$

式(1.1) ~ 式(1.9)中:

\mathbf{H} ——磁场强度, A/m;

\mathbf{D} ——电位移矢量, C/m²;

\mathbf{J} ——电流密度, A/m²;

\mathbf{B} ——磁感应强度, 1T = Wb/m²;

\mathbf{E} ——电场强度, V/m;

ρ ——电荷密度, C/m³。

1.1.2 恒定电磁场

当场量不随时间变化时,得到定态场,在此情况下,式(1.1)、式(1.2)和式(1.5)可写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.12)$$

而式(1.3)和式(1.4)仍然不变。显然,在这种情况下,电场和磁场之间没有相互作用,可以分别用式(1.4)和式(1.11)来描述静电场,或者用式(1.3)和式(1.10)来描述磁场,这样就能够单独处理恒定电场和恒定磁场。

麦克斯韦方程适用于各种坐标系,在加速器及电机电磁场计算中常用的是直角和圆柱两种坐标系。 \mathbf{H} 的旋度和 \mathbf{B} 的散度可分别表示如下。在直角坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

在圆柱坐标系中

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r \frac{1}{r} & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_r & rH_\theta & H_z \end{vmatrix} \quad (1.16)$$

1.1.3 时谐场

在稳定状态下,各场量均随时间作简谐变化的电磁场称为时谐场或简谐场。在处理工程电磁场理论问题时,有一些实际的场是按时谐规律变化的,而且任意时变场与波均可用傅里叶方法分解为时谐场。当在麦克斯韦方程中的场量是具有单频谐和振荡的函数时,利用复数表示的方法,可以将式(1.1)、式(1.2)和式(1.5)简化为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \quad (1.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -j\omega \rho \quad (1.19)$$

下面以式(1.1)旋度方程 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 为例,来说明如何用场矢量的复矢量来表示麦克斯韦方程和电荷守恒定律。将复数表示式^[7]代入式(1.1),得

$$\nabla \times (\text{Re}[\dot{\mathbf{H}}(r)e^{j\omega t}]) = \text{Re}[\dot{\mathbf{J}}(r)e^{j\omega t}] + \frac{\partial}{\partial t}(\text{Re}[\dot{\mathbf{D}}(r)e^{j\omega t}])$$

对复数的微分运算是分别对其实部和虚部进行的,不会改变其实部、虚部的性质,故 $\nabla, \frac{\partial}{\partial t}$ 等微分运算可与 Re 取实部的运算交换次序,于是上式可改写成

$$\text{Re}\{\nabla \times [\dot{\mathbf{H}}(r)]e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{j\omega \dot{\mathbf{D}}(r)e^{j\omega t} + \dot{\mathbf{J}}(r)e^{j\omega t}\}$$

两复数相等的重要条件是两复数的实部、虚部分别相等,所以可以去掉上式中取实部的符号,再省略等式两边各项中的公共因子 $e^{j\omega t}$,就得到 \mathbf{H} 的旋度方程的复数形式

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}}(r) = \dot{\mathbf{J}}(r) + j\omega \dot{\mathbf{D}}(r)$$

含有时空坐标变量的 \mathbf{H} 的旋度方程与式(1.1)方程的形式有很大不同,去掉该复数形式场方程中场量上方的点“·”,也不会与原来的场方程发生混淆,于是就得到式(1.17)的表达式。显而易见,也可导出式(1.18)的表达式。从这两个式子中可以看出,在时谐场,电场和磁场必须同时存在,并且相互作用。显然,静态场是在角频率 ω 趋于零时的极限情况。

1.1.4 成分方程

必须指出,不论哪种电磁场边值问题的求解,必须依据麦克斯韦方程组、媒质的成分方程和边界条件。

对于各向同性媒质,其成分方程为

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.21)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.22)$$

其中 ε ——介电常数, F/m;

ε_r ——相对介电常数;

ε_0 ——真空介电常数,其值为 8.854×10^{-12} F/m;

μ ——磁导率, H/m;

μ_r ——相对磁导率;

μ_0 ——真空磁导率,其值为 $4\pi \times 10^{-7}$ H/m;

σ ——电导率, S/m。

对于线性媒质,这7个量是常数;对于非线性媒质,它们随场量的变化而变化。

1.2 标量位及其微分方程

在分析和计算电磁场问题时,为了求出场量与场源之间的关系,引用位函数(或称势函数)作为辅助量,可以减少未知数个数,使问题得到简化,有时也使物理概念更加清楚。在无旋场(即旋度恒等于零的场)中,可以采用标量位函数。

1.2.1 标量电位

在静电场或在电源以外区域的恒定电流场中,电场强度满足

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

由矢量分析知

$$\nabla \times (\nabla \Phi) \equiv 0$$

因此可以引入标量电位 Φ 来表示静电场的特性,它与电场强度的关系为

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi \quad (1.23)$$

式中负号表示电位梯度与电场强度方向相反。

利用静电场方程(1.4)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

代入式(1.23)可以得到

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.24)$$

在 $\rho = 0$ 时

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.25)$$

这就是静电场位函数的微分方程。这样,静电场问题在均匀、线性、各向同性媒质中可以归结为式(1.24)、式(1.25)的泊松方程或拉普拉斯方程。

如果电荷分布为已知,根据静电场电位迭加原理有