张量分析及其应用

汪国强　洪毅　编

高等教育出版社

张量分析及其应用

汪国强　洪毅　编

高等教育出版社

（京）112号

张量分析及其应用
汪国强 洪毅 编
*
高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 9.125 字数 220 000
1992年9月第1版 1992年9月第1次印刷
印数 0001— 1 122
ISBN 7-04-003827-7/O·1132
定价4.20元

前 言

随着现代工程技术的发展，工程技术人员使用的数学工具逐渐从单变量发展到多变量，从线性理论发展到非线性理论，而张量方法的广泛使用，就是这种趋势的一个重要方面．应用张量记号，不仅使工程理论的表达大大简化，而且因为摆脱了坐标系的局限性，使理论的物理意义变得更为清晰．为了适应这种形势，我们在华南理工大学开设了“张量分析及其应用”的课程．在教学过程中，我们根据各类专业的需要，参考了国内外的一些教科书，编成本书．本书出版前曾印成讲义，在工科研究生中试讲过三年，后又根据专家审查和各方面意见作了修改．

考虑到本书的主要对象是工科研究生，因此我们着重阐明张量的基本概念和基本运算规律，列举较多的应用实例，以便学生理解张量的物理意义，而不致在抽象理论面前感到困惑．我们只对最重要的定理和公式给出推导，以便学生理解基本概念，同时在此基础上也力争理论的严密性．

本书的基本内容如下：第一章介绍向量的仿射变换和相伴基的概念，作为引入张量的基础；第二章介绍张量的基本概念和运算，通过应变张量、应力张量、惯性矩张量等的介绍，力求使学生正确理解张量的概念；第三章介绍张量场的微积分及其在流体力学、电磁学方面的应用；第四章介绍三维空间中曲线和曲面的微分几何知识．为了使学生进一步熟悉张量，这一章尽量地使用了张量的记号；第五章介绍微分流形和黎曼几何的概念，着重解释联络和曲率的几何意义及其在狭义相对论中的应用，这是考虑到这方面知识的应用已越来越广泛．此外，在每章的最后，我们还选编了多方面应用的一些例题和习题，供教师选用．书末附录中介绍了多

重线性函数、外微分等内容，供有兴趣的读者参考.

我们只假定读者具有高等数学和简单的线性代数知识. 考虑到学生的实际情况，还适当复习了向量和向量场的某些知识. 本书可作为机械、化工、力学等专业的研究生作为教材使用，也可供物理、无线电、自动控制等专业的学生参考. 本书的主要内容可以在48--64学时内讲完. 第一章，根据学生的基础，可讲6到8学时；第二章，可讲10到14学时；第三章，可讲10到14学时；第四章，可讲12到16学时；第五章，可讲8到12学时，狭义相对论一节也可不讲. 根据不同专业的要求以及学生的基础，教师在讲授时可进行适当取舍.

最后，本稿经华中理工大学陆传务教授和林化夷教授审阅，华东师范大学的沈纯理教授也审阅了本稿，在此一并表示感谢.

编　者

1990年11月于广州

目　录

第一章　向量与仿射坐标变换

在解析几何中，读者已经熟悉了向量的各种代数运算以及在直角坐标系下这些运算的坐标计算方法. 就向量本身而言，直角坐标系当然是最简单、最方便的坐标系，但对许多具体问题，我们往往还需要引进各种不同的坐标系. 本章先讨论另一种直线坐标系——仿射坐标系，下章将研究一般的曲线坐标系及其坐标变换公式.

1.1 基和变换

1.1.1 向量的线性相关与线性独立

向量的线性相关　设有 n 个向量 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$, 若存在 n 个不全为零的数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使得

$$c_1\boldsymbol{A}_1 + c_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{0} \tag{1.1.1}$$

成立，则称这 n 个向量线性相关.

n 个向量若不是线性相关的，就称它们是线性独立的. 换句话说，若 n 个向量 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$ 是线性独立的，则当(1.1.1)式成立时，一定有 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

两个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 线性相关，则它们一定平行(同向或反向). 这是因为在 $c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ 中，若 $c_1 \neq 0$, 有 $\boldsymbol{A} = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{B}$; 若 $c_2 \neq 0$, 则 $\boldsymbol{B} = -\frac{c_1}{c_2}\boldsymbol{A}$, 可见，不管哪一种情况，都有 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 平行.

两向量平行，也称它们是共线的.

三个向量 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 线性相关，则它们一定共面（平行于同一

平面)，这是因为，若 $c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{B}+c_3\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$，不失一般性，不妨假设 $c_3\neq0$，则有

$$\boldsymbol{C}=-\frac{c_1}{c_3}\boldsymbol{A}-\frac{c_2}{c_3}\boldsymbol{B},$$

也就是三向量平行于同一平面(当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不共线时，平行于由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 决定的平面；当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 共线时，三向量平行于同一直线).

容易证明，下面的两个结论也是正确的：

若两个向量线性独立，则它们一定不共线.

若三个向量线性独立，则它们一定不共面.

本章主要讨论三维空间中的向量. 在三维空间中，任意四个向量 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 一定线性相关. 这是因为，若其中至少有三个向量不共面，例如 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 不共面，则有

$$\boldsymbol{A}_4=a_1\boldsymbol{A}_1+a_2\boldsymbol{A}_2+a_3\boldsymbol{A}_3 \tag{1.1.2}$$

(图1.1). 若任意三个向量都共面，则四个向量也必共面. 因此，四个向量 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 一定线性相关.

特别地，在三维空间中，若三个向量 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 不共面，则任意第四个向量 $\boldsymbol{A}_4$ 一定可以写成(1.1.2)式. (1.1.2)式也称为$\boldsymbol{A}_4$ 关于$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 的分解式.分解式的系数由这四个向量唯一确定.

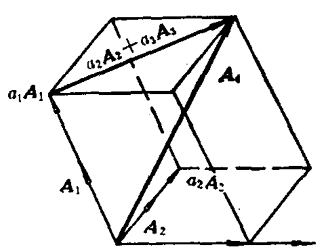

图 1.1

这个结论可以推广到 n 维空间的情形. 也就是说，在 n 维空间中，若 n 个向量$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 是线性独立的，则任意向量$\boldsymbol{A}$一定可以写成

$$\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{A}_1+a_2\boldsymbol{A}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{A}_n. \tag{1.1.3}$$

(1.1.3)式也称为向量 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 的分解式. 同样，分解式的系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 由这 $n+1$ 个向量 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$，

A 唯一确定.

1.1.2 基和基向量

n 维空间中，任意一组 n 个线性独立的向量称为它的一个基，基中每一个向量都称为基向量.

现在回到三维空间的情况.

设 $Ox_1x_2x_3$ 是空间直角坐标系，$\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2$ 和 $\boldsymbol{i}_3$ 分别为沿 Ox_1，Ox_2 及 Ox_3 轴正向的单位向量，则任一向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$ 可以唯一地表示为

$$\boldsymbol{r}=x_1\boldsymbol{i}_1+x_2\boldsymbol{i}_2+x_3\boldsymbol{i}_3, \tag{1.1.4}$$

x_1, x_2, x_3 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标. 向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 的矢径，点与它的矢径有相同的坐标.

$\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ 是两两垂直的一组单位向量，通常也称为直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 的一个标准正交基.

取空间中三个不共面的向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，它们是三维空间的一个基. 空间中任意一个向量 $\boldsymbol{A}$ 都可以唯一地表示为*)

$$\boldsymbol{A}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+x^3\boldsymbol{e}_3,$$

与直角坐标系不同，一般说，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 不一定是单位向量，也不一定两两垂直. 这样建立起来的坐标系称为仿射坐标系（或斜角坐标系），$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 称为一个仿射基，而 (x^1, x^2, x^3) 称为向量 $\boldsymbol{A}$ 在该坐标系（或这一个仿射基）下的仿射坐标或简称坐标.

有了向量的坐标后，向量的线性运算（向量的加法，减法以及数乘向量）和向量与向量的乘积（数量积与向量积）都可以用向量的坐标来进行. 读者已十分熟悉在标准正交基 $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ 下，这些

---

*) 下式中出现了 x^1，x^2, x^3，这里 x^i 中的 i 是记在右上角的指标，不是乘幂运算的指数. 在今后的张量计算中，将巧妙地运用这种记号.

运算的坐标公式. 类似地, 也可以得到在仿射基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 下的计算公式. 以内积为例, 若 $\boldsymbol{A}=a^1\boldsymbol{e}_1+a^2\boldsymbol{e}_2+a^3\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{B}=b^1\boldsymbol{e}_1+b^2\boldsymbol{e}_2+b^3\boldsymbol{e}_3$, 则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=a^1b^1\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+a^2b^2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2+a^3b^3\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3+\\&\quad+(a^1b^2+a^2b^1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+(a^1b^3+a^3b^1)\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3+\\&\quad+(a^2b^3+a^3b^2)\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3\\&=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a^ib^j(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j),\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

如果记 $g_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$, 则上式可写成

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}g_{ij}a^ib^j.$$

1.1.3 基向量的正变换和逆变换

考虑空间中的两个基 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 和 $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2, \bar{\boldsymbol{e}}_3$. 将 $\bar{\boldsymbol{e}}_1, \bar{\boldsymbol{e}}_2, \bar{\boldsymbol{e}}_3$ 表示为:

$$\bar{\boldsymbol{e}}_1=\alpha_1^1\boldsymbol{e}_1+\alpha_1^2\boldsymbol{e}_2+\alpha_1^3\boldsymbol{e}_3=\sum_{k=1}^{3}\alpha_1^k\boldsymbol{e}_k$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_2=\alpha_2^1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2^2\boldsymbol{e}_2+\alpha_2^3\boldsymbol{e}_3=\sum_{k=1}^{3}\alpha_2^k\boldsymbol{e}_k$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_3=\alpha_3^1\boldsymbol{e}_1+\alpha_3^2\boldsymbol{e}_2+\alpha_3^3\boldsymbol{e}_3=\sum_{k=1}^{3}\alpha_3^k\boldsymbol{e}_k$$

或写为更简洁的形式

$$\bar{\boldsymbol{e}}_i=\sum_{k=1}^{3}\alpha_i^k\boldsymbol{e}_k. \qquad (i=1,2,3)$$

也可以用矩阵记法, 记

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3\\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3\\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3\end{pmatrix}$$

那么上式可写为

$$\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\\ \bar{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3\\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3\\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}.$$

数 $\alpha_i^k(i,k=1,2,3)$ 称为正变换(由不加横的基变到加横的基)的系数，A 称为正变换的系数矩阵.

反过来，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 也可以用 $\bar{\boldsymbol{e}}_1$, $\bar{\boldsymbol{e}}_2$, $\bar{\boldsymbol{e}}_3$ 表示. 设系数是 $\bar{\alpha}_i^k$, 即

$$\boldsymbol{e}_i=\sum_{k=1}^{3}\bar{\alpha}_i^k\bar{\boldsymbol{e}}_k. \qquad (i=1,2,3)$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}=\bar{A}\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}_1\\ \bar{\boldsymbol{e}}_2\\ \bar{\boldsymbol{e}}_3\end{pmatrix},$$

其中

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_1^1 & \bar{\alpha}_1^2 & \bar{\alpha}_1^3\\ \bar{\alpha}_2^1 & \bar{\alpha}_2^2 & \bar{\alpha}_2^3\\ \bar{\alpha}_3^1 & \bar{\alpha}_3^2 & \bar{\alpha}_3^3\end{pmatrix}$$

称为逆变换的系数矩阵.

由于

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}=\bar{A}\begin{pmatrix}\bar{\boldsymbol{e}}_1\\ \bar{\boldsymbol{e}}_2\\ \bar{\boldsymbol{e}}_3\end{pmatrix}=\bar{A}A\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix},$$

因此，$\bar{A}A$ 必定是单位矩阵. 同理，$A\bar{A}$ 也是单位矩阵，即

$$\bar{A}A=A\bar{A}=I.$$

也就是，正变换的系数矩阵与逆变换的系数矩阵互为逆矩阵。用系数表示，则有

$$\sum_{k=1}^{3}\alpha_i^k\bar{\alpha}_k^j=\begin{cases}0 & 若\ i\neq j\\ 1 & 若\ i=j,\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\bar{\alpha}_i^k\alpha_k^j=\begin{cases}0 & 若\ i\neq j\\ 1 & 若\ i=j.\end{cases}$$

注意，因 A 是可逆矩阵，故有

$$\det(\alpha_i^k)\neq 0,\quad \det(\bar{\alpha}_i^k)\neq 0.$$

1.2 相伴基及有关的一些问题

1.2.1 相伴基

我们知道，在直角坐标系下，取基向量组 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$ 为标准正交基时，向量运算的公式特别简单。例如向量 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}_1+A_2\boldsymbol{i}_2+A_3\boldsymbol{i}_3$ 和 $\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{i}_1+B_2\boldsymbol{i}_2+B_3\boldsymbol{i}_3$ 的内积公式(1.1.5)就可以写成

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3.$$

利用向量 $\boldsymbol{A}$ 与基向量 $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$ 的内积，我们可将向量 $\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_1)\boldsymbol{i}_1+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_2)\boldsymbol{i}_2+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_3)\boldsymbol{i}_3,\tag{1.2.1}$$

也就是说，在标准正交基下，向量与基向量的内积即是它的坐标。

当取的基不是标准正交基时，情况是否也是这样呢？

我们先来看正交基的情形。

设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是正交基，即 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=0(i\neq j)$，这时，

$$\boldsymbol{A}=\frac{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1)}{(\boldsymbol{e}_1)^2}\boldsymbol{e}_1+\frac{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2)}{(\boldsymbol{e}_2)^2}\boldsymbol{e}_2+\frac{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3)}{(\boldsymbol{e}_3)^2}\boldsymbol{e}_3.$$

记 $\boldsymbol{e}^i=\dfrac{\boldsymbol{e}_i}{(\boldsymbol{e}_i)^2}$，则 $\boldsymbol{e}^1,\boldsymbol{e}^2,\boldsymbol{e}^3$ 是另一组正交基，于是上式可写

成类似(1. 2. 1)式的形式

$$A=(A\cdot e^1)e_1+(A\cdot e^2)e_2+(A\cdot e^3)e_3. \tag{1.2.2}$$

因此,在正交基下,向量的坐标是它与另一组正交基的内积.

现在我们进一步分析这两组正交基 e_1,e_2,e_3 与 e^1,e^2,e^3 之间的关系.

由 $e^i=\dfrac{e_i}{(e_i)^2}$ 及 $e_i\cdot e_j=0 \quad (i\neq j)$,就有

$$e^i\cdot e_j=\begin{cases}0 & (\text{若 } i\neq j)\\ 1 & (\text{若 } i=j).\end{cases}$$

下面讨论一般仿射基的情况.

定义 设 e_1,e_2,e_3 是任意一组仿射基,若另一组基向量 e^1, e^2,e^3 满足条件

$$e_i\cdot e^j=\begin{cases}0 & (\text{若 } i\neq j)\\ 1 & (\text{若 } i=j),\end{cases} \tag{1.2.3}$$

则这两组基 e_1,e_2,e_3 和 e^1,e^2,e^3 称为互为相伴基,其中任意一组称为另一组的相伴基.

设 $A=A^1e_1+A^2e_2+A^3e_3$,两边分别与 $e^i(i=1,2,3)$ 作内积,利用(1. 2. 3)式,容易得到

$$A^1=A\cdot e^1,\quad A^2=A\cdot e^2,\quad A^3=A\cdot e^3,$$

因此,

$$A=(A\cdot e^1)e_1+(A\cdot e^2)e_2+(A\cdot e^3)e_3, \tag{1.2.4}$$

同样,

$$A=(A\cdot e_1)e^1+(A\cdot e_2)e^2+(A\cdot e_3)e^3. \tag{1.2.5}$$

于是我们有

定理 当将向量 A 写成一组基的分解式时,它的系数(坐标)可以用 A 与这组基的相伴基的内积求得.

对于标准正交基来说,它的相伴基也就是它自己. 向量在这