65

微积分

（上册）

四川大学数学学院
杨志和　主编

编　者（按姓氏笔划排序）

于正端　伍炯宇　何祖林
杨志和　徐小湛

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分(上册)/四川大学数学学院 杨志和 主编. —北京:高等教育出版社;海德堡:施普林格出版社,2001.8

非数学专业本科生、金融管理专业本科生教材

ISBN 7-04-010294-3

Ⅰ. 微…　Ⅱ. 杨…　Ⅲ. 微积分-高等学校-教材　Ⅳ. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 050283 号

责任编辑: 徐　可　　**封面设计**: 王凌波

版式设计: 杨　明　　**责任印制**: 陈伟光

微积分(上册)

杨志和 主编

出版发行	高等教育出版社　施普林格出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　　话	010-64054588	**传　　真**	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2001 年 8 月第 1 版
印　　张	16.25	**印　　次**	2001 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	310 000	**定　　价**	18.00 元

前　言

本书是按照原国家教委面向21世纪教学改革立项项目“非数学类专业高等数学教学内容与课程体系改革的研究与实践”的要求编写的一本微积分教材. 本书遵循的编写原则是:

为广大非数学专业理工科大学本科生提供连续量的数学基础——微积分的基本思想方法、理论及知识训练;在教学内容的深广度方面与现行的“高等数学课程教学基本要求”基本相似,适当渗透现代数学思想,强调培养学生的抽象能力、逻辑思维和定量思维能力及应用数学理论和方法分析解决实际问题的能力,以满足新世纪对广大科技工作者与工程技术人员数学素质的培养要求.

基于此,我们力求使本书既能继承传统教材的优点又能贯彻改革精神,我们在下述几方面作出努力:

1. 注意将数学素质的培养有机地融合于基础知识的讲解之中,突出微积分的基本思想和基本方法,力求使学生在学习过程中能较好地了解各部分内容的内在联系,从总体上把握住微积分的思想方法. 如将不定积分作为定积分问题需要而引入,将两者合并讲解思想;又如微分中的局部线性化思想;泰勒公式与无穷级数中的逼近思想;极值问题中的最优化思想;求解函数方程中的迭代思想与离散化思想;在积分应用中的微元分析法思想. 力求揭示重要数学概念和方法的本质.

2. 按照循序渐进的原则,在教材中适当渗透现代数学思想,促进微积分与线性代数及其它数学课程的结合,为学生进一步学习现代数学知识提供一些“接口”. 但注意传统内容与现代内容的有机结合,避免过于生硬而使低年级大学生难于接受;如在傅里叶级数部分介绍了平均平方逼近与正交函数系的概念;结合微分方程介绍数学建模,在空间解析几何部分介绍仿射坐标系与正交变换化二次曲面为标准型,适当介绍场论及矢量值函数的微分法知识,并与曲线积分、曲面积分有机地结合等. 在本书中广泛使用到现代数学常用的数学符号与逻辑符号,为的是培养学生运用数学语言讨论、分析、解决问题的能力.

3. 内容取舍上既注意到各门后继课程的需要又突出与实际的联系. 本书拓广了应用实例的范围,为的是让学生们更多地见识一些用数学解决问题的事例,增强问题的趣味性与吸引力,培养他们的应用意识与能力. 除了介绍传统的几何与物理方面的典型实例外,还增加了不少在工程科学、生态学、经济管理、社会发展、医学甚至日常生活等诸多领域中的例题和习题,特别加强从问题的实际背景如何建立其数学刻画的训练与讲解,并适时将求解计算结果与实际情况进行对比分析.

4. 覆盖面大、适用范围广. 无论综合大学理科及应用理科如物理、力学以及广大工科院校各类工程学科专业,都可使用本教材. 本书也注意了各类专业不同层次的不同要求,既包含对数学基础要求较高的内容,如柯西收敛原理、函数项级数一般理论等,也对一般性专业做到在删去以上内容时不影响其学习的完整性,这充分体现了四川大学这类新型综合大学多学科多门类的特色.

在习题编排上分为 A、B 两大类. A 类题体现了教学基本要求,避免过多的运算技巧;而 B 类题则要求较高,可供学有余力的学生使用,这也体现了分层培养的思想. 每一章还配备有总习题,带有复习、归纳综合与提高的性质.

总的来说,我们想处理好改革与继承的关系,使长期形成的传统教材的优点,如说理浅显、叙述详细、深浅适当、文字通畅、例题较多,便于自学等能继续保持与发扬;同时又能体现改革的特色.

本书分为上、下两册. 上册为一元微积分;下册为多元微积分、无穷级数和微分方程.

本书的编写是在四川大学教务处的大力支持下,在数学学院的直接领导下,在院内外广大教师同行的协助下完成的,作者在此向他们表示衷心的感谢.

本书由杨志和主编,负责全书的统一协调、编纂和定稿. 由杨志和、伍炯宇、何祖林、于正端、徐小湛共同编写. 其中第一、二章由伍炯宇执笔;第三、四章由何祖林执笔;第五、六章由于正端执笔;第七、八章由徐小湛执笔;第九、十、十一章由杨志和执笔.

由于本书编写时间较为仓促,加上作者水平有限,内容的不足及错误之处在所难免,极望得到专家、同仁与广大读者的批评指正.

编 者

2001 年 7 月

绪　论

在当今大学非数学类专业本科教学中，开设了一系列的大学数学课程，如微积分（亦称高等数学）、线性代数、概率论与数理统计、数值计算方法等等. 它们在整个高等教育中起着非常重要的作用. 在同学们即将开始大学数学的学习时，有必要对以下几个问题有所了解.

1. 高等数学（大学数学）研究的对象与方法

人类生活在丰富多彩、变化万千的现实世界里，而世间万物均在一定的空间中运动变化着，在运动变化过程中都存在一定的数量关系. 数学就是研究现实世界中的数量关系与空间形式的科学. 如初等数学中，算术、代数研究数量关系；几何研究空间形式.

数学研究的对象决定了它的几个基本特点，即概念的抽象性、逻辑的严密性、结论的确定性、应用的广泛性. 但随着人类社会的发展，数学也经历了不同的发展阶段，在其研究对象与方法上又有所不同，这也就是初等数学与高等数学的不同.

17 世纪前，人类关于数学的知识基本上停留在所谓初等数学阶段. 那时人们只考虑了现实世界中最简单的数与形. 即研究的数是常数或常量（即在某一运动变化过程中保持不变或相对保持不变，因而可以当成一个固定数值的量），研究的形是固定的、孤立的、规则的几何形体，而有关常量间的代数运算构成了初等代数，有关不同几何形体的构造及关系构成了初等几何，中学里同学们主要就是学习这些知识.

随着生产力发展，自然科学（包括数学）也随之发展. 16 世纪，由于航海、采矿、修筑运河等需要，力学各个分支发展起来，对于运动的研究成了当时自然科学的中心问题. 而对运动，对各种变化过程和各种变化着的量之间的依赖关系的研究，引起了许多数学上的问题，要解决它们，初等数学已不够用了，需要创立新的概念和方法，这就使数学产生了一个飞跃——从初等数学到高等数学. 当时主要有 4 类问题需要解决.

第一类是已知物体移动的距离表为时间的函数的公式，求物体在任意时刻的速度和加速度；反过来，已知物体的加速度表为时间的函数的公式，求速度和距离. 这类问题是研究运动（当然是直线运动）时直接出现的. 这里的困难在于，所涉及的速度和加速度每时每刻都在变化. 例如计算瞬时速度，就不能象计算平均速度那样，用运动的时间去除移动的距离，因为在给定的瞬刻，移动的距离和所用的时间都是 0，而 $\frac{0}{0}$ 是无意义的. 但是根据物理学，每一个运动的物体在它运动的每

一时刻必然有速度,这是毫无疑义的.已知速度公式求移动距离的问题,也遇到同样的困难;因为速度每时每刻都在变化,所以不能用运动的时间乘任意时刻的速度来得到移动的距离.

第二类问题是求曲线的切线.这个问题虽然是纯几何的问题,但对于科学应用却有着极大的意义.正如我们所知道的那样,光学是17世纪的一门较重要的科学研究,透镜的设计直接吸引了费马(Fermat)、笛卡儿(Descartes)、惠更斯(Huygens)和牛顿(Newton).要确定光线穿过透镜的通道,必须知道光线射入透镜的角度以便应用反射定律.重要的角是光线同曲线的法线间的夹角,而法线是垂直于切线的,所以问题归结为求出法线或是求出切线.另一个涉及曲线的切线的科学问题出现在运动的研究中,运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向就是轨迹的切线方向.

第三类问题是求函数的最大值与最小值.炮弹在炮筒里射出,它飞行的水平距离(即射程)依赖于炮筒对地面的倾斜角,即发射角.一个实际问题就是求能获得最大射程的发射角.17世纪初期,伽利略(Galileo)断定(在真空中)最大射程在发射角为45°时达到;他还得出炮弹从各个不同角度发射后所能达到的不同的最大高度.另外研究行星的运动也涉及最大值与最小值的问题,例如求行星离开太阳的最远和最近距离.

第四类问题是求曲线长(如行星在已知时期中移动的距离),曲线围成的面积,曲面围成的体积,物体的重心,一个体积相当大的物体(如行星)作用在另一物体上的引力.古希腊人曾用穷竭法求出了一些面积和体积,尽管他们只是对较简单的面积和体积应用了这个方法,但也不得不加上许多技巧,因为这个方法缺少一般性,且他们常得不到数字的解答,穷竭法先是逐渐地被修改,后来则由于微积分的创立而根本地修改了.

标志着数学飞跃发展是17世纪初法国数学家笛卡儿把变量引进了数学,并创立了坐标概念,进而建立了解析几何.于是在数学中不再限制于研究常量和固定的规则的几何形体,进而研究变量(即在某一运动变化过程中不断变化,可以取不同数值的量)和不规则的几何形体(如曲线、曲面、曲边形和曲面形等),而且研究的数与形开始紧密地联系起来.在17世纪工业革命的直接推动下,英国科学家牛顿和德国科学家莱布尼茨(Leibniz)各自独立地创立了微积分(当然也是初步的!).这之后,数学的发展日新月异,又形成了内容丰富的高等代数、高等几何与数学分析三大分支,在此基础上,还出现了一些其它分支(如实变函数、泛函分析等).相对于初等数学,它们被统称为高等数学.人们也把这个阶段(17世纪到19世纪)称为高等数学阶段.同学们在大学阶段学习的数学基本上都是高等数学方面的课程.

初等数学与高等数学不仅在研究的对象上,而且在研究的方法上也有根本性的区别.初等数学的方法一般来说是静止的、孤立的、形式逻辑式的,而高等数学

则是动的、联系的、因而也是辩证的方法.在全部高等数学研究中贯穿一个基本观点,就是变化的观点,用变化的观点去考察问题,从变化当中去认识事物,从相互联系中去研究同一变化过程中的若干变量的性态.

在高等数学中,我们遇到的矛盾,常常是"曲与直(如曲边形与直边形面积),变与不变(如变速与匀速直线运动的距离)"的矛盾,解决它们的方法,首先是在局部"以直代曲"(即在小范围内把曲边形近似看成直边形),"以不变代变"(即在小时段内,把变速运动近似看成匀速运动)等等,从而求得问题的近似解决(即求得曲边形面积与变速运动的距离的近似值).最后又都归结为近似和精确的矛盾,为了解决这个矛盾,使用了所谓极限方法.可以说函数(变量)是微积分研究的对象,而极限则是微积分的基础.

2.微积分课程的性质、目的和任务

随着21世纪的到来,"科学技术是第一生产力"将在社会经济发展中起关键作用.以软件开发和大规模产业化为标志,人类进入了信息革命的新纪元,在现代工程技术中将进入以理论分析、数学建模及计算、实验三位一体的新方法为代表的"数理工程技术"的新时代,在社会、经济、科技、工程等方面,各项高新技术不断涌现,而这些高新技术的本质是数学技术.21世纪的时代特征要求培养具有较高理性思维修养,善于分析问题解决问题的高素质专门人才,大学教育将从"专业教育"转向"素质教育",而数学素质教育是其重要组成部分.当代理工科大学生必需具备以下四个方面的数学基础:连续量的数学基础——以微积分为主体的分析基础;离散量的数学基础——以线性代数与解析几何为主体的代数与几何基础;随机量的基础——以概率论与数理统计为主体;数学应用基础——以数学建模、数值计算和数据处理为主体的数学实验.

微积分(亦称高等数学)就是给各类非数学专业学生讲授微积分的基础知识及其应用的一门重头基础课,它内容丰富、学时较多,既要为理、工、管各专业后继课程提供基本的数学工具,为学生进一步学好其它数学奠定基础;又具有培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力的任务,因此可以说微积分课程是基础中的基础.

按照有关课程教学指导委员会提出的基本要求,学习微积分,要使学生获得:映射(函数)、极限、连续,一元函数微积分学及其应用,多元函数微积分学及其应用,矢量代数与空间解析几何,无穷级数,常微分方程及其应用等方面的基本概念,基本理论和运算技能.通过各个教学环节逐步培养学生的抽象思维能力、逻辑推理与判断能力、空间想象能力、数学运算能力、数学建模能力,当然对不同专业具体要求有所不同.

3. 学习微积分课程应注意的问题

前面已讲到高等数学的研究对象与研究方法与初等数学有根本区别，因此高等数学具有概念更复杂、理论性更强、表达形式更加抽象与推理更加严谨的特色，这是读者在学习这门课程时必须首先明白的问题，基于此，为学好这门课，我们建议读者应力求做到以下几点：

(1)注意对基本概念的理解，弄清其内涵与实质，及这些基本概念的相互关系.这方面多做一些思考题的练习是有益的.

(2)注意对基本理论的理解，要明白它们提出的背景(即有何实际意义，如几何、物理等)，这个理论的条件与结论是什么，它有什么作用，它与其它有关理论之间又有什么相互联系与区别.

特别提醒读者不能象在学习初等数学时很少读书，只顾做题那样来学习高等数学.因为高等数学里的概念多、理论(定理、命题)也多，所以必须认真阅读和深入钻研教材内容，才能透过抽象的表述形式，深刻理解这些概念与理论，领会一些重要的数学思想方法.

(3)注意对基本运算方法与技巧的掌握.要做到这一点，除了读好书以外，更重要的是完成必要的习题.学数学不做题是不行的.但在做题(包括看教材上的例题)时应当有意识地思考：这种题型是怎样提出来的？它反映了基本概念的什么内涵？它是用什么途径或方法解决的？特别对涉及多个知识点的综合例题更应考虑这些题目与哪些知识点相关连，又是如何运用有关的理论或方法解决的，这对于基本概念的融会贯通，提高分析问题的能力是十分有用的.

本书使用符号说明

N—表示正整数集，**Z**—表示整数集.

R—表示实数集，大写字母 X、Y、Z 等表 **R** 中的集合，小写字母 x、y、a、b 等表示集合中的元素，即一个实数，也叫数轴上的一个点. 而 f,g,h 则表示函数. **R** 中位于两个给定的数 a,b 之间的一切数的组成集合称为区间，即是说此集合中除最大最小点外，全是此集合的点. 而这最大点和最小点称为端点(可能是集合的点也可能不是). 区间用其端点来表达；如(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$，$[a,b]$等，圆括号表示不包含端点；方括号表示包括端点. 例如(a,b)这个区间中不包括 a,b 两点，也称开区间. $[a,b)$，$(a,b]$称为半开区间，$[a,b]$称为闭区间. $x\in(a,b)$表示 x 是区间(a,b)中的一个点或元素. x 的邻域 $U(a,\varepsilon)$表示集合$\{x\in\mathbf{R}:|x-a|<\varepsilon\}$，即是以 a 为中心，以 ε 为半径的开区间. $\mathring{U}(a,\varepsilon)$表示 $U(a,\varepsilon)$中除点 a 外的所有点，称为点 a 的去心邻域：即$\{x:0<|x-a|<\varepsilon\}$. 此外还有不少特殊的数学符号：

$\exists$—存在；

C_n^m—表从 n 个元素中取 m 个元素的组合数：

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!};$$

$\forall$—对任意的(或对所有的)；

$\ni$—使得(满足)；

$\Rightarrow$—由此得出结论；

$B\subset A$—A 包含 B；

$\in$，$\notin$—属于，不属于；

max—表最大(它是 maximum 的缩写)；

min—表最小(它是 minimum 的缩写).

目　　录

第一章　函数与极限

函数的概念是数学中最重要的概念.我们在初等数学中已见到若干例子,本章只讨论单变量的情况,这也是最重要和最简单的情况.

第一节　函　数

1.1　函数的概念

1.函数的定义

我们先看若干个简单的例子;

例 1.1　$y = \sin x, -\infty < x < \infty.$

例 1.2　$F = \dfrac{9}{5}C + 32$,　其中 F 是华氏度数,而 C 是摄氏度数.

例 1.3

Y	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961
D	76	82	85	90	98	103	105

其中 D 表某国国际债务,单位是百万美元. Y 表示年(1955 ~ 1961).

例 1.4　$d = 4.9t^2$.其中 d 表示自由落体下落的距离(单位:m). t 是下落时间(单位:s).

上述的例子,我们都可以指定一个变量的值而确定另一变量的值.

例 1.5　图1.1中可以看出定义域是 -0.4 到1间的实数,而值域则是0到0.4间的实数.

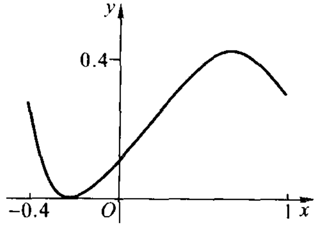

图 1.1

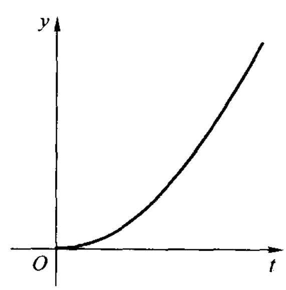

图 1.2

类似的例子还很多,例如月生产量曲线,年度产量曲线等.

例 1.6 图1.2是发射火箭时,火箭高度 y 和时间 t 的关系 $y = h(t)$ 的图形.

定义 1.1 对于 **R** 上的两个集合 X, Y 和它们之间的对应规律 f. 若对 X 中的任一元素 x,通过对应规律 f 都对应 Y 中的唯一元素 y,则称 f 是从 X 到 Y 的**函数**,记为 $f: X \to Y$. 函数 f 在点 x 的值 y,记为 $y = f(x)$.

x 称为自变量,y 称为因变量,X 称为函数 f 的定义域,常用 $D(f)$ 来表示.

当 x 取遍 X 中的一切数时,它对应的 y 组成的数集 $f(X) = \{y \mid y = f(x), x \in X\}$ 称为函数的值域,常用 $R(f)$ 来表示. 显然 $f(X) \subseteq Y \subseteq \mathbf{R}$.

上面的例 1.1 中,定义域 X 是 $(-\infty, +\infty)$,而值域 Y 是 $[-1,1]$,对应关系是正弦函数. 例 1.3 中的定义域是整数集 {1955,1956,1957,1958,1959,1960,1961},而值域也是整数集 {76,82,85,90,98,103,105},对应关系由表格确定. 其它几个例子读者可以自已找出其定义域和值域以及函数关系. 上述例子中除例 1.5 和例 1.6 外,用给定自变量的值,可通过数学运算或用查表的方式来确定函数的值. 例 1.5 和例 1.6 是用图形的方式给出函数关系.

上面定义的函数概念,在数学的不同部份有时用不同的数学名称,例如:映射、运算、算子、变换等.

注意:考虑表达式 $x^2 + y^2 = 1$. 我们在中学数学中就知道它是圆周的方程. $x = -1, 1$ 时,y 对应的值是 0,但当 x 在区间 $(-1,1)$ 内时,对应的 y 值有两个. 按上面的定义,x 和 y 之间的关系不是函数关系. 其实它们之间是多值函数关系. 本书中暂不讨论多值函数关系. 如果限定 $y > 0$,则 x, y 之间的关系就是函数关系. 又如 $y = \sqrt{x}$ 在半直线 $x < 0$ 上就不是函数. 因为任给定义域中的一个值都找不到函数的值与之对应.

由此看来,函数概念中有几个重要组成部份:定义域、对应关系(定义域中的一个值只对应值域中的一个值)、值域,缺一不可.

有一种特殊的函数,值得单独列出,就是这样的函数:其定义域是全体自然数,值域在实数域内. 按上面函数的定义可以写成 $y = f(n)$, $n = 1,2,\cdots$. 这种特殊的函数称为**数列**(或**序列**). 若记 $f(n)$ 为 x_n,即 $x_n = f(n)$. 则数列常记为 $\{x_n\}$, $n = 1,2,\cdots$. 或简记之为 $\{x_n\}$. 例如

(1) 等差数列 $\{na\}$,把数列中的元素列出来就是 $a, 2a, 3a, \cdots, na, \cdots$;

(2) 等比数列 $\{q^{n-1}\}$: $1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$;

(3) 斐波那契(Fibonacci)数列 $\{F_n\}$: $1,1,2,3,5,\cdots$,其中 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

2. 函数的表示法

解析法 把两个变量之间的函数关系用数学式子表示出来(常称解析表达式),并注明定义域(有时也可不注明定义域). 给定自变量的值,通过数学式子进行运算而得到对应的函数值. 本书涉及的函数大多如此表示. 上面例 1.1,例 1.2,

例 1.4 中就是这样表示的. 但有时,无法用一个式子表示函数. 如下例:

例 1.7　$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 + x, & x > 1. \end{cases}$

这个函数的定义域是 $D = [0, +\infty)$. 当 $x \in [0,1]$ 时,对应的函数值是 $f(x) = 2\sqrt{x}$;当 $x \in (1, +\infty)$ 时,对应的函数值是 $f(x) = 1 + x$. 这里函数在不同区间有不同的表达式,这并不能说表达了两个函数,仍只是一个函数(见图 1.3). 这就是通常所谓的**分段函数**.

实际问题中,大量的函数都是分段函数. 例如,道路从直道进入弯道时,表示道路的函数从直线变成曲线,它们的表达式是不同的. 又如大气中的温度在低空时随高度上升而降低,但上升到同温层时温度稳定在零下 56.5℃,成了常数,不随高度变化. 如果用解析式表达,在不同高度表达式也是不同的. 我们再介绍两个重要函数:

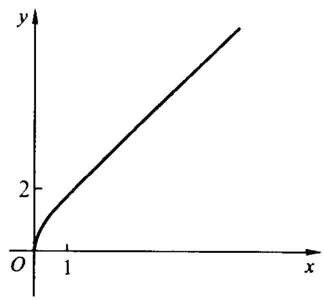

图 1.3

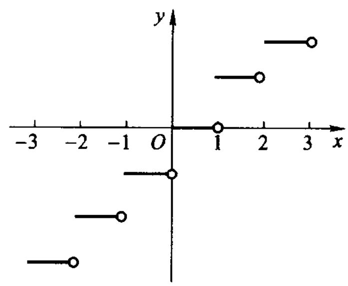

图 1.4

例 1.8　**取整函数**

$$y = [x],$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 即若 $x = n + r, n \in \mathbf{Z}, 0 \leqslant r < 1$, 则 $y = [x] = n$. 其图形见图 1.4.

例 1.9　**符号函数**

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

其图形如图 1.5.

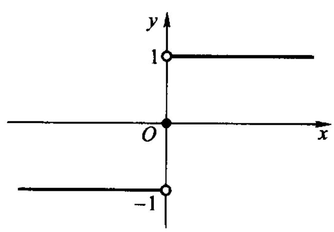

图 1.5

列表法　如上面的例 1.3,是用列表来表示函数的. 又如对数函数虽然有表达式,其实除个别点外,一般无法直接算出,我们还得通过查表来求

其值(近似的).所以列表法是很重要的一种函数表示法.

图示法　函数 $f(x)$ 在其定义区间中,在平面直角坐标系下以几何图形来表示.即是说,集合 $\{(x,f(x)) \mid x \in f \text{ 的定义域}\}$ 的所有点,构成 f 的图形.这种方法常和解析表达式同时使用.其实前面已经这样使用了.但是并不是所有函数都能用图形来表达,例如狄利克雷(Dirichlet) 函数就不能用图形来表达.所谓狄利克雷函数是这样定义的:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{对有理数 } x,\\ 0, & \text{对无理数 } x.\end{cases}$$

1.2　函数的特性

1. 单调性

有些函数例如 $y=x^2$,在 $x>0$ 时,随 x 增加而增加.这就是所谓的单调性.下面我们给出严格的定义.

定义 1.2　函数 $y=f(x)$ 在 X 上有定义,$\forall x_1,x_2\in X$,且 $x_2>x_1$ 时有 $f(x_2)\geqslant(\leqslant)f(x_1)$,则称函数 $y=f(x)$ 在 X 上**单增(单减)**.

单增和单减统称为单调.若 X 是区间,则称 X 为函数 f 的单调区间.如下图所示.

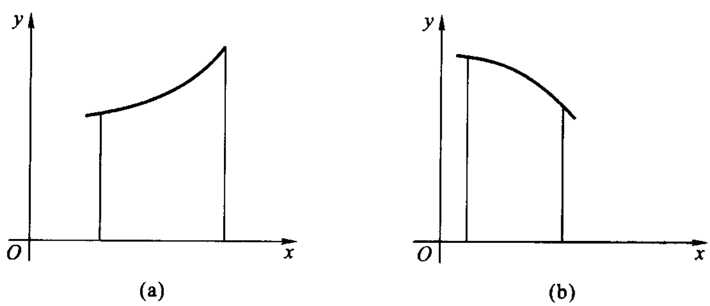

图 1.6

图 1.6(a) 是单调增加(上升) 的函数图形,图 1.6(b) 是单调减少(下降) 的函数图形.

如果 $\geqslant(\leqslant)$ 号用 $>(<)$ 代替,则称**严格单增(单减)**.

2. 有界性

函数 $y=x$ 当 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 中变化时,y 的绝对值可以任意大.而函数 $y=\sin x$ 则是对一切 x,y 的值都在 -1 和 1 之间.函数值域的这种性态可用下面的定义来精确描述: