内 容 简 介

全书共分 4 章. 第 1 章着重用势研究实函数; 第 2 章和第 3 章比较完整地论述了一般测度理论和积分理论, 并详细描述了 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分理论, 以及 Lebesgue-Stieltjes 测度与 Lebesgue-Stieltjes 积分理论; 第 4 章引进了 Banach 空间 $(\mathscr{L}^p, \|\cdot\|_p)(p\geqslant 1)$ 和 Hilbert 空间 $(\mathscr{L}^2, \langle,\rangle)$, 并证明了一些重要定理. 书中配备了大量的例题、习题和复习题, 可以训练学生分析问题和解决问题的能力, 帮助他们打下分析数学和测度论方面扎实的数学基础. 本书定会对数学和概率统计专业学生的学习和研究产生不可估量的影响.

本书可作为综合性大学、理工科大学、师范类院校基础数学、应用数学、概率统计和计算数学专业的教材或自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/徐森林编著. —合肥: 中国科学技术大学出版社, 2002.2

ISBN 7-312-01348-1

Ⅰ. 实…　Ⅱ. 徐…　Ⅲ. 实变函数论　Ⅳ. O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 075434 号

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026)
合肥学苑印刷厂印刷
全国新华书店经销

开本: 850×1168/32　印张: 16.125　字数: 419 千
2002 年 2 月第 1 版　2002 年 2 月第 1 次印刷
印数: 1—3000 册
定价: 20.00 元

前　言

在近三十年中,作者曾多次讲授“实变函数”课程,先采用复旦大学夏道行教授等编著的《实变函数论与泛函分析》,后又采用北京大学周民强教授编著的《实变函数》一书作为教材.这两本书各有其特点和侧重面.复旦的书侧重于一般的测度理论和积分理论,这有利于概率统计专业学生对后续知识的学习和研究;北大的书侧重于分析数学能力的训练,尤其是书中配有一定难度的习题,能引起爱好数学的学生的兴趣和激起他们极大的学习热情,且能增强他们做难题的能力,激励他们对数学进行深入的学习和研究.中国科学技术大学的特点是数学系和概率统计专业的学生合班上“实变函数”课,为顾及这两方面的学生,期望能编写一本同时具有上述两本书的优点,且更加适合中国科学技术大学学生的实变函数教材.

本书共分 4 章.第 1 章着重用势研究实函数.由于势的引入,许多函数(例如凸(凹)函数、单调函数、有界变差函数、绝对连续函数)的性质(如连续性、可导性等)、连续函数的可导点集的结构、连续函数列的极限函数的性质以及导函数连续点集的稠密性等被深入研究清楚.在第 1 章中,还研究了 Borel 集类、Cantor 疏朗(三分)集和 Cantor 函数,并证明了重要的 Baire 定理和闭集上连续函数的延拓定理.这些知识和定理有广泛的应用.该章内容是分析能力培养的基础.

第 2 章和第 3 章比较完整地论述了一般测度理论和积分理论,并详细描述了 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分理论,以及 Lebesgue-Stieltjes 测度与 Lebesgue-Stieltjes 积分理论,使读者学过之后既能有抽象的理论水平,具有高观点,又能掌握大量的具体的实例,不致飘在空中.这两章内容极为丰富,在引进了几乎处处收

敛、依测度收敛等概念后，证明了重要的Д.Ф.Егоров定理、Н.Н.Лузин定理、Lebesgue控制收敛定理、Levi引理、Fatou引理、Vitali覆盖定理和Fubini定理，还讨论了Lebesgue积分与Riemann积分之间的关系和区别．应用绝对连续函数的知识，本章给出了Newton-Leibniz公式成立的充要条件，同时还给出了条件弱于数学分析中的分部积分、中值定理、换元公式的论证．

第4章，在$\mathscr{L}^p(p\geqslant 1)$空间上引入模$\|\cdot\|_p$，使其成为Banach空间；在$\mathscr{L}^2$空间上引入内积$\langle,\rangle$，使其成为Hilbert空间，并研究了该空间中函数列的收敛（即p次幂平均收敛）性、完备性和可分性．特别地，还研究了$\mathscr{L}^2$中的规范正交系及其封闭性、完全性，为进一步学习泛函分析及其他高层次的数学知识打下了坚实的基础．

书中打“*”号的2.4节和3.9节，主要是为了增加读者的知识面．特别是Hausdorff测度，在近二十年有着广泛的应用．这两节内容不必在课堂上讲授，可以让有兴趣的和需要这方面知识的读者自己阅读．

阅读本书，可以分三个不同的水平和层次．第一个层次是只要熟读书中内容和例题，已可达到相当高的水平；第二个层次是要将书中习题做好，其中小部分习题有相当的难度，经此训练，读者可成为高水平的大学生；第三个层次是为少数学习尖子设置的，他们除了要做一般的习题外，还必须努力去完成书中各章后面的复习题．这些复习题大部分都是难题，可以训练读者的思考与研究能力，使他们成为高水平的拔尖学生．

在本书的编写过程中，作者参考和引用了书后所列参考文献中的内容和习题，在此向各书的作者致谢．最后，对于帮助编写本书并提出宝贵意见的薛春华副教授和邱雁南、王作勤、杨芳云、庞华栋等研究生表示衷心的感谢．

徐森林

2001年10月1日于合肥

目　录

第 1 章 集合运算·集合的势·集类

集合论自 19 世纪 80 年代由德国数学家 G. Cantor 创立以来，其基本概念和方法已渗入到 20 世纪的各个数学领域，并被普遍地采用. 对特定的集合按某种要求作分解与组合，是实变函数论中的一种基本论证方法.

1.1 集合运算

通常，将具有某种特定性质的具体或抽象的对象的全体称作**集合**，或简称为**集**. 其中的每个对象称为该集合的**元素**，或**点**，或**成员**.

我们常用大写字母 $A, B, X, Y, \cdots$ 表示集，而用小写字母 $a, b, x, y, \cdots$ 表示元素. 对于一个集，用 $x \in X$ 表示 x 为 X 的元素，称 x **属于** X；用 $x \overline{\in} X$ 表示 x 不为 X 的元素，称 x **不属于** X. 二者必居其一.

表示一个集合一般有两种方式. 一种是穷举法，即将该集合的所有元素都列举出来，如

$$X = \{x_1, \cdots, x_n\}.$$

另一种是将具有某性质 P 的元素全体记为

$$X = \{x \mid x \text{ 具有性质} P\}.$$

因此，$x \in X \Leftrightarrow x$ 具有性质 P；$x \overline{\in} X \Leftrightarrow x$ 不具有性质 P.

例 1.1.1 $\varnothing$ 表示空集，即该集中无元素.

$\{a\}$ 表示独点集.

$\{a_1, \cdots, a_n\}$ 为 n 元集.

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$$

为自然数集.

$$\boldsymbol{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots,\pm n,\cdots\}$$

为整数集.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}&=\{\frac{p}{q}\mid p\in\boldsymbol{Z},q\in\boldsymbol{N}\}\\&=\{\pm x\mid x\text{ 为有限小数或无限循环小数}\}\end{aligned}$$

为有理数集.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=\{\pm x\mid x=\alpha_0.\alpha_1\cdots\alpha_n\cdots\text{ 为小数}\}\\&=\{x\mid x\text{ 为有理数或无理数(无限不循环小数)}\}\end{aligned}$$

为实数集.

$$\boldsymbol{C}=\{x+\mathrm{i}y\mid x,y\in\boldsymbol{R},\mathrm{i}=\sqrt{-1}\text{ 为虚单位},\mathrm{i}^2=-1\}$$

为复数集.

$$\boldsymbol{H}=\{x_1+x_2\mathrm{i}+x_3\mathrm{j}+x_4\mathrm{k}\mid x_1,x_2,x_3,x_4\in\boldsymbol{R}\}$$

为 4 元数集,其中,$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1,\mathrm{ij}=\mathrm{k}=-\mathrm{ji},\mathrm{jk}=\mathrm{i}=-\mathrm{kj},\mathrm{ki}=\mathrm{j}=-\mathrm{ik}$.

$$A=\{x\in\boldsymbol{R}\mid x^2-2=0\}=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}.$$

如果 $x\in A\Rightarrow x\in B$,则称 A **含于** B,记作 $A\subset B$;或称 B **包含** A,记作 $B\supset A$,A 称为 B 的**子集**. 显然,$\varnothing\subset A$. 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B **相等**,记作 $A=B$,此时它们的元素完全相同. 如果 $A\subsetneqq B$(即 $x\in A\Rightarrow x\in B$,且 $\exists\, x_0\overline{\in} A$,但 $x_0\in B$),则称 A 为 B 的**真子集**. 在例 1.1.1 中,显然有 $\boldsymbol{N}\subsetneqq\boldsymbol{Z}\subsetneqq\boldsymbol{Q}\subsetneqq\boldsymbol{R}\subsetneqq\boldsymbol{C}\subsetneqq\boldsymbol{H}$.

集合的各种运算,就是要由旧集合构造新集合.

集合的**并**:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

为 A 与 B 的全体(图 1.1.1).

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid\exists\, i_0,1\leqslant i_0\leqslant n,\text{使 }x\in A_{i_0}\}$$

为 $A_1,\cdots,A_n$ 的全体.

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid \exists\, i_0, 1 \leqslant i_0 < +\infty, \text{使 } x \in A_{i_0}\}$$

为 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 的全体.

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x \mid \exists\, \alpha_0 \in \Gamma, \text{使 } x \in A_{\alpha_0}\}$$

为 $A_\alpha(\alpha \in \Gamma)$ 的全体，其中 Γ 为指标集，对固定的 $\alpha \in \Gamma$，A_α 为集合.

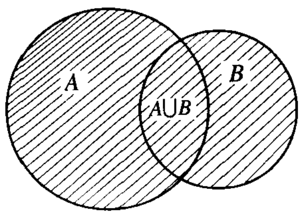

图 1.1.1

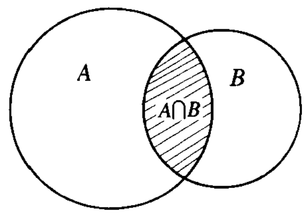

图 1.1.2

集合的交：

$$A \cap B = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{ 且 } x \in B\}$$

为 A 与 B 的公共元素的全体(图1.1.2).

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid x \in A_i, i = 1, \cdots, n\}$$

为 $A_1, \cdots, A_n$ 的公共元素的全体.

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_i, i = 1, 2, \cdots\} = \{x \mid x \in A_i, i \in \mathbf{N}\}$$

为 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 的公共元素的全体.

$$\bigcap_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha, \forall\, \alpha \in \Gamma\}$$

为 $A_\alpha(\alpha \in \Gamma)$ 的公共元素的全体.

如果 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B **不相交**；如果 $A \cap B \neq \varnothing$，则称 A 与 B **相交**.

集合的差：

$$A \setminus B(\text{或 } A - B) = \{x \mid x \in A, \text{但 } x \,\overline{\in}\, B\}$$

为在 A 中而不在 B 中的一切元素的集合(图 1.1.3).

特别地，如果 $B \subset X$，则称

$$B^c = X \setminus B = \{x \mid x \in X, x \overline{\in} B\}$$

为 B 在**全集** X 中的**余(或补)集**(图 1.1.4).

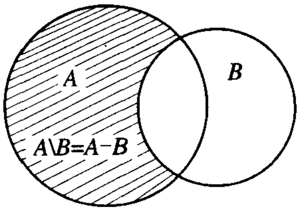

图 1.1.3

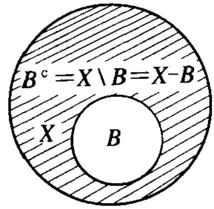

图 1.1.4

集合的直积：

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

$$\begin{aligned}\mathop{\times}_{i=1}^{n} X_i &= X_1 \times \cdots \times X_n \\ &= \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, \cdots, n\},\end{aligned}$$

$$\mathop{\times}_{i=1}^{\infty} X_i = \{(x_1, \cdots, x_i, \cdots) \mid x_i \in X_i, i \in \boldsymbol{N}\},$$

$$\mathop{\times}_{\alpha \in \Gamma} X_\alpha = \{\mathop{\times}_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha \mid x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in \Gamma\}.$$

例 1.1.2 $\boldsymbol{Q}^c = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}$ 为无理数集.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^2 &= \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \\ &= \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}\}\end{aligned}$$

为平面.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^3 &= \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}\}\end{aligned}$$

为 3 维空间.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^n &= \underbrace{\boldsymbol{R} \times \cdots \times \boldsymbol{R}}_{n\text{个}} \\ &= \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in \boldsymbol{R}, i = 1, \cdots, n\}\end{aligned}$$

为 n 维 Euclid 空间.

$$\boldsymbol{R}^\infty = \{(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_n \in \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N}\}.$$

$$Q^n = \underbrace{Q \times \cdots \times Q}_{n个}$$
$$= \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in Q, i = 1, \cdots, n\}$$

为 R^n 中的有理点集.

$(Q^n)^c = R^n \setminus Q^n$ 为 R^n 中的无理(非有理)点集.

例 1.1.3 (1) 设 $f: R^1 \to R$ 为实函数,则

$$\{x \mid a \leqslant f(x) < b\}$$
$$= \{x \mid f(x) \geqslant a\} \cap \{x \mid f(x) < b\}.$$

(2) 设 $f: [a, b] \to R$ 为实函数,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in [a, b] \mid |f(x)| > \frac{1}{n}\}$$
$$= \{x \in [a, b] \mid f(x) \neq 0\}.$$

证 只证(2),(1)留作习题.

$x_0 \in$ 左边

$\Leftrightarrow \exists$(存在)$n_0 \in N$,使 $x_0 \in \{x \in [a, b] \mid |f(x)| > \frac{1}{n_0}\}$

$\Leftrightarrow \exists\, n_0 \in N$,使 $|f(x_0)| > \frac{1}{n_0}$,即 $f(x_0) \neq 0$

$\Leftrightarrow x_0 \in$ 右边.

所以

$$左边 = 右边.$$

定理 1.1.1 (1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$,
$A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(3) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

更一般地,有

$$A \cap (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (A \cap B_\alpha),$$

$$A \cup (\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(A \cup B_\alpha).$$

(4) 此外,还有($A,B\subset X$)

$$A\cup A^c = X,\qquad A\cap A^c = \varnothing,\qquad (A^c)^c = A,$$
$$X^c = \varnothing,\qquad \varnothing^c = X,\qquad A\setminus B = A\cap B^c,$$
$$A\supset B \Leftrightarrow A^c\subset B^c,\qquad A\cap B = \varnothing \Leftrightarrow A\subset B^c.$$

证 只证(3)中第 3 式.由

$$\begin{aligned} x \in A \cap (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) &\Leftrightarrow x \in A,\text{且 } x \in \bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha \\ &\Leftrightarrow x \in A,\text{且 } \exists\, \alpha_0 \in \Gamma,\text{使 } x \in B_{\alpha_0} \\ &\Leftrightarrow \exists\, \alpha_0 \in \Gamma,\text{使 } x \in A \cap B_{\alpha_0} \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A \cap B_\alpha) \end{aligned}$$

知

$$A \cap (\bigcup_{\alpha\in\Gamma} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(A \cap B_\alpha).$$

其余各式请读者自证. □

定理 1.1.2(de Morgan 公式)

$$X \setminus \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X \setminus A_\alpha),$$
$$X \setminus \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Gamma}(X \setminus A_\alpha).$$

如果 $A_\alpha \subset X$($\forall$(任何)$\alpha\in\Gamma$),则称 X 为全空间,上述两式变为

$$(\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c,$$
$$(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha^c.$$

证 只证第 1 式,第 2 式留作习题.由

$$\begin{aligned} x \in X \setminus \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha &\Leftrightarrow x \in X,\ x \overline{\in} \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha \\ &\Leftrightarrow x \in X,\ \forall\, \alpha \in \Gamma,\ x \overline{\in} A_\alpha \\ &\Leftrightarrow \forall\, \alpha \in \Gamma,\ x \in X \setminus A_\alpha \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X \setminus A_\alpha) \end{aligned}$$

知

$$X \setminus \bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Gamma}(X \setminus A_\alpha). \quad \square$$

集合 A 与 B 的**对称差集**(图 1.1.5):

$$A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

定理 1.1.3 (1) $A\cup B=(A\cap B)\cup(A\triangle B)$.

(2) $A\triangle\varnothing=A$, $A\triangle A=\varnothing$,

$A\triangle A^c=X$, $A\triangle X=A^c$.

(3) 交换律: $A\triangle B=B\triangle A$.

(4) 结合律: $(A\triangle B)\triangle C$

$=A\triangle(B\triangle C)$.

(5) 交与对称差满足分配律:

$A\cap(B\triangle C)$

$=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$.

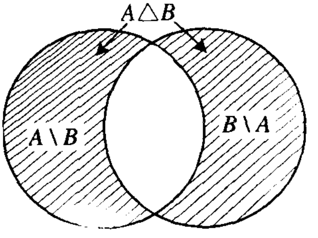

图 1.1.5

(6) $A^c\triangle B^c=A\triangle B$.

(7) 对 $\forall A,B$, $\exists_1$(存在唯一)E,使 $E\triangle A=B$.

证 (1) $x\in A\cup B$

$\Leftrightarrow x\in A$ 或 $x\in B$

$\Leftrightarrow x\in A\cap B$,或 $x\in A\setminus B$,或 $x\in B\setminus A$

$\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

$\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\triangle B)$,

即

$$A\cup B=(A\cap B)\cup(A\triangle B).$$

(4) $x\in A-B\triangle C$

$\Leftrightarrow x\in A; x\overline{\in}B\triangle C=(B\setminus C)\cup(C\setminus B)$

$\Leftrightarrow x\in A; x\in B\cap C$,或 $x\overline{\in}B$ 且 $x\overline{\in}C$

$\Leftrightarrow x\in A\cap B\cap C$ 或 $x\in A-B-C$

$\Leftrightarrow x\in(A-B-C)\cup(A\cap B\cap C)$,

即

$$A-B\triangle C=(A-B-C)\cup(A\cap B\cap C).$$

于是

$$
\begin{aligned}
&A\triangle(B\triangle C)\\
&\quad=(A-B\triangle C)\cup(B\triangle C-A)\\
&\quad=(A-B-C)\cup(A\cap B\cap C)\cup(B-C-A)\\
&\qquad\cup(C-B-A)\\
&\quad=(A-B-C)\cup(B-A-C)\cup(C-A-B)\\
&\qquad\cup(A\cap B\cap C)\\
&\quad=((A-B)\cup(B-A)-C)\cup(C-A\triangle B)\\
&\quad=(A\triangle B-C)\cup(C-A\triangle B)\\
&\quad=(A\triangle B)\triangle C.
\end{aligned}
$$

(5) $x\in A\cap(B\setminus C)\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B\setminus C$

$\Leftrightarrow x\in A$ 且 $x\in B, x\overline{\in} C$

$\Leftrightarrow x\in A\cap B$ 且 $x\overline{\in} A\cap C$

$\Leftrightarrow x\in (A\cap B)\setminus(A\cap C)$,

即

$$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C).$$

根据定理 1.1.1 第 4 式得到

$$
\begin{aligned}
&A\cap(B\triangle C)\\
&\quad=A\cap((B\setminus C)\cup(C\setminus B))\\
&\quad=(A\cap(B\setminus C))\cup(A\cap(C\setminus B))\\
&\quad=((A\cap B)\setminus(A\cap C))\cup((A\cap C)\setminus(A\cap B))\\
&\quad=(A\cap B)\triangle(A\cap C).
\end{aligned}
$$

(6) $x\in A^c\setminus B^c\Leftrightarrow x\in A^c, x\overline{\in} B^c$

$\Leftrightarrow x\overline{\in} A, x\in B$

$\Leftrightarrow x\in B\setminus A$,

即

$$A^c\setminus B^c=B\setminus A.$$

于是

$$
\begin{aligned}
A^c\triangle B^c&=(A^c\setminus B^c)\cup(B^c\setminus A^c)\\
&=(B\setminus A)\cup(A\setminus B)
\end{aligned}
$$

$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$
$$= A \triangle B.$$

(7) 若 $E\triangle A = B$,则

$$E = E\triangle\varnothing = E\triangle(A\triangle A)$$
$$= (E\triangle A)\triangle A = B\triangle A,$$

即满足 $E\triangle A = B$ 的 E 是唯一的.

反之,令 $E = B\triangle A$,则

$$E\triangle A = (B\triangle A)\triangle A = B\triangle(A\triangle A)$$
$$= B\triangle\varnothing = B.$$

所以,$\exists_1 E$,使 $E\triangle A = B$.

(2),(3)两式显然,请读者自证. □

上面给出了集合的初等运算:并、交、差、余(或补)、对称差等运算.在测度理论和积分理论中,还需要引进集合列 $\{A_k\}$ 的上(下)限集或上(下)极限集 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k$($\underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k$)、极限集 $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k$.

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \limsup_{k\to+\infty} A_k \triangleq \{x \mid \exists \text{ 无穷个 } k, \text{使 } x \in A_k\}$$
$$= \{x \mid \text{对 } \forall n \in \boldsymbol{N}, \exists k \geqslant n, \text{使 } x \in A_k\},$$
$$\underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \liminf_{k\to+\infty} A_k \triangleq \{x \mid \text{只有有限个 } k, \text{使 } x \overline{\in} A_k\}$$
$$= \{x \mid \exists n_0 \in \boldsymbol{N}, \text{当 } k \geqslant n_0 \text{ 时}, x \in A_k\}.$$

显然

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k \subset \overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

如果 $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k = \underline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k$,则称集列 $\{A_k\}$ **有极限**,或是**收敛**的.记此极限为

$$\lim_{k\to+\infty} A_k \left(= \overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k\right).$$

定理 1.1.4(用可数交、并表示上、下极限集) 设 $\{A_k\}$ 为集列,则

(1) $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

(2) $\underline{\lim}_{k\to+\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

证 (1) $x\in \overline{\lim}_{k\to+\infty} A_k \Leftrightarrow \exists$ 无穷个 k,使 $x\in A_k$

$$\Leftrightarrow \text{对} \forall\, n\in \mathbf{N}, x\in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\Leftrightarrow x\in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

即

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(2) $x\in \underline{\lim}_{k\to+\infty} A_k \Leftrightarrow \exists\, n_0\in \mathbf{N}$,当 $k\geqslant n_0$ 时,$x\in A_k$

$$\Leftrightarrow \exists\, n_0\in \mathbf{N}, \text{使 } x\in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} A_k$$

$$\Leftrightarrow x\in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

即

$$\underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad \square$$

定理 1.1.5 设 $\{A_k\}$ 为单调增(减)集列,即 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots(A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots)$,则

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

证 1 对单调增集列,由定理 1.1.4 知

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

对单调减集列,由定理 1.1.4 知

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k.$$

所以

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

证 2 由于 $\underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k \subset \overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k$，故只须证明 $\underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k \supset \overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k$. 事实上，由于

$$x\in \overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k \Leftrightarrow \exists \text{无穷个 } k, \text{使 } x\in A_k$$

$$\Rightarrow \exists n_0\in \mathbf{N}, \text{使当 } k\geqslant n_0 \text{ 时}, x\in A_k$$

$$(\text{由 } A_k \text{ 单调增(减)})$$

$$\Leftrightarrow x\in \underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k,$$

所以

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k \subset \underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k.$$

于是

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k$$

$$= \{x \mid \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{当 } k \geqslant n_0 \text{ 时}, x \in A_k\}$$

$$= \begin{cases} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, & \text{当 } A_k \text{ 单调增}, \\ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k, & \text{当 } A_k \text{ 单调减}. \end{cases} \quad \square$$

定理 1.1.6 (1) $X \setminus \overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \underline{\lim_{k\to+\infty}} (X \setminus A_k)$.

(2) $X \setminus \underline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = \overline{\lim_{k\to+\infty}} (X \setminus A_k)$.

证 1 (1) $X \setminus \overline{\lim_{k\to+\infty}} A_k = X \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(X \setminus \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(X\setminus A_k)$$
$$=\varliminf_{k\to+\infty}(X\setminus A_k).$$

(2) $$X\setminus\varliminf_{k\to+\infty}A_k=X\setminus\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\Big)$$
$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(X\setminus\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\Big)$$
$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(X\setminus A_k)$$
$$=\varlimsup_{k\to+\infty}(X\setminus A_k).$$

证 2 (1) $x\in X\setminus\varlimsup\limits_{k\to+\infty}A_k$

$\Leftrightarrow x\in X$,且 $x\overline{\in}\varlimsup\limits_{k\to+\infty}A_k$

$\Leftrightarrow x\in X$,且 $\overline{\exists}$(不存在)无穷个 k,使 $x\in A_k$

$\Leftrightarrow x\in X$,且 $\exists\, n_0\in\mathbf{N}$,当 $k\geqslant n_0$ 时,$x\overline{\in}A_k$

$\Leftrightarrow\exists\, n_0\in\mathbf{N}$,当 $k\geqslant n_0$ 时,$x\in X\setminus A_k$

$\Leftrightarrow x\in\varliminf\limits_{k\to+\infty}(X\setminus A_k)$,

即

$$X\setminus\varlimsup_{k\to+\infty}A_k=\varliminf_{k\to+\infty}(X\setminus A_k).$$

(2) $x\in X\setminus\varliminf\limits_{k\to+\infty}A_k$

$\Leftrightarrow x\in X$,且 $x\overline{\in}\varliminf\limits_{k\to+\infty}A_k$

$\Leftrightarrow x\in X$,且对 $\forall\, n_0\in\mathbf{N}$,$\exists\, k\geqslant n_0$,使 $x\overline{\in}A_k$

$\Leftrightarrow\forall\, n_0\in\mathbf{N}$,$\exists\, k\geqslant n_0$,使 $x\in X\setminus A_k$

$\Leftrightarrow x\in\varlimsup\limits_{k\to+\infty}(X\setminus A_k)$,

即

$$X\setminus\varliminf_{k\to+\infty}A_k=\varlimsup_{k\to+\infty}(X\setminus A_k).\quad\square$$

例 1.1.4 设 $A_k=\{a_k\}$,当 $i\neq j$ 时,$a_i\neq a_j$.显然,$\{A_k\}$为非增又非减的集列,但