高等学校教材

海岸动力学

（第二版）

（港口与航道工程专业用）

陈士荫　顾家龙　吴宋仁　合编

人民交通出版社

封面设计：彭小秋

ISBN7-114-00279-3
U·00215
定　　价：3.00元

高等学校教材

海 岸 动 力 学

Haian Donglixue

（第 二 版）

（港口与航道工程专业用）

陈士荫 顾家龙 吴宋仁 合编

内 容 提 要

本书包括两大部分。第一部分为海岸动力，包括波浪、潮汐与近岸波浪流；第二部分为海岸泥沙运动，包括波浪作用下的泥沙运动、海滩上的泥沙运动与岸滩变形以及淤泥质海岸上的泥沙运动规律。

主编为陈士荫。一、二章由吴宋仁执笔，三、七章由顾家龙执笔，绪论及四、五、六章由陈士荫执笔。责任编辑董雅文。

本书由龚崇准主审，经航道及港口教材编委会海岸动力学与工程水文编审小组于1987年4月召开的审稿会议同意作为高等学校教材，并推荐作为有关研究人员、工程技术人员及研究生的参考书。

高等学校教材
海岸动力学
（第二版）
（港口与航道工程专业用）
陈士荫　顾家龙　吴宋仁　合编
人民交通出版社出版发行
（北京和平里东街10号）
各地新华书店经销
人民交通出版社印刷厂印刷
开本：787×1092 $\frac{1}{16}$　印张：15　字数：376千
1980年12月　第1版
1988年12月　第2版　第2次印刷
印数：3,501—6,000册　定价：3.00元

目　录

绪　　论

海岸是陆地与海洋的交界线。沿海地区是人口最集中的地区，世界上很大一部分城市位于沿海地区及其附近。在滨海地区，修建了众多的工厂、港口、渔业基地，有许多风景区、疗养胜地及海滨浴场。海岸带地区还为我们提供了发展水产养殖、盐业及海涂围垦的条件。此外，这个地区还往往是重要的军事前沿阵地。人类要发展海洋事业，也往往要以海岸为依托，建立供应的基地。因此，海岸对于人类活动的重要性，随着经济的发展，日益显著地表现出来。

海岸是经常受到海洋自然因素侵袭的地区。海洋上的风暴经常直接袭击海岸地区。风暴掀起的巨大波浪，常引起海岸建筑物的巨大破坏，大片海岸的坍塌。风暴引起的风暴潮或海底地震引起的海啸，可使大量的海水涌上陆地，使沿岸低平地区受淹而遭致巨大的破坏和生命财产的巨大损失。波浪与潮流引起的沿岸带的泥沙运动，能造成海港与航道的淤积以及海岸的侵蚀。因此，人类要占领海岸这个阵地，就需要不断地和这些破坏的动力因素作斗争。

海岸动力学的任务就是要研究上述自然动力因素，主要是波浪、潮汐、潮流对于海岸与海岸建筑物的作用。它对于利用与开发海岸带、保护海岸的事业是必不可少的，特别是对于海港的建设尤为重要。港口的选址与规划，港口建筑物的设计，港池与航道的开挖与疏浚维护，港区附近海岸的保护等都需要这方面的知识。其中的一部分内容在港口工程、水文学、水力学等课程中已有叙述。本课程着重于阐述海岸动力因素对于岸滩演变与沿岸泥沙运动的影响。这是一个非常复杂的问题。从微观上来说，上述的动力因素还不能确切地加以描述，特别是近岸地带波浪与水流受到地形与建筑物的影响而更加复杂化；此外，波浪与水流对于海岸泥沙的作用至今还找不到合适有效的公式加以描述。从宏观方面来说，海岸地区的泥沙运动以及岸滩的演变在时间及空间上的跨度往往都很大，给研究工作带来很大困难。因此，虽然这门学科在最近三、四十年内获得了巨大的进展，但是它还是不很成熟的。有许多重要的问题还没有得到满意的解决，许多问题的解决还只停留在定性的阶段。以致在现阶段，我们还不能完全有信心地应用现有的认识去解决与海岸泥沙运动有关的工程问题，例如要定量地预估海港与航道的泥沙淤积就常常有着这样的困难。

海岸动力学要研究的问题首先是作用在海岸上的动力因素，其中最主要的是波浪。关于波浪的一般理论基础在水力学中已有讲述；波浪的形成机理、预报、观测与资料整理以及波浪在近岸浅水区传播时的变形、折射等问题在水文学中也有深度不等的论述。本课程除了进一步讨论外，对于波浪在浅水中其他一些特性，如波浪在岸边的破碎、破碎后的变化、波浪与海床的相互作用力以及波浪在近岸地区产生的水流还要重点地加以叙述。潮汐与潮流在近岸地区也是重要的动力因素，在水文学中对于潮汐的成因、潮位资料的分析和预报已有比较充分的论述。本课程中对潮汐的动力理论、浅海的潮波运动还要作进一步的分析。波浪作用下的泥沙运动以及由此引起的岸滩演变是本课程的重点。因为波浪作用下的泥沙运动理论基本上是从河流的泥沙运动理论衍生出来的，而且潮流的挟沙与河流的挟沙大致相似，因此常常要从单向水流作用下的泥沙运动理论讲起。除此之外，还要重点讲述海滩上的泥沙运动，

海滩剖面的变化与岸线变形等问题。关于淤泥质海岸的泥沙运动，由于有许多独特的规律，在本书的最后将另列一章专门进行讨论。

对于海岸动力学的研究方法包括下列几种：

1.分析方法；

2.实验室试验研究；

3.现场调查研究；

4.数学模型。

分析方法是根据现象的物理力学关系，应用基本的力学原理，建立起现象各要素之间的数学力学关系。这种方法在其他课程里早已熟悉。海岸动力学的基础是流体力学，是要应用流体力学的基础理论去解决近岸地区各种动力现象的内在联系。但是，由于所涉及因素的复杂性，往往对于自然条件要作不同程度的简化，在数学上也常要作不同程度的近似处理，从而使理论与实际现象之间有或多或少的偏离。许多问题还没有从理论上圆满地解决，需要今后进一步去探索研究。

实验室的试验研究与现场的调查研究在海岸动力学的研究中有着特别重要的地位。事实上，许多现象本身就要通过实验室或现场的研究来揭示，各物理因素之间的关系需要通过这些研究来建立。更多的情况是分析研究所建立的数学力学关系中一些不能肯定的因素，需要用实验室或现场研究的资料加以确定，例如确定一些经验系数等。所以，海岸动力学中所提出的一些关系式大都是经验或半经验的。至于在具体的工程实践中，由于自然条件的复杂性，现场的调查研究与实验室研究更是不可缺少的手段。然而，遗憾的是，在这门学科里，这两种方法也往往遇到困难。在实验室里，除了模拟自然条件的困难以外，还存在着比尺关系上的困难。这指的是在实验室里所研究的对象是小比尺的，在这种条件下所建立的关系能否应用到自然条件中去常常存在问题。目前世界上各有关实验室的设备趋向于大型化，例如建立能产生接近自然尺度波浪的特大波浪槽就是为了解决这样困难的。关于现场研究，近年来得到特别的重视，有些规模十分庞大，例如美国的近岸输沙研究（NSTS）、潮汐通道综合调查（GITI），都是联合了许多部门，耗费巨大的人力物力来进行的。现场研究避免了实验室研究中尺度效应的困难，实现了所谓1：1模型的研究。但是除了耗费巨大之外，还存在着测量上的困难，特别是大风大浪条件下的测量资料很不容易取得，而这样的资料又是我们最需要的。此外，现场研究所碰到的因素是多种多样的，各种因素掺合在一起，不容易把我们感兴趣的因素分离出来。由于以上所说的种种原因，虽然对于这门学科的研究工作已经作了巨大的努力，取得了重大的进展，但还必须承认这门学科还没有发展到成熟阶段。往往有这样的情况：对于同一问题，不同学者提出了不同的方法，得出不同的结果。这给初学者带来了不少的困难。在各种方法之间，评价其优劣，也常常成为一个重要的问题。

近来，数值解法已日益成为解决各门学科许多问题的重要手段，对海岸动力学也不例外。特别在实际工程问题中，数学模型在研究波浪、潮流及其他流场以及岸滩冲淤变化方面已越来越得到广泛的应用。与物理模型相比较，它有以下突出的优点：

1.数学模型避免了物理模型中的比尺效应问题；

2.数学模型可以处理大的空间范围问题，平面尺度可达几十公里甚至几百公里，因而至少可以为小范围物理模型提供所需要的边界条件；

3.数学模型可以很快地处理各种各样的方案，因而在详细的物理模型以前至少可以作为比较预选方案的手段。

然而，数学模型或数值解法的基础是物理模式与力学关系。只有正确的物理模式与力学关系的基础上，数学模型或数值解法才有意义。因此，我们的注意力还是要放在建立正确的物理模式与力学关系的基点上。

海岸动力学与其他多种学科有着密切的联系。首先是河流动力学。河流泥沙运动规律的研究，虽然有类似的困难，但由于研究历史较长，已取得比对海岸泥沙运动规律的研究有更大的进展。两者的动力因素虽不全相同，但作用的对象却是相同的。因此，海岸动力学可以从河流动力学取得不少借鉴。其次，其他研究海岸的学科，例如海岸地貌学，海岸地质学（沉积学），也同海岸动力学有密切的联系。海岸地貌学是从宏观方面研究岸滩的演变。它应用对比历史上与现在的海岸地貌的方法来研究岸滩的演变。它建立了各种海滩的分类，描述了各种海滩的结构并研究了它们在历史上的发展过程与动力条件。因此，它常能很好地说明岸滩演变的历史与现状。海岸地质学（沉积学）是从对海岸沉积物的研究来研究海岸的发展历史。它根据地层的钻探资料，沉积物的沉积环境、年代与沉积顺序来研究海滩的沉积过程，从而了解岸滩的历史发展过程。它对海滩沉积物特性的研究，主要是对泥沙的组成、粒度与粒径分配，颗粒的圆度及形状，沿海滩方向及垂直于海岸方向的粒径分布以及不同沉积物在平面上分布的研究，来了解海岸上的动力强度，搞清泥沙的来源与运动方向。因此，在海岸泥沙运动与岸滩演变的研究上，把海岸动力学与海岸地质地貌的研究结合起来，往往可以更好地解决所研究的问题。对于我们学习这方面的有关知识也是很有帮助的。

我国有很长的海岸线，海岸带的资源非常丰富。随着社会主义建设的进展，海岸带资源的开发，港口的建设，将提出越来越多的海岸动力学课题。由于我国海岸的自然条件复杂，各类海滩齐备，更由于本学科的不成熟，随时随地都可碰到一些困难的问题要求我们去解决。我国目前在海岸工程方面已有着一支有一定力量的建设队伍与科学研究队伍，积累了不少的经验，但与发达国家相比尚存在一定的差距。这些，应激起我们更大的求知热情，立志于探索和研究，把我国在这方面的科学水平搞上去。

第一章　波浪理论

第一节　概　　述

一、海洋波动概念

波浪是海洋中最常见的现象之一，是岸滩演变、海洋和海岸工程最重要的动力因素和作用力。引起海洋波动的原因很多，诸如风、大气压力变化、天体的引潮力、海洋中不同水层的密度差和海底的地震等。大多数波浪是海面受风吹动引起的，人们把这种波浪称为“风浪”或“海浪”。风浪的大小取决于风速、风时和风距的大小。小海湾里起不了大浪，但在大洋里，强风可以刮起汹涌滔天的波涛。迄今海面上观测到的最大风浪高达34m，这是1933年2月7日美国军舰“拉马波”（Ramapo）号在北太平洋中部观测到的，当时的风速达35m/s以上。

风浪直接受风力作用，是一种强制波，它常表现为海面连续变化的紊乱的波峰和波谷，波形极不规则，波浪传播方向也变化不定。在传播过程中，不同周期、不同波高、不同初相位以及不同波向的波浪相互作用着，波速大的不断从各个方向赶上和超过波速慢的，有的波浪在相互作用中得到加强，有的则互相抵消或削弱，各个波浪常常相互碰撞而激起浪花和旋涡。这一切使得海面显得杂乱无章。

当风平息后或风浪移动到风区以外时，受惯性力的作用，水面继续保持振动，这时的波动属于自由波，这种波浪称为“涌浪”（Swell）或“余波”（Surge）。涌浪与风浪不同，海面呈现出规则的波峰和波谷，波形较为圆滑，离风区愈远，波形愈规则。一般情况下，涌浪可以传播很远，达数百至数千公里，最终将传播至浅水区和岸边。涌浪在深水传播过程中，由于水体内部的摩擦作用和波面与空气的摩擦等会损失掉一部分能量，主要能量则是在进入浅水区后受底部摩阻作用以及破碎时紊动作用所消耗掉，这些能量对于沿岸地区的泥沙运动起着关键作用。波浪不仅能掀动岸边的泥沙，而且还会引起近岸水流，这种水流对搬运泥沙又起着重要作用。因此，了解波浪运动的特性是研究近岸泥沙运动和岸滩演变的基础。

二、波浪的分类

为了研究不同波浪的特性，对可能产生和传播的波浪加以分类是十分必要的。

1.按波浪所受的干扰力分类

如前所述引起波浪的原因很多，不同的外力干扰可引起不同的波浪。由风力引起的波浪，称为风浪；由太阳、月球或其它天体的引力引起的波浪，称为潮波；由大风暴引起气压下降而导致水面上升的大浪，称为风暴潮；因海底地震或海底火山爆发等引起海底激烈变动而导致水面突然地上、下起伏的波动，称为海啸，国际上通常称这种波浪为“Tsunami”，它是日语“津波”的译音；因船舶航行而激起的波浪，称为船行波。风浪是最常见的一种波浪，它对岸滩变形和海洋及海岸建筑物作用最大、最经常，因此是本课程的讨论重点。

2. 按波浪周期分类

各种不同的波浪，其波周期（T）或频率$\left(f=\frac{1}{T}\right)$各不相同。金斯曼（Kinsman）（1965年）提出了一个根据波周期或频率区分不同类型波浪的图解图（图1-1），图中的横坐标

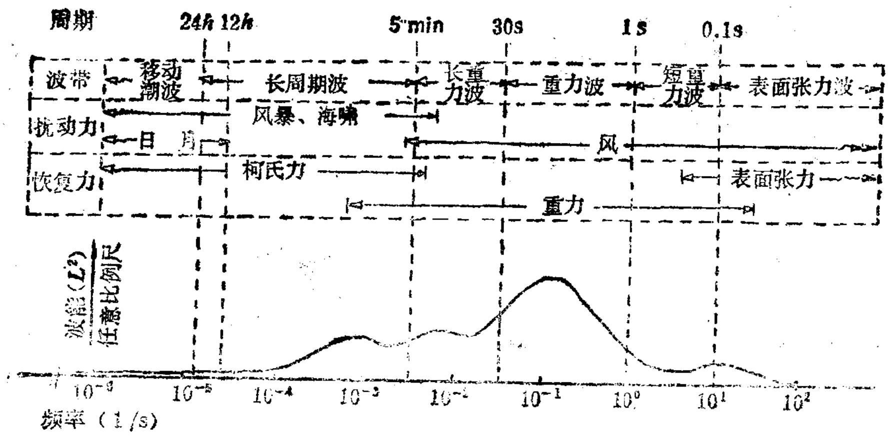

图1-1　各种类型波浪的波能分布图

为波周期或波浪频率，纵坐标为相对波能。该图表示出不同周期或频率的波浪所包含的相对能量的大小以及各种不同类型波浪的周期范围。例如风暴潮、海啸的波周期为 5 min 至 24h 以上，通常把这类波浪称为长周期波或长波，风浪的波周期一般为数秒至数分钟，表面张力波的周期最短只有零点几秒，通常把后面一类波称为短周期波或高频波。表面张力波波高很小，相对能量也很小，对于岸滩变化及海岸建筑物作用可忽略不计；长周期波如海啸等主要引起海平面变动和产生海流等，在某种情况下，还可能是岸滩变形的重要因素。人们最关心的是图1-1中那些归入重力波区具有周期1～30s的重力波，其中周期5～15s这一较窄范围的波浪，对于海岸工程问题往往最为重要。所谓重力波是因为重力是波浪的主要恢复力，即是说重力力图使流体恢复因风力干扰而失去的平衡位置。图1-1还表明，整个波能的大部分都属于重力波范围，因此重力波对于岸滩演变及海岸工程建筑物的作用最大，是本课程的主要研究对象。

3. 按波浪的运动状态分类

涌浪的波形规则，具有明显的波峰和波谷，在深水区，涌浪的波周期和波高基本上不随空间和时间而改变，因此这种波浪又称为规则波。规则波一般可从流体力学的角度加以研究，这种研究包括线性理论和非线性理论两大类。大洋中的风浪，波形杂乱，波高、波周期以及波向不定，呈现出不规则的随机现象，因此这种波浪又称为不规则波或称随机波。不规则波可以用波谱的方法来描述。对于近岸泥沙运动和岸滩演变研究，现阶段主要还是用规则波理论来解决问题，因此本书主要研究较为简单的规则波。

4. 按波浪的空间状态分类

近岸海面，常常可以清楚地看到接踵而来的波峰和波谷，波峰线是一些很长的互相平行的直线，如图 1-2a）所示，这种波浪称为二维波，其海面的运动状态在波峰线方向没有变

化。太洋中的风浪，波峰线难以辨认，波峰和波谷如同棋盘一样交替分布，杂乱无章，这样的波浪称为三维波，如图1-2b)所示。在研究波浪运动的一般问题时，常常假设它是平面运动即认为是二维的。

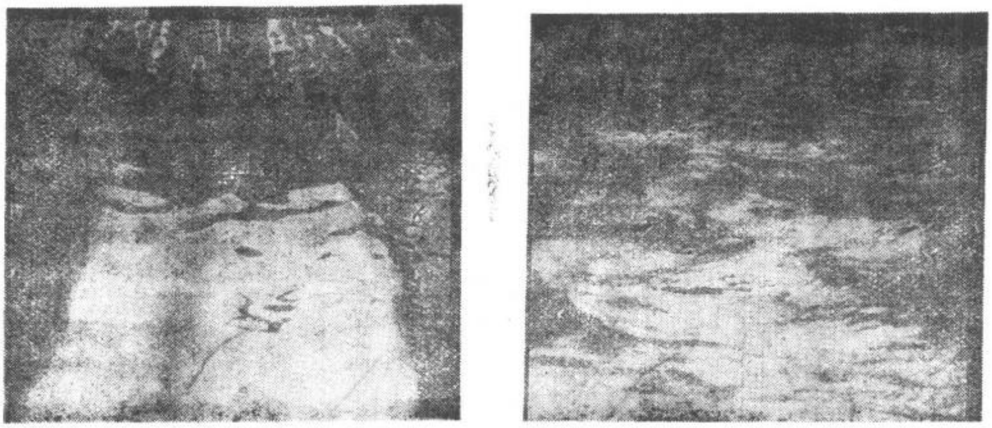

图1-2 二、三维波波面图 a)二维长峰波；b)三维短峰波

三. 波浪运动的描述和控制方程

1.波浪运动的描述

一般说来，海洋波浪运动是极其复杂的，它具有非线性三维特征和明显的随机性，无法用流体力学方法进行描述。但是对于简单波浪运动，迄今已有许多不同理论来描述其运动特性。传统上，描述一般水流运动方法有两种，一种叫欧拉法，亦称局部法，它是以空间某一固定点为研究对象，研究任一质点流过固定点的运动特性，诸如速度、加速度等；另一种方法叫拉格朗日法，亦称全面法，它以空间某一质点为研究对象，研究该质点相对于初始条件的各个不同时间的位置、速度和加速度等。拉氏法研究的是某一质点的坐标变化，即质点运动轨迹或称迹线（Path line）；欧氏法研究的是某一流场的变化，它能给出某一固定时刻空间各点的速度大小和方向，亦即给出流线（Stream line）。虽然这两种方法研究对象不同，但它们之间是可以互换的，并且结果是恒等的。其选用并无原则差别，而主要是根据实际需要。波浪运动也是一种水流运动，通常也用这两种方法来描述。

描述简单波浪运动的理论很多，其中最著名的理论有两个：一个是艾利（Airy）（1845）提出的微幅波理论，另一个是斯托克斯（Stokes）（1847）提出的有限振幅波理论。艾利波理论是最基本的波浪理论，它较清晰地表达出波浪的运动特性，易于应用于实践，是研究其它较复杂的波浪理论以及不规则波的基础，因而极为重要。在数学上，艾利波理论可以看作是对波浪运动进行完整的理论描述的一阶近似值。对于某些情况，用有限振幅波理论来描述波浪运动会得到更加符合实际的结果。应该提到，第一个有限振幅波理论是格斯特纳（Gerstner）（1802）提出的，称为余摆线波理论，这一理论虽负有历史盛名，但由于它所描述的水质点运动并不符合实际观测的结果，而失去实用价值。斯托克斯提出的有限振幅波理论远较余摆线波理论优越，因而至今仍获得广泛的应用。

对于浅水区，科特威格（Korteweg）和德夫里斯（De Vries）(1895)提出了椭圆余弦波理论，它能很好地描述浅水条件下的波浪形态和运动特性，但是由于它存在着计算上不方便，在工程实践上未引起足够注意，近年来许多学者根据这一理论编制出各种专门图表和计

算程序，使其便于应用。拉塞尔（Rusell）（1834）发现了孤立波的存在，这种波可视为椭圆余弦波的一种极限情况，在近岸浅水中，应用孤立波理论可得获得满意的波浪运动的描述，因而亦被广泛应用。

随着计算机和计算技术的迅速发展，近一、二十年来不少研究工作者提出了许多近似的直接数值计算波理论，首先要提到的是迪安（Dean）（1965）提出的流函数波理论，这是一种类似高阶斯托克斯波理论的一种有限振幅非线性波理论，迪安将波浪运动用流函数表示，从而建立起一个数值计算方法。任内克尔（Reinercker）和芬顿（Fenton）（1982）在流函数波理论的基础上，提出了一种傅立叶（Fourier）级数数值计算波理论，该理论不仅给出了便于工程上应用的各种波浪运动特性的表达式，而且适用于各种水深情况，对于波高较大的陡波，精度也较高，因而逐渐被工程界推广应用，但限于篇幅，本书不作介绍，读者可参阅有关文献。

2.波浪运动控制方程和定解条件

图1-3表示一列沿正 x 方向以波速 c 向前传播的二维简单推进波。坐标系统如图所示，x 轴位于静水面（Still Water Level—SWL）上，z 轴竖直向上为正。波浪在 xz 平面内运动。

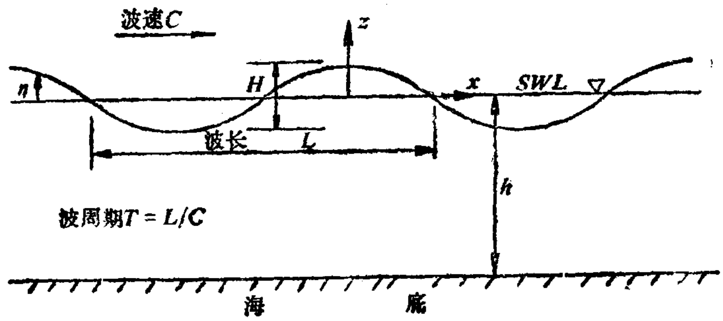

图1-3 推进波各基本特征参数定义图

波浪的基本特征参数如下：

基本参数
- 空间尺度参数
  - 波　高 H——波谷底至波峰顶的垂直距离；
  - 振　幅 a——波浪中心至波峰顶的垂直距离；
  - 波　面 η——波面至静水面的垂直位移 $\eta=\eta(x,\ t)$；
  - 波　长 L——两个相邻波峰顶之间的水平距离；
  - 水　深 h——静水面至海底的垂直距离。
- 时间尺度参数
  - 波周期 T——波浪推进一个波长所需的时间；
  - 波频率 f——单位时间波动次数 $f=\frac{1}{T}$；
  - 波　速 c——波浪传播速度 $c=L/T$。

复合参数
- 波动角(圆)频率 σ——$\sigma=2\pi/T$；
- 波　　数 k——$k=2\pi/L$；
- 波　　陡 δ——$\delta=H/L$；
- 相对水深 ——h/L 或 kh。

一般而言，任何一个特定的波列将由参数 H、L 和 h 或 H、T 和 h 所确定。因此任一种波浪理论均在于根据这 3 个基本参数来确定其运动特性，如波浪传播速度、水质点运动速度和轨迹等。为方便起见常常也用一些无量纲的参数来表征一个波列，例如波高可用 H/gT^2（g 为重力加速度）、波陡 H/L 或相对波高 H/h 表示，水深则常用 h/gT^2、kh 或相对水深 h/L 表示。对于浅水陡波常常用到一种特殊的参数——厄塞尔(Ursell)数 $U=HL^2/h^3$ 来判别波列的类型。

建立简单波理论时，为了简化起见一般作如下假设：

1)流体是均质和不可压缩的，其密度为一常数；

2)流体是无粘性的理想流体；

3)自由水面的压力是均匀的且为常数；

4)水流运动是无旋的；

5)海底水平、不透水；

6)流体上的质量力仅为重力，表面张力和柯氏力可忽略不计；

7)波浪属于平面运动，即在 xz 平面内作二维运动。

必须指出，上述假设对研究大多数海岸工程问题而言，是允许的，但当其中某一个假设不符合某一特定问题的实际情况时，则仍应采用较严格的理论。

由流体是无粘性和无旋运动的假设，可以证明，这种波浪运动存在速度势，通常把这种波浪称为势波。对于这种势运动，水质点的水平分速 u 和垂直分速 w 可由速度势函数 $\phi(x,z,t)$ 导出，即

$$u(x,z,t)=\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{1-1a}$$

$$w(x,z,t)=\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1-1b}$$

由于流体是不可压缩和密度为常数，不难证明，流体的连续方程可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1-2}$$

将式(1-1)代入上式得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{1-3}$$

或记作

$$\nabla^2\phi=0 \tag{1-4}$$

这就是著名的拉普拉斯方程，是势波运动的控制方程。数学上方程式(1-3)或式(1-4)是属 2 元 2 阶偏微分方程，它有无穷多解。为了求得定解需要有定解条件，包括初始条件和边界条件，由于我们所研究的波浪是自由波动，这是一种有规则的周期性运动，因而初始条件可以不予考虑，定解条件都是边界条件。二维波动应满足的边界条件有：

1)在海底表面，水质点垂直速度应为零，即

$$w\big|_{z=-h}=0 \tag{1-5}$$

或写为

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \qquad z=-h\text{处} \tag{1-6}$$

2)在波面 $z=\eta$ 处，应满足两个边界条件：一个是动力边界条件，另一个为运动边界条件。

由假设自由水面压力为常数并令 $p=0$，根据伯诺里方程，自由水面动力边界条件为

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{z=\eta}+\frac{1}{2}\left.\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]\right|_{z=\eta}+g\eta=0 \tag{1-7}$$

由于上式中含有 $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]$ 项（称为对流惯性项），故这个边界条件是非线性的。

自由水面 $z=\eta(x,t)$ 是一个随时间和空间位置而变的变量，故自由水面上各点的上升速度 dz/dt 可由下式计算

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

自由水面形状是由位于自由水面上的各水质点所组成，因此自由水面上各点的运动速度应等于位于自由水面上各水质点的运动速度，即

$$\frac{dx}{dt}=u=\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\frac{dz}{dt}=w=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

于是可得自由水面的运动边界条件为

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \qquad z=\eta\text{处} \tag{1-8}$$

显然这也是一个非线性边界条件。

3)上、下两端边界条件。

对于简单波动，常认为它在空间和时间上呈周期性，从空间上看同一相位点上的波要素是相同的，在时间上看一个周期后的波要素也应是相等，故波动场上、下两端边界条件可表示为

$$\phi(x,z,t)=\phi(x+L,z,t)=\phi(x,z,t+T)$$

对于二维推进波，上、下两端边界条件可写为

$$\phi(x,z,t)=\phi(x-ct,z) \tag{1-9}$$

式中：c——波速。

方程式(1-3)或(1-4)加上式(1-6)～(1-9)构成波动方程的定解问题。数学上把这种只是给定边界条件而不需给定初始条件的方程定解问题称为边值问题。若求得这一边值问题的解，波场中的各运动要素便确定了。

波动方程的定解问题，求解方法大致有两种：一种是类似于常微分方程中常用的方法，先求出波动方程的一般解，然后按照定解条件确定所要求的特解，这种方法叫正向问题。另一种方法是给定一种波浪运动，使其正好适合定解条件，这种方法叫逆问题。一般采用后者。

要精确解出上述二维波列的定解，将遇到如下两个困难。

1)自由水面边界条件是非线性的；

2)自由水面位移η在边界上的值是未知的，即边界条件不是确定的。

因此，要求得上述波动方程的边值解，最简单的方法是先将边界条件线性化，将问题化为线性问题求解。

第二节　微幅波理论

一、微幅波方程和定解条件

为了把上节所述的波动问题线性化，假设运动是缓慢的，波动的振幅a远小于波长L或水深h，即H或$a \ll L, h$。微幅波理论即由此假设而得到，它首先由艾利提出，因此又叫艾利波理论。根据微小振幅这一假设可知式(1-7)和(1-8)中的非线性项与线性项之比是小量，因而可以略去，式中仅保留线性项，这样便使问题得到线性化，因此艾利波理论又可称之为线性波理论。

在微幅波中，自由水面处（即$z=\eta$处）边界条件可近似地认为在静水面（SWL）处（即$z=0$处）得到满足，这样边界条件(1-7)和(1-8)分别可化简为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+g\eta=0 \qquad z=0\text{处} \tag{1-7'}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial\eta}{\partial t}=0 \qquad z=0\text{处} \tag{1-8'}$$

将式(1-8′)代入到式(1-7′)得

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \qquad z=0\text{处} \tag{1-10}$$

而式(1-7′)可改写为

$$\eta=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \qquad z=0\text{处} \tag{1-11}$$

于是微幅波理论控制方程和定解条件可综合写成如下

$$\nabla^2\phi=0 \tag{1-4}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \qquad z=-h\text{处} \tag{1-6}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \qquad z=0\text{处} \tag{1-10}$$

$$\eta=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) \qquad z=0\text{处} \tag{1-11}$$

$$\phi(x,z,t)=\phi(x-ct,z) \tag{1-9}$$

二、微幅波理论解——微幅波势函数和弥散方程

采用分离变量法求解。根据定解条件假设速度势具有如下形式的解

$$\phi(x,z,t)=A(z)\sin(kx-\sigma t) \tag{1-12}$$

式中：$A(z)$——待定函数。

将上式代入拉普拉斯方程得

$$A''(z)\sin(kx-\sigma t)-k^2A(z)\sin(kx-\sigma t)=0$$

化简得

$$A''(z)-k^2A(z)=0 \tag{1-13}$$

这样就把解偏微分方程问题化为解以z为唯一变量的常微分方程问题。解此常微分方程得到

$$A(z)=C_1e^{kz}+C_2e^{-kz} \tag{1-14}$$

式中：C_1和C_2为待定常数，由边界条件确定。

利用边界条件，不难得到势函数ϕ的解为

$$\phi=\frac{gH}{2\sigma}\frac{\mathrm{ch}[k(z+h)]}{\mathrm{ch}(kh)}\sin(kx-\sigma t) \tag{1-15}$$

式中：ch[　]——双曲余弦函数。

此时，自由水面的波面曲线由式(1-11)得

$$\eta=\frac{H}{2}\cos(kx-\sigma t) \tag{1-16}$$

将式(1-15)代入自由表面边界条件(1-10)，得到一个重要的关系式

$$\sigma^2=gk\,\mathrm{th}(kh) \tag{1-17}$$

式中：th[　]——双曲正切函数。

方程式(1-17)称为弥散方程（Dispersion relation），它是波浪运动中一个重要关系式，表达了波浪运动中的角频率σ、波数k和水深h之间不是彼此独立无关的，而是存在着一定的相互关系，由这一关系式可进一步得到下面几个等价关系式

$$L=\frac{gT^2}{2\pi}\mathrm{th}(kh) \tag{1-18}$$

$$c=\frac{gT}{2\pi}\mathrm{th}(kh) \tag{1-19}$$

或

$$c^2=\frac{g}{k}\mathrm{th}(kh) \tag{1-20}$$

式(1-18)～(1-20)表明波长L、波速c与波周期T以及水深h之间存在某种关系。当水深给定时，波的周期愈长，波长亦愈长，波速也将愈大，这样就使不同波长的波在传播过程中逐渐分离开来。这种不同波长（或周期）的波以不同速度进行传播最后导致波的分散现象称为波的弥散（或色散）现象。弥散方程还表明，波浪的传播还与水深有关，水深变化时，波长和波速也将随之变化。

方程(1-17)～(1-20)是超越方程，难以直接求解，一般需用图解法或查表计算，也可以通过计算机用迭代法求解。

三、微幅波解的讨论——深水波和浅水波

上面所得的微幅波的解适用于任何水深情况，对于深水和浅水两种极端情况，微幅波理论解可以作不同的简化。由微幅波解中所包含的双曲函数项取其近似值可得到深水和浅水波的近似表达式。图1-4是双曲函数sh(r)，ch(r)和th(r)随变量r的变化图。